A^2DEMTI

Présentation

L'Association Algérienne pour le Développement de l'Enseignement des Mathématiques et Technologies de l'Information (A^2DEMTI) est née lors de l'assemblée générale constitutive qui s'est tenue le 13 Mars 2010 à Boumerdès - Algérie.

L'A^2DEMTI est une association scientifique et culturelle ; les membres fondateurs et adhérents de l'association mettent en commun, bénévolement et dans un but non lucratif, leurs connaissances et leurs moyens pour promouvoir et encourager les activités dans ces domaines. Parmi ses missions, l'une est de constituer un lien et un cadre de concertation permanent entre les acteurs de l'enseignement des mathématiques et l'autre, de promouvoir l'intégration des technologies de l'information dans l'enseignement de cette matière.

Activités

L'association organise périodiquement les Journées de jeux mathématiques et des compétitions à l'intention des élèves de différents paliers scolaires dans différentes régions du pays.

Elle organise des rencontres nationales et internationales dans le domaine des mathématiques. Elle participe également aux événements scientifiques et culturels organisés par différents organismes.

Contact : A^2DEMTI

✉ 69, boulevard Ahmed Zaidat, Azazga – Tizi Ouzou—Algérie
☎ +213 (0) 549 254 717
@ asso.aademti@gmail.com
www.aademti.org

Exercice 1 (primaire et collège)

Énoncé

Samira est née en l'an 2000 et Amira, sa soeur, est née en 2003.
Que peut-on affirmer avec certitude concernant la différence d'âges entre les deux soeurs ?

a. Quelle est au moins de 3 ans.
b. Quelle est exactement de 3 ans.
c. Quelle est de moins de 3 ans.
d. Quelle n'est pas de moins de 2 ans.
e. Quelle est de plus de 3 ans.

► **Domaine mathématique**
Calcul et logique.

Solution

Proposition d.

Exercice 2 (primaire et collège)

Énoncé

En les lisant dans l'ordre donné, laquelle de ces affirmations est la première à être vraie ?

a. « c. est vraie »
b. « a. est vrai »
c. « e. est fausse »
d. « b. est fausse »
e. « $1 + 1 = 2$ »

► **Domaine mathématique**
Logique.

Solution

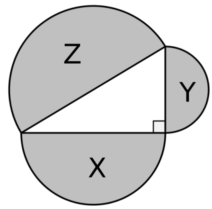
Proposition d.

Exercice 3 (primaire et collège)

Énoncé

Sur la figure ci-contre, sont dessinés 3 demi-cercles inscrits sur les 3 côtés d'un triangle rectangle. Les 3 demi-cercles ont pour superficies, en cm^2, X, Y et Z.
Quels critères sont vérifiés par les réels X, Y et Z ?

a. $X + Y = Z$
b. $X^2 + Y^2 = Z$
c. $X^2 + Y^2 = Z^2$
d. $X + Y < Z$
e. $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{Z}$



► **Domaine mathématique**
Géométrie.

Solution

Proposition a.

Exercice 4 (primaire et collège)

Énoncé

m est un nombre premier tel que $3 < m < 19$ et satisfait exactement 3 des critères suivants. Trouvez ces critères.

a. $2m > 30$
b. $m^2 > 1$
c. $m + 2$ n'est pas premier
d. m est pair
e. m est un multiple de 13

► **Domaine mathématique**
Arithmétique.

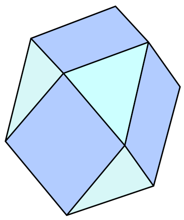
Solution

Propositions b, c et e.

Exercice 5 (primaire et collège)

Énoncé

Les faces du polyèdre ci-dessous sont des triangles et des carrés. Chaque carré est entouré/voisin immédiat de 4 triangles et chaque triangle est entouré/voisin immédiat de 3 carrés.
On sait qu'il y a 6 carrés. Combien y a-t-il de triangles ?



a. 5
b. 6
c. 7
d. 8
e. 9

► **Domaine mathématique**
Géométrie dans l'espace.

Solution

Proposition d.

Exercice 6 (collège et secondaire)

Énoncé

Soit a, b et c trois réels positifs. Montrer que :

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\Big[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\Big]$$

On suppose un triangle ABC tel que AB = c, AC = b et BC = a.
Sachant que $a^3+b^3+c^3=3abc$, de quelle nature est ce triangle ?

► **Domaine mathématique**
Opération sur les nombres réels et résolution de problèmes.

