Rallye Mathématique d'Auvergne

Présentation

Le Rallye s'adresse aux classes de 3^{e} et de 2^{nde} générale et technologique d'Auvergne. Ce concours concerne des classes entières ou des classes mixtes 3^{e}-2^{nde} dans le cadre d'une liaison collège/lycée. En 2018, 72 classes se sont inscrites pour environ 2 000 élèves.

Chaque classe a deux heures pour résoudre 6 à 8 exercices faisant appel à la logique, au raisonnement, à la géométrie et à l'informatique.

Pour chaque exercice, le jury évalue : l'exactitude de la réponse, l'argumentation ou le document informatique (programme, feuille de calcul, fichier LGD) et enfin la présentation.

La meilleure classe de chaque niveau dans chacun des quatre départements de l'académie est sélectionnée pour la finale.

En complément des épreuves lors de la qualification est organisé un concours d'affiche dont le thème correspond à celui de la semaine des mathématiques, le règlement étant fourni en décembre. L'affiche peut être l'œuvre d'une classe ou d'un élève. Une grande liberté est laissée aux participants et une collaboration avec le professeur d'Arts Plastiques peut être envisagée.

L'affiche lauréate sert de support pour l'édition du Rallye de l'année suivante.

Historique

Le premier Rallye a eu lieu en 1998. En 2017, un recueil de sujets a été publié sous le titre « 20 ans du Rallye Mathématique d'Auvergne ».

Déroulement

Les épreuves qualificatives ont lieu le mardi après-midi de la semaine des mathématiques (autour du 14 mars) dans les établissements des classes inscrites.

Les qualifications consistent à résoudre de 6 à 8 problèmes en deux heures par classe entière.

La finale se compose, en matinée, d'une course d'orientation sur le Complexe Scientifique des Cézeaux composée de 40 balises durant laquelle chaque groupe d'élèves doit trouver 8 balises et résoudre 8 énigmes (une par balise). Une conférence et des visites de laboratoires de recherche ont lieu l'après midi ainsi que la remise des prix suivie d'un moment convivial autour d'un goûter.

Partenaires

Inspection Pédagogique Régionale, IREM, APMEP, CNRS, Université Clermont Auvergne

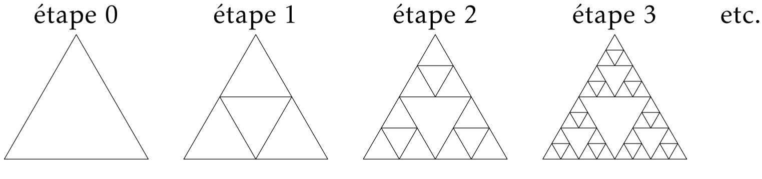
Contacts

✉ IREM
Campus Universitaire des Cézeaux
3 place Vasarely - TSA 60026 - CS 60026
63178 AUBIERE CEDEX
☎+33 (0)4 73 40 70 98
@ irem@univ-bpclermont.fr

Les portes du musée de Sir Pinski

Énoncé

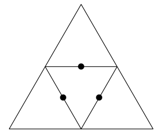
Un philanthrope anglais, Sir Pinsky, décide de construire un musée. Passionné de mathématiques, il décide d'établir le plan de l'édifice en n'utilisant que les notions de milieu et de triangle équilatéral. Plus précisément, à chaque étape de la construction, il prend les milieux des côtés des triangles « orientés vers le haut » afin de construire de nouveaux triangles, comme d'après les schémas ci-dessous :



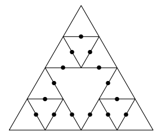
On s'intéresse au nombre de portes intérieures que comporte l'édifice. Les portes sont installées au milieu des murs de chaque pièce.

Une pièce doit ainsi pouvoir communiquer directement avec toutes les pièces voisines.

Par exemple, s'il s'arrêtait à la première étape, il y aurait 3 portes intérieures (voir schéma ci-contre) :



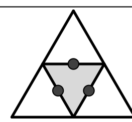
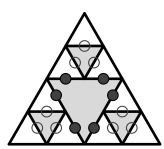
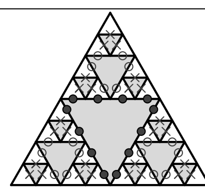
Mais s'il s'arrêtait à la deuxième étape, il y aurait 15 portes intérieures :



Combien de portes intérieures comportera l'édifice s'il s'arrête à la 7^{e} étape ?

Solution

On raisonne étape par étape (en utilisant des schémas pour les premières étapes).

