Rallye Mathématique Transalpin

Présentation

L'Association du Rallye Mathématique Transalpin (ARMT) existe depuis 1996 et organise depuis lors chaque année les épreuves du rallye éponyme « Rallye Mathématique Transalpin » (RMT). Créé au départ par les animateurs historiques François Jaquet et Lucia Grugnetti, avec des sections issues de deux pays : Suisse et Italie, (d'où son appellation. . .), vite rejoints en 1997 par une section en France. L'ARMT regroupe maintenant 20 sections de 5 pays (une en Belgique, une au Luxembourg, 3 en France, une en Suisse romande, 14 en Italie). Au total, lors de l'édition 2017 du RMT, ce sont 6193 classes, soit plus de 120000 élèves, qui ont participé aux épreuves.

Ce que propose le RMT

Le Rallye mathématique transalpin (RMT) propose une confrontation entre classes, des niveaux 3 (CE2) à 10 (seconde) de la scolarité obligatoire (élèves de 8 à 15 ans) en deux épreuves de janvier à mars plus une finale en mai ou juin, regroupant les classes d'une même région ayant obtenu les meilleurs scores dans les deux épreuves. Ces épreuves consistent en une résolution de problèmes ouverts communs à toutes les classes, lesquelles doivent donner une seule réponse par problème. Chaque épreuve est composée de 5 à 7 problèmes par niveau, à résoudre en 50 minutes. Les problèmes sont choisis, en nombre et en difficulté, de telle sorte que chaque élève puisse y trouver son compte et que l'ensemble de la tâche soit globalement trop lourd pour un seul élève, aussi rapide soit-il. Il n'y a pas que « réponse juste » qui compte, les copies sont jugées aussi sur la rigueur des démarches et la clarté des explications fournies.

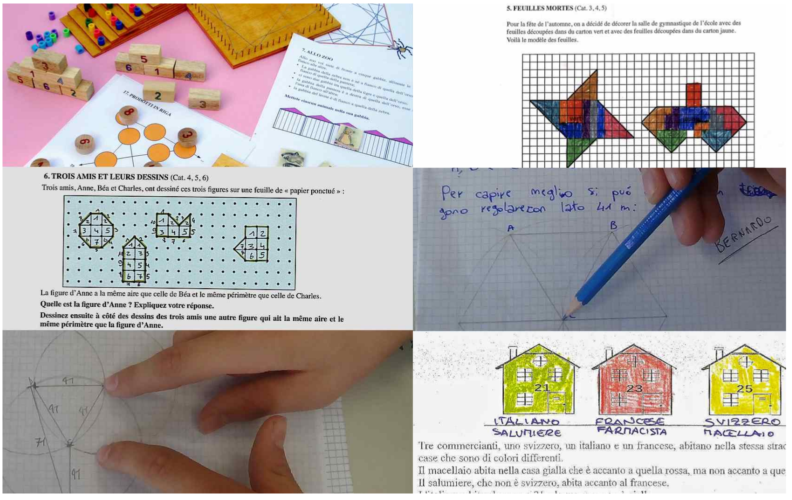
Les problèmes sont originaux et leur préparation se fait en coopération entre les différentes sections. Les traductions (en français, italien, allemand) sont rigoureusement comparées. La correction des copies est organisée localement avec l'aide de professeurs bénévoles, selon des critères déterminés lors de l'élaboration des problèmes, en fonction d'une analyse *a priori* sur la tâche demandée aux élèves. Des analyses *a posteriori* sont menées par des équipes de recherches en didactique.

La « philosophie » du RMT

Pour en savoir plus sur les objectifs du RMT concernant l'enseignement des mathématiques en général et la recherche en didactique plus particulièrement, on peut se reporter directement au site international de l'association [1] ; de même sur les conceptions qui sous-tendent « l'entreprise collaborative RMT » [2].

