Association Science Ouverte - Seine-Saint-Denis

Présentation

L'Association Science Ouverte est née d'un travail de terrain entrepris depuis le début des années 90 en Seine-Saint-Denis.

Objectif : ouvrir les jeunes aux sciences et les sciences aux jeunes, ainsi qu'aux citoyens de tous âges. Les violences de novembre 2005 ont amenée à préciser les buts de ce travail : lutter contre un sentiment d'enfermement et d'impuissance trop présent sur le territoire qui entretient le cercle vicieux d'une certaine ghettoïsation.

Les activités touchent aujourd'hui plus de 10 000 participants par an dont 2 500 sur des activités longues (50 000 heures d'activités individuelles). Les mathématiques y jouent un rôle central mais pas exclusif. Sous des formes très diverses, ces activités concourent à créer en Seine-Saint-Denis une structure visible et efficace, capable de susciter des vocations scientifiques et d'aider les jeunes qui s'y engagent. 95% des jeunes qui sont suivis plusieurs années par l'association poursuivent ensuite des études longues (bac +5), parfois même très brillantes.

Le stage Science Ouverte à Paris 13

Ce stage annuel a connu sa première édition en juin 2010. Il se déroule pour l'essentiel dans les locaux de l'Université Paris 13 à Bobigny. Il s'adresse à 35 élèves de fin de seconde de toute la Seine-Saint-Denis, au moment où les cours s'achèvent pour eux : la seconde quinzaine de juin. Indépendamment de son intérêt intrinsèque, il vise à créer un vivier d'élèves partageant leur passion lors des stages, et qui se retrouveront lors de diverses activités durant toute leur scolarité en lycée, voire dans le supérieur.

Il propose dans ce but des activités variées, préparées et encadrées par des chercheurs : des cours-TDs de mathématiques, des ateliers de recherche également en mathématiques, des conférences-débats, des visites, un speed-meeting sur les métiers scientifiques, un grand jeu, des activités sportives (importantes pour créer du lien dès le départ entre les participants), et une remise de diplôme par le président de l'Université Paris 13, suivie d'un buffet convivial… et apprécié !

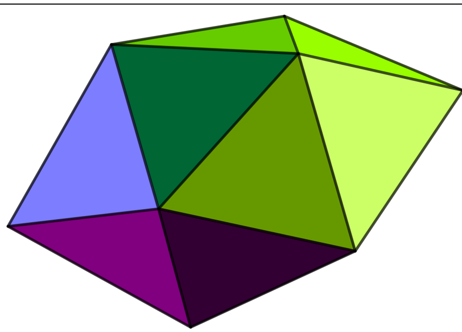
Selon les années, nous revoyons ensuite entre la moitié et les deux tiers de chaque promotion. Certains font plus de dix autres stages d'une semaine durant leur scolarité, avec parfois des résultats étonnants (entrée à l'X ou dans une ENS), et en tout cas des études longues. Parmi les bénévoles, une demi-douzaine a participé ou participe au Conseil d'Administration de l'association.

Contacts

@ contact@scienceouverte.fr
www.scienceouverte.fr

Nous présenterons ici un sujet proposé à la recherche de groupes lors d'un stage Science Ouverte à Paris 13.

Combien de faces pour les deltaèdres convexes ?



Un deltaèdre est un polyèdre dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux. Si vous essayez d'en construire avec les pièces de plastique assemblables type « Polydron » fournies, vous constaterez vite que le nombre de faces n'est pas quelconque : certains nombres n'apparaissent pas. Vous constaterez également que pour un même nombre de faces, le nombre de figures possibles augmente très vite… à condition d'accepter des formes non convexes (haricots, étoiles…). Mais si l'on exige la convexité, on finit par bloquer. Pourquoi ?
Et, finalement, quels sont tous les deltaèdres convexes possibles ?