étape		Type de triangles	Nombre de portes associées	Schéma
étape 1 :	1	grand triangle	3	
étape 2 :	1	grand triangle	6	
	3	triangles plus petits	3	
étape 3 :	1	grand triangle	12	
	3	triangles moyens	6	
	9	triangles plus petits	3	

On en déduit le mécanisme de création des pièces et des portes pour les cas plus complexes :

— il y a toujours trois fois plus de « nouveaux » triangles (plus petits) à chaque étape ;
— il y a toujours deux fois plus de portes à chaque étape pour chaque type de triangle (car on partage les murs en deux).

On peut terminer le tableau :

étape	Type de triangles		Nombre de portes associées
étape 4 :	1	grand triangle	24
	3	triangles plus petits	12
	9	triangles plus petits	6
	27	triangles plus petits	3
étape 5 :	1	grand triangle	48
	3	triangles plus petits	24
	9	triangles plus petits	12
	27	triangles plus petits	6
	81	triangles plus petits	3
étape 6 :	1	grand triangle	96
	3	triangles plus petits	48
	9	triangles plus petits	24
	27	triangles plus petits	12
	81	triangles plus petits	6
	243	triangles plus petits	3
étape 7 :	1	grand triangle	192
	3	triangles plus petits	96
	9	triangles plus petits	48
	27	triangles plus petits	24
	81	triangles plus petits	12
	243	triangles plus petits	6
	729	triangles plus petits	3

On en déduit le nombre de portes à la septième étape :
$192 \times 1 + 96 \times 3 + 48 \times 9 + 24 \times 27 + 12 \times 81 + 6 \times 243 + 3 \times 729 = \boxed{6\,177}$.

Analyse

Ce problème est une version un peu différente du fameux triangle de Sierpinski.

Comme souvent dans les problèmes de dénombrement, cet exercice niveau 3^{e}-2nde est facilement abordable et est source de résolutions variées. Beaucoup d'élèves ont d'ailleurs réussi à le résoudre et à trouver la solution attendue.

Les compétences mathématiques mises en jeu sont, entre autres : la modélisation, l'observation et la compréhension d'un schéma de récurrence et la production éventuelle d'un algorithme.

D'une manière générale, cet exercice a bien inspiré les élèves qui ont présenté beaucoup de procédures et de présentations différentes pour le résoudre : explication par des phrases, tableaux, schémas de triangle, un seul grand calcul en ligne, utilisation de formule, etc.

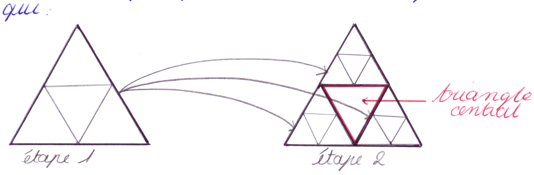
	A : étape	B : nombre de portes du triangle central	C : nombre de portes au total
1	1	3	3
2	2	$B1 \times 2 = 6$	$C1 \times 3 + B2 = 15$
3	3	$B2 \times 2 = 12$	$C2 \times 3 + B3 = 57$
4	4	$B3 \times 2 = 24$	$C3 \times 3 + B4 = 195$
5	5	$B4 \times 2 = 48$	$C4 \times 3 + B5 = 633$
6	6	$B5 \times 2 = 96$	$C5 \times 3 + B6 = 1995$
7	7	$B6 \times 2 = 192$	$C6 \times 3 + B7 = 6\,177$

Colonne B : On calcule le nombre de portes du triangle central à chaque étape en multipliant le nombre de portes de ce même triangle à l'étape précédente par 2 car on s'aperçoit que ce nombre double à chaque étape (3 à l'étape 1, 6 à l'étape 2 et 12 à l'étape 3)

Colonne C : On ajoute au nombre trouvé à la colonne B, le nombre total de portes trouvé à l'étape précédente multiplié par 3 car 3 portes apparaissent là où il y en avait une seule précédament.

La case C7 nous donne le résultat de l'étape 7 qui est 6 177.

D'après les trois étapes schématisées sur le sujet, nous pouvons observer que chaque configuration (correspondant à une étape) se retrouve dans l'étape suivante trois fois à l'identique plus un autre triangle central, tel que :



• $(((((15\times 3+3\times 4)\times 3+8\times 3)\times 3+16\times 3)\times 3+32\times 3)\times 3+64\times 3)$

$= \boxed{6177 \text{ portes}}$

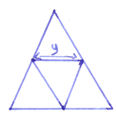
Après avoir compté les portes « à la main » (sans forcément aboutir au résultat), beaucoup ont essayé d'écrire une équation, une formule générale ou une expression littérale pour généraliser la procédure.