Solution

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(a+b+c)\Big[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\Big]&=(a+b+c)\Big(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\Big)\\&=a^3+b^3+c^3-3abc\end{aligned}$$

On a $a^3+b^3+c^3=3abc \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)\Big[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\Big]=0$.

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \Leftrightarrow (a-b)^2=0$ et $(b-c)^2=0$ et $(c-a)^2=0$

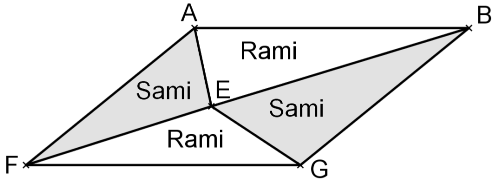
Comme a, b et c sont des nombres réels positifs alors $a+b+c \neq 0$ donc $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \Leftrightarrow a=b$ et $b=c$ et $a=c$.

Comme AB = AC = BC, alors le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 7 (début secondaire)

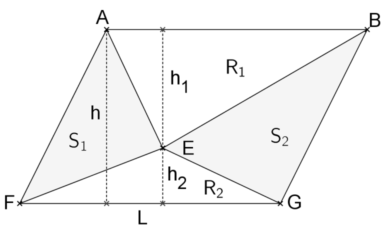
Énoncé

Dans son testament, un père a laissé un plan de partage à ses deux fils Sami et Rami d'une parcelle sous forme d'un parallélogramme comme le montre la figure ci-dessous et ce, pour que les deux enfants bénéficient d'une manière pratique du forage se trouvant au point E.
Rami curieux a voulu prouver que ce partage est juste ; aider Rami à démontrer que les deux aires sont égales.



► **Domaine mathématique**
Géométrie euclidienne.

Solution



Il suffit de montrer que $R_1+R_2=\frac{1}{2}\text{Aire}(ABGF)=S_1+S_2$.

On a $\text{Aire}(ABGF)=L\times h$

d'autre part $\begin{cases} R_1 &=& \frac{L}{2}(h-h_2) \\ R_2 &=& \frac{L}{2}(h-h_1) \end{cases}$.

En ajoutant membre à membre $R_1+R_2=\frac{L}{2}(h-h_2+h-h_1)$

Comme $h_1+h_2=h$,

on a $R_1+R_2=\frac{L}{2}(2h-h)$

i.e. $R_1+R_2=\frac{L\times h}{2}=\frac{\text{Aire}(ABGF)}{2}$.

Donc le partage est juste.

Exercice 8 (1re année secondaire)

Énoncé

$[x]$ désigne la partie entière du nombre x, i.e. $[x]$ désigne le plus grand entier plus petit ou égal à x.
Trouver toutes les solutions réelles de l'équation $4x^2 - 44[x] + 57 = 0$ où x est l'inconnue.

► **Domaine mathématique**
Équations du second degré, propriétés de la partie entière d'un nombre.

Solution

Sachant que pour tout réel x, on a $x - 1 < [x] \leqslant x$,

alors $44(x-1) < 44[x] \leqslant 44x$.

Soit $4x^2 - 44[x] + 57 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 57 = 44[x] \quad (E)$

alors $4x^2 + 57 \leqslant 44x$ et $4x^2 + 57 > 44(x-1)$

i.e. $4x^2 - 44x + 57 \leqslant 0$ et $4x^2 - 44x + 101 > 0$

i.e. $(2x-3)(2x-19) \leqslant 0$ et $\left(2x - 11 + 2\sqrt{5}\right)\left(2x - 11 - 2\sqrt{5}\right) > 0$

i.e. $x \in \left[\frac{3}{2}; \frac{19}{2}\right]$ et $x \in \left]-\infty; \frac{11-2\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{11+2\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$

i.e. $x \in \left[\frac{3}{2}; \frac{11-2\sqrt{5}}{2}\right[$ ou $x \in \left]\frac{11+2\sqrt{5}}{2}; \frac{19}{2}\right[$.

► **1er cas :** $x \in \left[\frac{3}{2}; \frac{11-2\sqrt{5}}{2}\right[$
Dans ce cas $[x] = 1$ ou $[x] = 2$ ou $[x] = 2$.

— Si $[x] = 1$, alors $(E) \Leftrightarrow 4x^2 + 13 = 0$, pas de solution réelle.

— Si $[x] = 2$, alors $(E) \Leftrightarrow 4x^2 = 31$, ou $(E) \Leftrightarrow x^2 = \frac{31}{4}$, alors $x = \frac{\sqrt{31}}{2}$.
Puisque $\left[\frac{\sqrt{31}}{2}\right] = 2$, alors $\frac{\sqrt{31}}{2}$ valeur acceptable.