Sur ce même site, sont également disponibles les actes des Rencontres Internationales de l'ARMT organisées chaque année depuis plus de 20 ans. En effet, ces journées d'études internationales permettent aux animateurs des différentes sections de se rencontrer pour organiser l'élaboration des problèmes, conduire des analyses *a priori* ou *a posteriori*, déterminer les orientations du RMT et les exploitations didactiques de ses problèmes. L'ARMT bénéficie d'un appui scientifique, plusieurs animateurs appartenant à des institutions de recherche en didactique des mathématiques dans leurs pays respectifs.

Les exemples de problèmes proposés ci-après sont tirés de la première épreuve du 23e RMT (2015). Ils sont issus de la Banque des Problèmes de l'ARMT, base de données collaborative comportant maintenant environ 1 200 fiches, accessibles en ligne par mots-clés, domaines, concepts… On peut voir sa présentation et télécharger des problèmes sur :
www.projet-ermitage.org/ARMT/doc/bp-rmt-acces-fr.html .



1. www.armtint.org/comite-de-gestion/association-rallye-mathematique-transalpin
2. www.armtint.org/presentation-du-rallye/conceptions-pedagogique-et-didactique

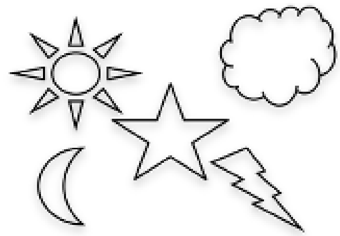
Les cadres (Rallye : 23.I.05 ; catégories : 3, 4, 5)

Résumé

Reconstituer un alignement de cinq objets selon des informations de voisinage et de positions relatives.

Énoncé

Clara a accroché cinq cadres l'un à côté de l'autre sur le mur au-dessus de son lit.
Dans l'un il y a un soleil, dans un autre un nuage, dans un autre une lune, dans un autre un éclair et dans un autre encore, une étoile.
Lorsqu'elle regarde les cinq cadres, Clara voit que :



- la lune n'est pas à côté de l'étoile ni à côté du nuage ;
- il y a deux cadres entre celui du soleil et celui de l'étoile ;
- le nuage est à côté de l'étoile, à droite ;
- l'éclair est à côté de la lune.

Dessinez les images dans les cadres dans le bon ordre (ou écrivez le nom des images dans leur cadre).
Expliquez comment vous avez trouvé leur position.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- Comprendre que les cinq figures données doivent être disposées dans les cinq cadres en respectant une liste de contraintes.
- Lire les contraintes et se rendre compte qu'aucune d'entre elles, seule, ne permet de trouver la position d'une figure et qu'il sera nécessaire de tenir compte de plusieurs d'entre elles simultanément.
- Organiser la recherche, par essais et vérifications ou par hypothèses

et éliminations successives.

— Par exemple, à partir de la deuxième consigne, il y a quatre configurations possibles du soleil et de l'étoile : (soleil, ..., ..., étoile, ...) ou (étoile, ..., ..., soleil, ...) ou (..., soleil, ..., ..., étoile) ou (..., étoile, ..., ..., soleil).

— La troisième consigne selon laquelle le nuage est à droite de l'étoile réduit les configurations possibles à trois : (soleil, ..., ..., étoile, nuage) ou (étoile, nuage , ..., soleil, ...) ou (..., étoile, nuage, ..., soleil).

— La première consigne sur la position de la lune exclut une autre configuration, il n'en reste que deux : (soleil, ... , ... , étoile, nuage) ou (étoile, nuage , ... , soleil, ...).

— La quatrième consigne sur l'éclair et la lune conduit à l'unique possibilité : (soleil, lune, éclair, étoile, nuage).

Mots-clés

Logique, voisinage, gauche, droite, position, positions relatives, déduction, hypothèse.