Formule : $(a+b)\times 3$

a = nombre de portes d'un triangle
b = nombre de porte pour aller à l'exterieur sur une face du grand triangle (soit on part de 2 puis on double pour l'étape suivante).
×3 = Parce qu'un triangle à 3 faces.

Nous avons utilisé la formule jusqu'à la 7ème étape et nous avons trouvé $\boxed{6177}$ portes.

On appelle x l'étape que l'on réalise
On appelle (x − 1) l'étape précédente.
On appelle y la moitié d'un coté du triangle précedent.



$x = (x-1)\times 3 + y\times 3$

Pour chaque étape on prend le nombre de portes de l'étape précédente et on le multiplie par 3 car dans un triangle, il y a 3 triangles précédents plus le nombre de porte du triangle central multiplié par 2.

D'où $\begin{cases} 2\times 3+3 = x \\ x\times 3+3\times 2 = y \\ y\times 3+3\times 2^2 \end{cases}$

Donc 1er étape : $0\times 3+3 = 3$
2ème " $= 3\times 3+3\times 2 = 15$
3ème " $= 15\times 3+3\times 2^2 = 57$

Certains ont également vu la possibilité, sans forcément réussir, de mettre en place un algorithme en utilisant des flèches, des lettres, etc.

Dans beaucoup de copies, pour rendre compte de leur démarche, l'utilisation de lettres leur est apparue utile pour rendre plus lisible l'identification des différentes étapes.

Travaux d'élèves

Le comptage à la main des portes pour les premières étapes a orienté certains élèves vers la formule générale, sans forcément la justifier, contrairement à d'autres qui ont accompagné leur formule d'explications.

Parmi toutes ces résolutions, deux stratégies principales :

► Première méthode

Observation de la structure fractale de l'objet avec la particularité de la pièce centrale.

Plus précisément, les élèves ont trouvé que le nombre de portes de la configuration de l'étape $n+1$ est égal à trois fois le nombre de portes de la configuration de l'étape n auquel on ajoute le nombre de portes de la grande pièce centrale dont le nombre est multiplié par deux à chaque étape.

Etape 1 :
1 x 3 = 3
il y a 3 portes

Etape 2
$\left.\begin{array}{l} 1 \times 6 = 6 \\ 3 \times 3 = 9 \end{array}\right\} 15$
il y a 15 portes

Etape 3
$\left.\begin{array}{l} 1 \times 12 = 12 \\ 3 \times 6 = 18 \\ 9 \times 3 = 27 \end{array}\right\} 57$
il y a 57 portes

Etape 4
$\left.\begin{array}{l} 1 \times 24 = 24 \\ 3 \times 12 = 36 \\ 9 \times 6 = 54 \\ 27 \times 3 = 8 \end{array}\right\} 195$
il y a 195 portes

Etape 5 :
$\left.\begin{array}{l} 1 \times 48 = 48 \\ 3 \times 24 = 72 \\ 9 \times 12 = 108 \\ 27 \times 6 = 162 \\ 81 \times 3 = 243 \end{array}\right\} 633$
il y a 633 portes

Etape 6 :
$\left.\begin{array}{l} 1 \times 96 = 96 \\ 3 \times 48 = 144 \\ 9 \times 24 = 216 \\ 27 \times 12 = 324 \\ 81 \times 6 = 486 \\ 243 \times 3 = 729 \end{array}\right\} 1995$
il y a 1995 portes

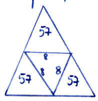
Etape 7
$\left.\begin{array}{l} 1 \times 192 = 192 \\ 3 \times 96 = 288 \\ 9 \times 48 = 432 \\ 27 \times 24 = 648 \\ 81 \times 12 = 972 \\ 243 \times 6 = 1458 \\ 729 \times 3 = 2187 \end{array}\right\} 6177$
il y a 6177 portes.