Commentaire

Il ne s'agit pas ici d'un sujet non résolu. Cependant il autorise une vraie recherche de la part des élèves, avec des découvertes empiriques qu'il convient ensuite de justifier. Nous avons eu l'occasion de l'expérimenter aussi dans le cadre d'un atelier MATh.en.JEANS à l'année et de faire travailler dessus des collégiens. Il est bon que les élèves connaissent, par des activités antérieures, la formule d'Euler pour les polyèdres « sans trou »; sinon, il faudra leur faire découvrir; mais leur en faire trouver une démonstration correcte constituerait une nouvelle activité.

Rappelons cette formule : pour un polyèdre de genre 0, c'est-à-dire déformable continûment en une sphère, elle lie le nombre de sommets (s), de faces (f) et d'arêtes (a) :

$$s - a + f = 2$$

Éléments constatés

Souvent, les élèves commencent par assembler des deltaèdres avec un grand nombre de faces et ont d'ailleurs du mal à compter ces dernières, sans parler des arêtes ou des sommets. Un défaut assez courant dans le montage des polyèdres est d'assembler les pièces à plat, ce qui élimine toute courbure, une notion qui n'est pas du tout intuitive pour eux.

Néanmoins, au bout de peu de temps, ils constatent que le nombre de faces d'un deltaèdre est toujours pair. Reste à savoir pourquoi. Le raisonnement est compréhensible dès le collège : chaque face possède trois côtés, et pour faire une arête il faut deux côtés. Le nombre de côtés est donc nécessairement pair, ce qui ne serait pas le cas si le nombre de faces était impair car le produit de ce nombre par 3 serait impair. Tour cela se prêtera à un travail de rédaction et de présentation intéressant en vue de la restitution du travail.

En comptant sommets, arêtes et faces, les élèves constatent que si deux deltaèdres ont le même nombre de faces, alors ils ont le même nombre d'arêtes et le même nombre de sommets. De plus, les sommets augmentent de 1 en 1, les faces de 2 en 2 et les arêtes de 3 en 3.

Appelons s, a et f les nombres de sommets, d'arêtes et de faces.

On a selon la formule d'Euler : $s - a + f = 2$ (E).

Mais on vient de le voir, chaque face a 3 côtés et il faut deux côtés pour faire une arête.

Donc $a = \frac{3\times f}{2}$; le nombre d'arêtes est bien déterminé par le nombre de faces, et une augmentation de 2 du nombre de faces engendre une augmentation de 3 du nombre d'arêtes.

En reportant dans l'équation (E), il vient :

$$s - \frac{3 \times f}{2} + f = 2$$

d'où
$$s = 2 + \frac{f}{2}.$$

Et l'on voit cette fois que le nombre de sommets augmente de 1 à chaque tour !

Une figure non plane possède nécessairement au moins quatre points. Donc le deltaèdre avec le plus petit nombre de sommets (et donc de faces) est le tétraèdre. Et l'on en déduit toutes les autres possibilités en termes de valeurs pour s, a et f.

Le bricolage permet alors de dénombrer les deltaèdres : un seul à 4 faces, un seul à 6 faces, deux à 8 faces, cinq à 10 faces ; mais l'un de ces derniers a, en fait, des faces coplanaires formant trois losanges, on ne peut vraiment parler de deltaèdre dans ce cas.

Montrer que ces deltaèdres existent bien n'a rien de facile ; on peut signaler la question et en faire comprendre la pertinence : les pièces en plastique pourraient être trompeuses. Nous n'avons pas testé avec les élèves un travail sur ce sujet, sauf sur des cas très particuliers.

De la même façon, montrer qu'il en existe une infinité peut sembler évident, mais pas si simple à justifier vraiment. On peut cependant penser à empiler des octaèdres réguliers (qui ont des faces parallèles) deux à deux en supprimant la face d'adjacence. On obtient ainsi un deltaèdre avec un nombre de faces aussi grand qu'on veut.

Problème de convexité

On supposera que la convexité d'un polyèdre a bien été définie : si deux points sont situés à l'intérieur ou sur sa surface, alors c'est le cas également de tous les points du segment qui les joint.

On constate qu'il n'existe que huit deltaèdres convexes, avec des nombres de faces égaux à 4 ; 6 ; 8 ; 10 ;12 ; 14 ; 16 et 20. C'est une constatation expérimentale. Les trouver et les construire tous va prendre une petite demi-heure à un groupe d'élèves.