Résultats

Points attribués	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**Nb. de classes**	**Moy.**
Cat. 3	109 (23%)	28 (6%)	84 (18%)	145 (31%)	106 (22%)	472	2.24
Cat. 4	71 (12%)	18 (3%)	121 (20%)	206 (34%)	185 (31%)	601	2.69
Cat. 5	37 (6%)	4 (1%)	121 (21%)	234 (41%)	178 (31%)	574	2.89
Total	217 (13%)	50 (3%)	326 (20%)	585 (36%)	469 (28%)	1 647	2.63

Selon les critères déterminés lors de l'analyse *a priori* :

— 4 points : la solution correcte (soleil, lune, éclair, étoile, nuage) avec une explication dans laquelle figurent au moins deux relations logiques du genre « l'étoile ne peut pas être à gauche parce que ... », « puisqu'il y a deux cadres entre le soleil et l'étoile, ceux-ci ne peuvent pas être au milieu », OU en donnant l'ordre d'utilisation des indices OU solution correcte avec mise en évidence de la vérification des consignes.

— 3 points : la solution correcte (soleil, lune, éclair, étoile, nuage) avec des explications qui se limitent à des commentaires généraux du genre « on a essayé beaucoup de possibilités », « on a suivi les consignes »...
— 2 points : la solution « symétrique » (nuage, étoile, éclair, lune, soleil) due à la confusion gauche/droite OU dessin correct sans explications.
— 1 point : réponse avec une interversion de deux cadres.
— 0 point : incompréhension du problème.

Le problème est « bien réussi » par près des deux tiers des groupes.

Procédures, obstacles et erreurs relevés

Dans cette variante d'un ancien problème **À la ménagerie** [3], la consigne *le nuage est à côté de l'étoile, à droite*, a sensiblement facilité la tâche de résolution. La consigne d'origine correspondrait à *le nuage est à droite de l'étoile, ils sont l'un à côté de l'autre*.

En interprétant la nouvelle consigne *comme le nuage est à droite*, la solution est immédiate : le nuage à droite, puis l'étoile, deux cadres et le soleil à gauche, etc.

Pour aller plus loin

La seule réponse correcte, c'est-à-dire la position des animaux dans leur cage ou un dessin ou une liste ordonnée, ne permet évidemment pas de savoir comment l'élève a procédé, ni s'il a trouvé la solution au hasard. Il est donc nécessaire d'aller plus loin et de demander une explication. Pour de jeunes élèves, il est très difficile d'expliquer par écrit ce qu'ils ont fait pour trouver. Ils se contentent en général de recopier les consignes, ce qui leur fournit une vérification. C'est lors d'un débat que peuvent apparaître les différentes phases des raisonnements suivis. Et le débat doit être la plupart du temps stimulé par des questions de l'enseignant, du genre : « Quel est l'animal que vous avez pu placer en premier ? », « Pourquoi celui-ci ne pourrait-il pas être là ? », « Êtes-vous certains qu'il n'y a qu'une seule solution ? », etc.

Comme développements, il existe de nombreux problèmes analogues, de disposition, de sériations dans l'espace et dans le temps qui permettent aux élèves de se familiariser avec les inventaires exhaustifs et les éliminations successives.

Ces problèmes ne sont toutefois pas toujours faciles à créer et nécessitent un patient travail d'analyse préalable pour le choix des contraintes, afin qu'elles autorisent au moins une solution et qu'elles ne soient pas redondantes (qu'elles soient toutes nécessaires).

3. www.projet-ermitage.org/ARMT/result-fiche2.php?fiche=td39-fr&flag=0&lang-req=fr

Il y a aussi des difficultés, dans les problèmes où la gauche et la droite interviennent, liées aux positions relatives de l'enfant qui résout le problème et des objets ou êtres vivants à disposer. Dans l'exemple de **À la ménagerie** la phrase « Vous êtes devant cinq cages, alignées les unes à côté des autres » est essentielle pour définir la droite et la gauche, du point de vue de l'observateur et non de celui des animaux qui le regardent.

Le ruban (Rallyes : 23.I.08 ; catégories : 5, 6)

Résumé

Décomposer 140 en une somme de quatre termes dont deux sont égaux, un troisième vaut 15 de plus que les premiers et le quatrième 10 de plus que le troisième.