Nous pouvons verifier avec une équation :
$(x \times 3 + 2^{n^\circ \text{ étape précédente}} \times 3)$
nombre de portes ; portes suivantes ; nombre de triangle autour de la pièce centrale (sur un côté)

donc :
$(1995 \times 3 + 2^6 \times 3)$
$= 6177$
Nos calculs sont vérifiés

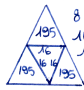
On a remarqué qu'à chaque fois que l'on passe d'une étape à l'autre, le triangle précédent est positionné 3 fois dans celui-ci, et qu'il y a également toujours un même grand triangle au milieu dont chaque nombre de portes par coté est multiplié par 2. Nous avons alors réalisé chaque étape jusqu'à la septièmes

Étape 4



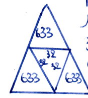
$4 \times 2 = 8$
$8 \times 3 = 27$
$57 \times 3 = 171$
$171 + 27 = 195$

Étape 5



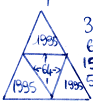
$8 \times 2 = 16$
$16 \times 3 = 48$
$195 \times 3 = 585$
$585 + 48 = 633$

Étape 6



$16 \times 2 = 32$
$32 \times 3 = 96$
$633 \times 3 = 1899$
$1899 + 96 = 1995$

Étape 7



$32 \times 2 = 64$
$64 \times 3 = 192$
$1995 \times 3 = 5985$
$5985 + 192 = 6177$

Conclusion :
L'édifice de la 7ème étape comporte donc 6177 portes intérieures

Il y a ensuite eu de nombreuses procédures légèrement différentes pour appréhender les étapes de calculs du nombre final de portes. Nous formalisons trois relations de réccurence qui se sont détachées :

$u_{n+1} = 3 \times u_n + 3 \times 2^n$
$u_{n+1} = 3(u_n + 2^n)$
$u_{n+1} = 3 \times u_n + v_n$, avec v_n telle que $v_{n+1} = v_n \times 2$

► **Deuxième méthode**

Les élèves ont établi qu'à chaque étape, le nombre de portes existantes était multiplié par deux (car chaque mur est divisé en deux), auquel il fallait ajouter le nombre de portes qui apparaissaient dans les nouveaux triangles formés. Ce qui peut être modélisé par la formule :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2 \times u_n + 3^{n+1} \quad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

Nous supposons que cette équation permettra de calculer toutes les étapes : $2x + 3^y$
x = au nombre de portes de la dernière étape
exposant y = le chiffre de l'étape

Étape 1
$0 \times 2 + 3^1 = 3$
Ainsi l'étape 1 contient 3 portes intérieur

Étape 2
$3 \times 2 + 3^2 = 15$
Ainsi l'étape 2 contient 15 portes intérieur

On s'est rendu compte que pour trouver une étape, il faut multiplier le résultat de la précédente par deux et ajouter 3 à l'exposant de l'étape à laquelle nous sommes. Donc :

Étape 3 : $15 \times 2 + 3^3$ Pour vérifier l'étape 3, nous avons compté.

: $30 + 27$

: 57

► **Autres procédures**

Les élèves considèrent le nombre de triangles en fonction de leur taille et calculent le nombre de portes correspondant et ce, à chaque étape.

Les élèves calculent le nombre total de portes (sans tenir compte des exemples fournis) puis retranchent le nombre de portes donnant sur l'extérieur du bâtiment.

Prolongements possibles

En classe, on peut prolonger cet exercice en travaillant sur le calcul littéral, les puissances, l'utilisation d'un tableur ou d'un algorithme.

On peut par exemple facilement demander le nombre de portes à n'importe quelle étape.

On peut également, une fois le processus de construction du triangle de Sierpinski compris, revenir sur des questions plus basiques (quel est le nombre de triangles, quelle est l'aire ou quel est le périmètre des triangles orientés vers le bas, etc.).

D'après le site images.math.cnrs.fr : « En 2018 ouvrira Le grand musée égyptien du Caire [...]. Et nous y avons appris que les pharaons du Caire pourraient bientôt contempler le triangle de Sierpiski puisque les architectes du futur grand musée égyptien ont en effet conçu une façade imposante qui en reprend le motif principal. »

Vue d'artiste du futur musée

Image tirée du site web du cabinet d'architecte *heneghan peng architects*.

Deux-mille-dix-huit (Qualification 2018, niveau 2^{nde} et 3^{e})

Énoncé

Benoît a décidé de ranger dans un tableau les nombres de la façon suivante :

1	2	3	6	9	14	19	...
	4	5	8	11	16	···	...
		7	10	13	···	···	...
			12	15	···	···	...
				17	···	···	...

dans la 1^{re} colonne, il place le 1er nombre impair ;
dans la 2^{e} colonne, il place les 2 premiers nombres pairs ;
dans la 3^{e} colonne, il place les 3 nombres impairs suivants ;
dans la 4^{e} colonne, il place les 4 nombres pairs suivants ;
dans la 5^{e} colonne, il place les 5 nombres impairs suivants ;
etc.