Les huit deltaèdres convexes, réalisés avec des triangles de terre cuite.

Plusieurs questions se posent : pourquoi s'arrête-t-on à 20, et pourquoi 18 est-il absent de la liste ? Et d'ailleurs l'est-il ? Pourquoi n'y a-t-il qu'un seul deltaèdre pour chaque valeur permise ?

La première de ces questions est liée à la notion de courbure. Il est aisé de faire constater, là encore de façon tout à fait expérimentale, que si l'on assemble en un sommet plus de cinq triangles équilatéraux, il est impossible d'obtenir une « pointe ». On obtient soit quelque chose de plat, pour six triangles (se déformant si l'on veut avec creux et bosses mais pas en forme de pointe), soit au-delà quelque chose qui rappelle vaguement une chips ou une selle de cheval.

Il s'agit là d'une propriété tout à fait générale : prenons deux dessous de tarte circulaire. On retranche un secteur circulaire à l'un, on recolle pour obtenir un « chapeau chinois », autrement dit un cône, impossible à aplatir sans le déchirer. Mais si on ajoute au second dessous de tarte la pièce retirée au premier, en l'insérant dans un rayon alors on obtient une forme de chips, impossible à aplatir sans faire de plis.


À gauche une chapeau chinois et à droite une chips.

Le chapeau chinois a une courbure positive concentrée en son sommet, la chips a une courbure négative concentrée au même point. À condition de ne pas contenir le sommet, un morceau de la forme réalisée peut être mise à plat sans le déchirer ni le plier. Par exemple en s'appuyant localement sur une surface plane (un coin de table...). La courbure est partout nulle, sauf au sommet.

Expliquer comment la convexité, définie comme plus haut, est liée à la forme « en pointe » (courbure positive) et non « en chips » (courbure négative) des sommets nous entrainerait trop loin du sujet, et ce n'est pas une question que se posent spontanément les élèves.

Par contre, cela permet d'expliquer pourquoi le nombre de faces des deltaèdres convexes se limite à 20.

Appelons degré le nombre de faces (ou d'arêtes) autour d'un sommet. On vient de voir que tous les degrés des sommets d'un deltaèdre convexe doivent être inférieurs ou égaux à cinq.

Pour f faces, nous avons $2 + \frac{f}{2}$ sommets. Mais avec f faces nous avons

$3f$ sommets de triangles que nous assemblons au plus par 5, donc au moins $3 \times \frac{f}{5}$ sommets.

Ce qui nous donne
$$\frac{f}{2} + 2 \geqslant 3 \times \frac{f}{5}$$
et en résolvant cette inéquation,
$$f \leqslant 20.$$

Par conséquent un deltaèdre convexe ne peut avoir plus de 20 faces.

Pour 20 faces, bien sûr, tous les sommets sont de degré 5, il y en a 12, et 30 arêtes. C'est l'icosaèdre, l'un des cinq polyèdres réguliers qu'on peut construire aisément avec les pièces de plastique et dont l'existence se démontre de plusieurs façons.

Qu'en est-il des autres deltaèdres convexes ?

Montrons simplement qu'il ne peut pas exister de deltaèdre convexe possédant 18 faces.

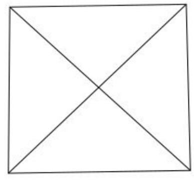
Pour 18 faces, la formule d'Euler ne nous laisse pas le choix et il y a 11 sommets et 27 arêtes.

La somme des 11 degrés est égales à deux fois le nombre d'arêtes, et aussi à trois fois le nombre de faces : c'est 54.

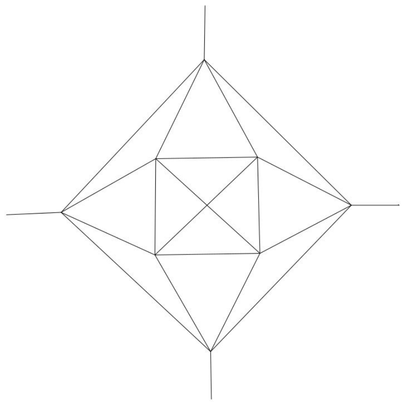
Tous les degrés doivent être compris, au sens large, entre 3 et 5. Pour faire une somme égale à 54, il nous faut donc 10 sommets de degré 5 et un de degré 4. Le fait que cette possibilité soit unique va nous simplifier la vie.