Énoncé

Anne-Lise coupe un ruban de 140 cm de longueur en quatres parties pour emballer des cadeaux.

— Les première et deuxième parties sont de même longueur.

— La troisième partie mesure 15 cm de plus que la deuxième.

— La quatrième partie mesure 10 cm de plus que la troisième.

Quelle est la longueur de chaque partie du ruban découpé ?
Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

— Trier les informations de l'énoncé et retenir celles qui seront utiles pour répondre à la question : les relations entre les quatre parties et la longueur totale.

— Se rendre compte qu'il s'agit de compléter une addition dont seule la somme est connue (140), dont les quatre termes ne sont pas encore déterminés mais dont on connaît des relations entre certains d'entre eux.

En travaillant par essais, les vérifications conduisent rapidement à une organisation et à la découverte de la solution : choix d'une valeur pour les deux petits, addition de 10 et de 15 pour les suivants, calcul de la somme et comparaison avec 140.

En tenant compte des augmentations de 15 et 25 (ou 15 et 15 + 10 ou 40), une méthode déductive permet de déterminer les nombres : par soustraction de 40 à partir de 140, la somme des quatre petits nombres est 100 puis, chacun d'eux est 25 ; et on détermine ainsi les quatre longueurs : 25, 25, 40 et 50, en cm.

Mots-clés

Nombres naturels, addition, somme, double, décomposition.

Résultats

Points attribués, sur 1 621 classes de 21 sections :

Points attribués	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**Nb. classes**	**Moy.**
Cat. 5	110 (19%)	56 (10%)	92 (16%)	166 (29%)	150 (26%)	574	2.33
Cat. 6	201 (19%)	144 (14%)	129 (12%)	226 (22%)	347 (33%)	1 047	2.36
Total	311 (19%)	200 (12%)	221 (14%)	392 (24%)	497 (31%)	1 621	2.35

Selon les critères déterminés lors de l'analyse *a priori* :

— 4 points : réponse correcte et complète (25 cm, 25 cm, 40 cm, 50 cm) avec explications précises et complètes mentionnant explicitement toutes les données.

— 3 points : réponse correcte et complète mais avec explications peu claires ou insuffisamment explicites, ou seulement une vérification.

— 2 points : réponse correcte sans explications OU une seule erreur de calcul, avec explications et procédure cohérente.

— 1 point : début de recherche mais compréhension erronée des conditions (par exemple attribution de 15 de plus à la troisième partie et 10 de plus que les premières pour la quatrième, ce qui conduirait à 28,75 ; 28,75 ; 43,75 ; 38,75).

— 0 point : incompréhension du problème.

Procédures, obstacles et erreurs relevés

Parmi les réponses correctes (environ les deux tiers, auxquelles ont été attribués de 2 à 4 points) la grande majorité fait état d'une procédure par essais, en général deux ou trois. Parfois les élèves n'ont écrit qu'une vérification à partir de 25 pour les deux petits nombres.

La démarche déductive consistant à retirer les augmentations de 15 et 25 de la longueur totale puis à diviser par 4 apparaît très rarement (dans deux copies sur les 100 examinées, de la section de Suisse romande). La division de 140 par 4, qui donne 35 est plus fréquente (10% des copies). Deux cas se présentent alors.

Dans le premier, les élèves soustraient 10 de 35 et obtiennent 25 et constatent que « ça marche » ; ils semblent s'être rendu compte que le « 35 » est une « moyenne » et qu'il faut retrancher quelque chose pour déterminer la longueur des petites parties.

Dans le second, 35 est pris comme longueur des petites parties, les autres sont augmentées de 10 puis de 15, la somme donne 180, qui vaut 40 de plus que 180 et, après une division par 4 de l'excès de 40, les quatre parties sont réduites de 10.

Parmi les erreurs (environ 30 % des copies) la plus fréquente est d'additionner les deux augmentations de 10 et de 15, sans se rendre compte qu'il faudrait additionner 10 et $(10+15)$ et de retrancher cette somme de 140, pour obtenir 115. Le résultat est ensuite divisé par 2 et la réponse est (57,5 ; 57,5 ; 10 et 15) dont la somme est effectivement 140.