— Si $[x] = 3$, alors $(E) \Leftrightarrow 4x^2 = 75$, ou $(E) \Leftrightarrow x^2 = \frac{75}{4}$, alors $x = \frac{\sqrt{75}}{2}$.
Puisque $\left[\frac{\sqrt{75}}{2}\right] = 4$, $\frac{\sqrt{75}}{2}$ valeur rejetée.

► **2e cas :** $x \in \left]\frac{11+2\sqrt{5}}{2}; \frac{19}{2}\right[$
Dans ce cas $[x] = 7$ ou $[x] = 8$ ou $[x] = 9$.

— Si $[x] = 7$, alors $(E) \Leftrightarrow 4x^2 = 251$, ou $(E) \Leftrightarrow x^2 = \frac{251}{4}$, alors $x = \frac{\sqrt{251}}{2}$.
Puisque $\left[\frac{\sqrt{251}}{2}\right] = 7$, alors $\frac{\sqrt{251}}{2}$ valeur acceptable.

— Si $[x] = 8$, alors $(E) \Leftrightarrow 4x^2 = 295$, ou $(E) \Leftrightarrow x^2 = \frac{295}{4}$, alors $x = \frac{\sqrt{295}}{2}$.
Puisque $\left[\frac{\sqrt{295}}{2}\right] = 8$, alors $\frac{\sqrt{295}}{2}$ valeur acceptable.

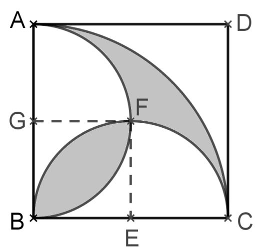
— Si $[x] = 9$, alors $(E) \Leftrightarrow 4x^2 = 339$, ou $(E) \Leftrightarrow x^2 = \frac{339}{4}$, alors $x = \frac{\sqrt{339}}{2}$.
Puisque $\left[\frac{\sqrt{339}}{2}\right] = 9$, $\frac{\sqrt{339}}{2}$ valeur acceptable.

En résumé, les solutions de l'équation (E) sont $\frac{\sqrt{31}}{2}$; $\frac{\sqrt{251}}{2}$; $\frac{\sqrt{295}}{2}$ et $\frac{\sqrt{339}}{2}$.

Exercice 9 (secondaire)

Énoncé

Le carré ABCD a un coté de longueur 4 cm.
On trace comme ci-contre dans le carré deux demi-cercles de diamètre [AB] et [BC] et un arc de cercle de centre B passant par A et C.
Trouver en cm^2 l'aire S de la zone grise.



► **Domaine mathématique**
Les aires et la résolution de problèmes.

Solution

► **1$^{\text{re}}$ méthode**
Soit S' l'aire grise dans le carré BEFG.

$$S' = 2\left[\frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2 \pi}{4} - \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2}\right] = \frac{L^2}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 4\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

.

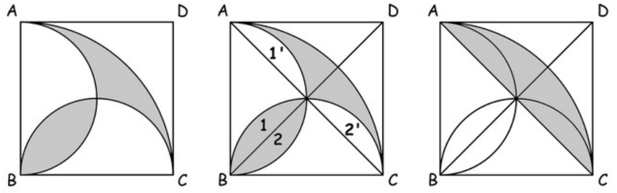
Soit S'' l'aire grise en dehors du carré BEFG.

$$S'' = 2\left[\frac{L^2\pi}{4} - \left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2 \pi}{4}\right)\right] = \frac{L^2}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 4\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

.

On trouve $S = S' + S'' = 8\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\text{cm}^2$.

► **2e méthode**



En partageant le carré par ses deux diagonales, on fait apparaître les zones 1, 1’, 2 et 2’ superposables et donc de même aire. Par découpage et recollement (1 en 1’ et 2 en 2’), on observe que la zone grisée est égale à l’aire du quart de disque de rayon R = 4 cm moins l’aire de la moitié du carré de côté R.

Exercice 10 (secondaire)

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l’équation suivante :
$$-x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots - x^{2017} + x^{2018} = 0.$$

► **Domaine mathématique**

Résolution d’équation polynomiale par regroupement et factorisation.