Nous allons schématiser la construction de ce deltaèdre à l'aide d'un graphique plan respectant strictement la disposition des faces, arêtes et sommets, les uns par rapport aux autres. Les constructions effectives correspondant aux deux étapes évoquées sont présentées également en photo ci-après.

On commence par assembler le sommet de degré 4 : 4 faces triangulaires ayant un sommet commun. Les quatre autres sommets sont pour l'instant incomplets (2 faces et 3 arêtes chacun).



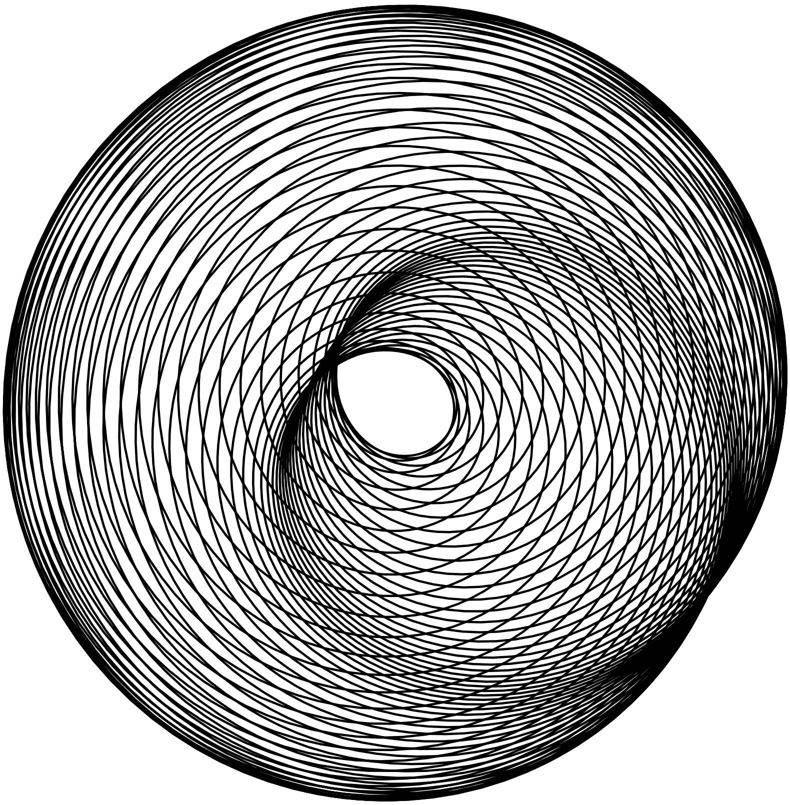
Tous les sommets doivent maintenant être de degré 5. Il manque 2 arêtes et trois faces sur chacun des quatre sommets précédents. On les ajoute, ce qui donne la figure suivante sur laquelle on a aussi porté la cinquième arête des quatre sommets incomplets.



Il nous manque deux sommets, six faces et trois arêtes. Cependant, les faces étant triangulaires, nous n'avons pas d'autre possibilité que de faire se joindre les quatre arêtes ayant une extrémité libre. Ce qui clôt notre tétraèdre avec 16 faces et deux sommets de degré 4 (il s'agit du deltaèdre convexe de 16 faces).

Il n'est donc pas possible de construire un deltaèdre convexe de 18 faces.

Des raisonnements du même type permettraient sans doute de montrer l'unicité des deltaèdres convexes pour les autres valeurs de f. Mais le nombre de graphes à examiner devient vite bien plus grand parce que le nombre de sommes possibles pour obtenir la bonne somme de degrés est plus élevé.



$$\begin{cases} x(t) &= -68\cos(47t+107)+100\cos(70t+147)+21\cos(94t+180) \\ y(t) &= -68\sin(47t+107)+100\sin(70t+147)+21\sin(94t+180) \end{cases}$$