On relève de nombreux dessins du ruban ou de segments juxtaposés, qui ne peuvent constituer des soutiens à la démarche de résolution.

Pour aller plus loin

L'exploitation de ce problème en classe devrait conduire à une réflexion collective sur les deux types de procédures : les essais ou la démarche déductive.

Pour cette version du problème, les essais conduisent très facilement à la solution. 25, étant le quart de 100, est une première approximation très plausible puisque les quatre bandes de 25 donnent déjà 100 et qu'on s'approcha ainsi de 140 avec les augmentations. Ces essais sont donc une démarche plus facile et économique que la démarche déductive. Si on veut favoriser cette dernière, il faut agir sur la variable « longueur du ruban » en choisissant un nombre moins évident, conduisant par exemple à des nombres décimaux pour les longueurs des parties.

Si on choisit les mêmes augmentations et 250 cm pour la longueur du ruban…

Grille de nombres (Rallye : 23.I.13 ; catégories : 6, 7, 8, 9, 10)

Résumé

Découvrir les régularités d'une grille de nombres à partir d'un fragment qui en représente les cinq premières lignes et les 11 premières colonnes, se rendre compte éventuellement qu'il s'agit de la table de multiplication et compléter quatre autres fragments rectangulaires (photos) de six à douze cases.

Énoncé

En explorant un château abandonné, Zoé et ses amis ont trouvé le dessin d'une grille occupant entièrement un mur d'un ancien cachot.
L'humidité et les années ont effacé une grande partie des nombres écrits dans les cases de cette grille, mais ceux qui restent montrent que le prisonnier qui a dessiné la grille suivait des règles bien précises pour passer d'un nombre au suivant, dans chaque ligne et dans chaque colonne.
Zoé a pris deux photos des parties A et B du mur comme sur cette figure :

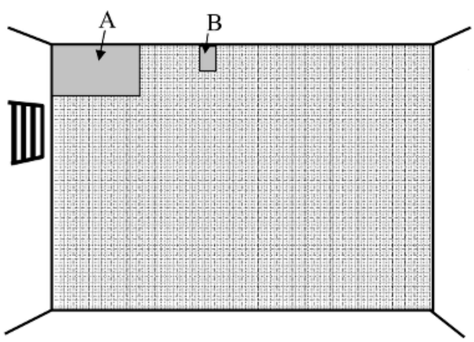


Photo A : le haut du mur à gauche, les cinq premières lignes et les onze premières colonnes

1	2	3			6				10	11
			8	10	12				20	22
3	6	9	12					27	30	33
		12	16	20			32	36	40	
	10			25	30	35	40			55

Photo B : 6 cases, avec 111 sur la 3^{e} ligne

	111

Puis elle a encore pris trois autres photos, d'autres parties du mur :

Photo C

187	198
204	

Photo D

209				285

Photo E

110			
			192

Écrivez les nombres qui manquent dans les quatre photos B, C, D et E.
Expliquez comment vous avez fait pour les trouver.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- Constater d'après la photo A, incomplète, que chaque ligne et chaque colonne de la grille de nombres est constituée d'une suite « très régulière » de nombres.
- Compléter les cases vides par écrit (ou mentalement) pour mieux percevoir les régularités des suites et les liens entre cases, lignes et colonnes : reconnaître des suites de multiples, des « livrets », des progressions arithmétiques, leur ordre… pour éventuellement y reconnaître la table de multiplication et que chaque case contient le produit de deux nombres qui sont les numéros de sa ligne et de sa colonne.
- Aborder ensuite chaque photo incomplète en fonction des propriétés reconnues lors de l'examen de la photo A :
  - Pour la photo B, l'indication que 111 se situe sur la troisième ligne signifie qu'il s'agit du troisième multiple de la 37^{e} colonne ($3 \times ? = 111$ ou $111 \div 3 = 37$) et que la colonne précédente est celle des multiples de 36.
  - Pour la photo C, $198 - 187 = 11$ et $204 - 187 = 17$, déterminent la 11^{e} ligne et la 17e colonne.
  - Pour la photo D, 209 et 285 sont des multiples d'un même nombre, leur différence $285 - 209 = 76$ vaut quatre fois ce nombre : 19 ($76 \div 4$). Les deux nombres se situent donc sur la 19^{e} ligne.