Solution

$\forall x \in \mathbb{R}, -x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots - x^{2017} + x^{2018} = 0$

$\Leftrightarrow -x - x^3 - x^5 - \ldots - x^{2017} + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2018} = 0$

$\Leftrightarrow -x\left(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2016}\right) + x^2\left(1 + x^2 + \ldots + x^{2016}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(-x + x^2\right)\left(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2016}\right) = 0$

$\Leftrightarrow -x + x^2 = 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \left(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2016}\right) > 0$

$\Leftrightarrow -x(1 - x) = 0$

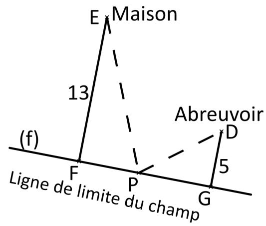
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.

L’équation admet donc deux solutions réelles : 0 et 1.

Exercice 11 (secondaire)

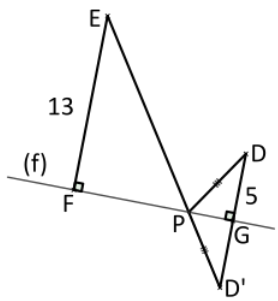
Énoncé

Un agriculteur veut creuser un puits sur la frontière limite de son champ que l'on suppose rectiligne. Sa maison E est distante de 13 m de la frontière et l'abreuvoir est distant de 5 m de la frontière. Aider cet agriculteur à choisir le lieu P pour que le trajet EPD soit le plus court.
On donne FG = 11 m.



► **Domaine mathématique**
Géométrie euclidienne.

Solution



► **1re méthode : inégalité triangulaire**

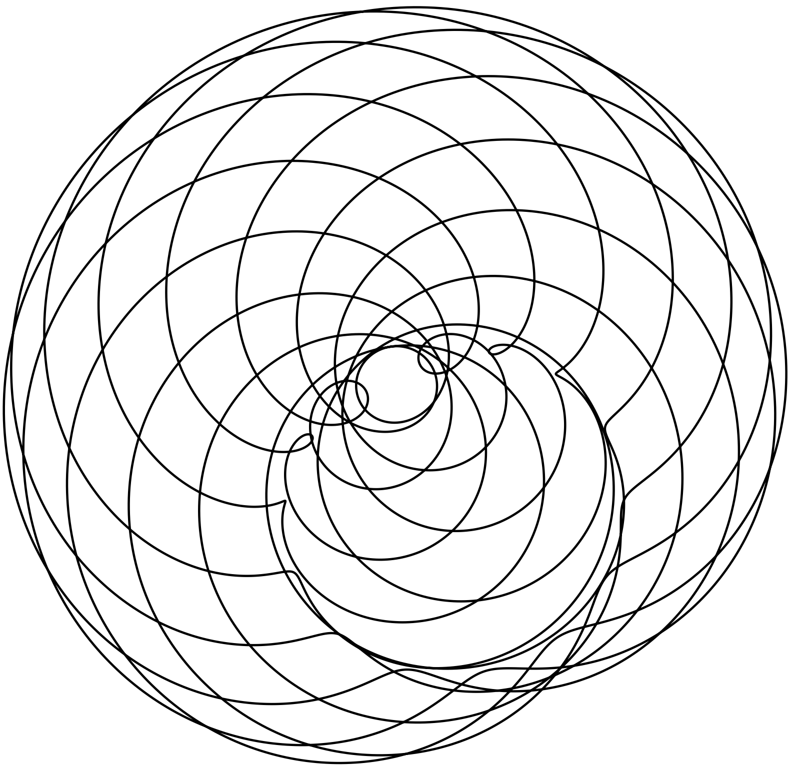
Soit D' le symétrique de D par rapport à la droite (f) dans ce cas on a EP + PD = EP + PD'.

D'autre part, d'après l'inégalité triangulaire on a EP + PD $\geqslant$ EP + PD', d'où EP + PD' est la distance minimale ; donc le lieu du puits est l'intersection de la droite (f) et de la droite (ED').

► **2e méthode : théorème de Thalès ou triangles semblables**

Les deux triangles EFP et PD'G.

$\frac{\mathrm{EP}}{\mathrm{PD'}} = \frac{11-\mathrm{PG}}{\mathrm{PG}} = \frac{13}{5}$ d'où $5(11-\mathrm{PG}) = 13\mathrm{PG} \Leftrightarrow 18\mathrm{PG} = 55 \Leftrightarrow \mathrm{PG} = \frac{55}{18}u$.



$$\begin{cases} x(t) &= -100\cos(-8t+142) - 100\cos(-15t+45) + 52\cos(-30t) \\ y(t) &= -100\sin(-8t+142) - 100\sin(-15t+45) + 52\sin(-30t) \end{cases}$$