    $209 = 19 \times 11$ se situe dans la 11^{e} colonne, $285 = 19 \times 15$ se situe dans la 15^{e} colonne.
  - Pour la photo E, on peut par exemple considérer les diviseurs de 110 (1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 11 ; 22 ; 55 ; 110) et savoir que ce nombre peut se trouver dans les lignes ou colonnes 1 et 110, 2 et 55, 5 et 22 ou 10 et 11, puis après quelques essais trouver 5 pour la

colonne et 22 pour la ligne qui correspondent à la colonne 8 et à la ligne 24 pour 192.

Il y a évidemment d'autres manières de trouver les nombres manquants de chaque tableau, en cherchant les diviseurs des nombres connus, en prolongeant les progressions arithmétiques case par case, par hypothèses et vérifications… en mobilisant les savoirs liés aux multiples, diviseurs, addition et soustraction en liaison avec la multiplication. Remplir ensuite les quatre tableaux :

36	37
72	74
108	111

B

187	198
204	216
221	234

C

198	216	234	252	270
209	228	247	266	286

D

110	132	154	176
116	138	161	184
120	144	168	192

E

Note : Il y a ici une très légère entorse à la rigueur mathématique car on pourrait théoriquement trouver d'autres fonctions que celles de la table de multiplication, correspondant aux nombres donnés dans la grille, mais très difficiles à définir.

Mots-clés

Nombres naturels, addition, progression arithmétique, raison, multiplication, multiple, diviseur, table de multiplication, ligne, colonne, produit.

Résultats

Points attribués, sur 2 918 classes de 21 sections : 23.I.13

Points attribués	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**Nb. classes**	**Moy.**
Cat. 6	679 (65%)	194 (19%)	106 (10%)	45 (4%)	23 (2%)	1 047	0.6
Cat. 7	405 (44%)	171 (18%)	139 (15%)	128 (14%)	82 (9%)	925	1.26
Cat. 8	163 (25%)	106 (16%)	128 (20%)	126 (20%)	120 (19%)	643	1.9
Cat. 9	27 (17%)	8 (6%)	33 (21%)	33 (21%)	57 (36%)	159	2.53
Cat. 10	20 (14%)	9 (6%)	23 (16%)	22 (15%)	70 (49%)	144	2.78
Total	1294 (44%)	489 (17%)	429 (15%)	354 (12%)	352 (12%)	2 918	1.31

Selon les critères déterminés lors de l'analyse *a priori* :

— 4 points : les quatre photos complétées correctement, avec quelques explications (reconnaître la « table de multiplication », suites de multiples, essais et erreurs pour la photo E...), on admet une seule erreur de calcul ou inattention par photo.

— 3 points : les quatre photos complétées correctement, sans aucune explication (on admet une seule erreur de calcul ou inattention par photo) OU trois photos complétées correctement avec quelques explications.

— 2 points : trois photos complétées correctement, sans aucune explication (on admet une seule erreur de calcul ou inattention par photo) OU deux photos complétées correctement avec quelques explications.

— 1 point : une seule photo complétée correctement.

— 0 point : incompréhension du problème.

Le tableau ci-dessus fait état de très grandes difficultés en catégorie 6 avec deux tiers d'« incompréhension du problème » et d'une progression très sensible en catégories 7 et 8 pour arriver aux quatre photos complétées correctement par plus de la moitié des groupes des catégories 8 et 9.

Procédures, obstacles et erreurs relevés

Un problème comme « Grille de nombres », nécessite un examen détaillé des réponses et une analyse des résultats photo par photo pour pouvoir comprendre les obstacles que les élèves ont rencontrés.

Pour aller plus loin

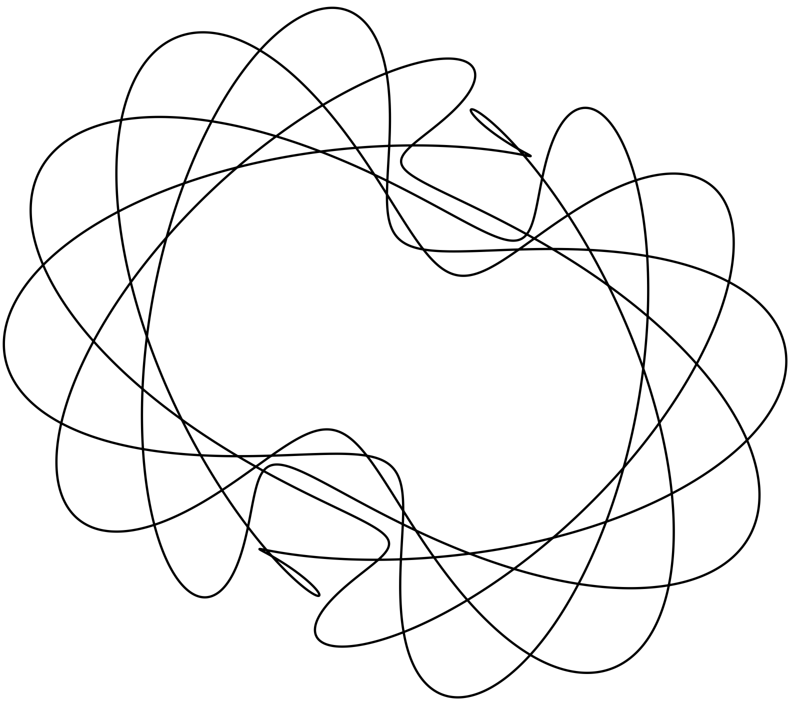
Les différents types d'obstacles que les élèves rencontrent dans la perception de la table de multiplication ont plusieurs origines.

Institutionnellement et socialement, la table de multiplication est une référence, liée à une tradition de valorisation des connaissances mémorisées, au même titre que l'étaient les exceptions grammaticales, la récitation des capitales de pays... Pouvoir donner immédiatement la réponse à la question « Combien font sept fois huit ? » a été longtemps (et l'est encore) considéré comme être bon en mathématiques. L'enfant le sait car il reçoit de sa famille et de ses proches des jugements à propos de ce type de compétence.

L'école a aussi longtemps insisté sur la mémorisation des « livrets » en y consacrant un temps important de l'apprentissage des mathématiques. Cet objectif est toujours dans les programmes scolaires, reculé progressivement des toutes premières années d'école primaire pour l'échelonner de la troisième à la cinquième année.

D'un point de vue notionnel, « les livrets » n'étaient ni des suites de couples de nombres, ni des suites d'égalités, mais seulement la récitation orale et scandée de groupes de cinq mots : deux fois un (font) deux ; deux fois deux (font) quatre ; deux fois trois (font) six ; ... Les deux premiers mots de chaque groupe étant le numéro du livret et le « fois », le troisième variant dans l'ordre de un à neuf (ou dix, douze, selon les époques et les pays).

Les réformes de l'enseignement des mathématiques de ces dernières années ont évidemment fait évoluer les « livrets » traditionnels et la manière de les présenter. On parle de « table » mais tout en la liant à un nombre « la table du 2 », on insiste moins sur la récitation orale et on utilise souvent les suites d'égalités, mais toujours avec un des facteurs constant et l'autre variant dans l'ordre, le travail de mémorisation prend des allures plus ludiques.



$$\begin{cases} x(t) &= 15\cos(15t+15)+14\cos(-11t+61)-46\cos(5t+33) \\ y(t) &= 15\sin(15t+15)+14\sin(-11t+61)-46\sin(5t+33) \end{cases}$$