Quels seront les nombres à droite et à gauche du nombre 2018 ?

Solution

Voici une solution accessible aux élèves de troisième et de seconde.

On rappelle pour commencer qu'on ajoute 2 pour passer d'un nombre pair au nombre pair suivant, de même pour un nombre impair et son suivant.

On remarque ensuite qu'il y a n nombres dans la colonne numéro n.

Il est alors facile, soit avec un tableur, soit à la main (c'est un peu plus fastidieux), de trouver de proche en proche les premiers nombres de toutes les colonnes, en s'arrêtant lorsque le premier nombre d'une colonne paire dépasse 2018.

On constate alors que 2018 est le 17^{e} nombre de la colonne numéro 64, qui a pour premier terme 1986 ($1986 + 16 \times 2 = 2018$).

Les nombres à gauche et à droite sont donc les 17^{es} nombres des colonnes numéro 63 et 65, de premiers termes respectifs 1923 et 2049. En ajoutant 16×2 à ces nombres on obtient alors 1955 et 2081.

Travaux des élèves

Tous les groupes ont abordé l'exercice et même s'ils n'ont pas tous trouvé le résultat exact, ils ont su relever quelques propriétés du tableau.

Les élèves avaient à disposition un ordinateur, avec tableur et logiciel de programmation.

De nombreuses méthodes ont été élaborées pour trouver la réponse :

— tout écrire (ou presque) à la main,

— construire le tableau complet avec un tableur,

— utiliser un programme,

— observer les colonnes et conjecturer une relation entre elles,

— utiliser les formules des sommes de nombres pairs ou impairs successifs (méthode à priori non accessible aux élèves concernés).

Ils ont en général à peu près suivi la démarche que nous proposons en solution, soit à la main, soit au tableur et même un groupe avec Python.

Ceux qui ont fait un graphique propre ont eu le plus de réussite. Certains ont essayé d'expliquer uniquement par des phrases et ont vite eu des difficultés pour identifier les colonnes, les nombres, les écarts entre les nombres, etc.

L'extrait de copie suivant illustre les difficultés à décrire le travail réalisé.

Pour les numéros des colones paires il fallait enlever 2 chiffres de la somme du calcul du numéro de la colone terminant par 0. Enlever 4 chiffres du nombre de la colone terminant par 2, enlever 6 chiffres du numéro de la colone terminant par 4, enlever 8 chiffre du numéro de la colone terminant par 6 et ne pas enlever de chiffres lorsque le numéro de la colone termine par 8 et du 1er nombre de la colone pour pouvoir trouver le dernier nombre de cet colone-ci.

► **Programmation en Python**

Un groupe a écrit deux programmes : le premier permet de connaître la colonne dans laquelle se trouve 2018 ainsi que les derniers nombres de chaque colonne, le second permet, en utilisant les résultats précédents, d'afficher les trois colonnes nécessaires pour trouver les nombres à droite et à gauche de 2018

Programme 1

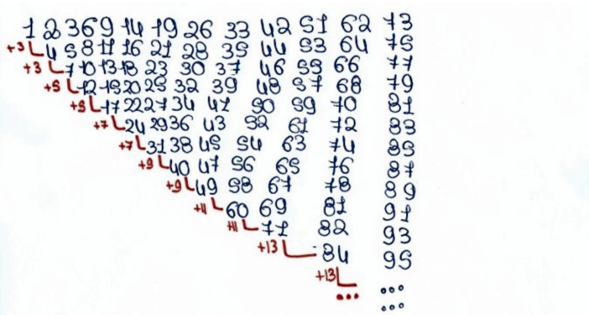
```
i=3
b=1
s=1
print (s,b)
while s<2048:
    for a in range (2):
        b=b+1
        s=s+i
        print (s,b)
    i=i+2
```

Programme 2

```
a=1921
b=1984
c=2047
while c<2177:
    a=a+2
    b=b+2
    c=c+2
    print (a,b,c)
```

► **Travail à la main**

Un exemple de travail « à la main », en cherchant ici le dernier terme de chaque colonne :



• On doit additionner les nombres impaires :
$1+3+3+5+5+\dots+\dots+63+63 = 2047$.
• On doit prendre le dernier nombre qui nous permet d'avoir le résultat le plus proche de 2018.
on prend 63 car il a un résultat plus proche de 2018 ;
alors que si on avait choisi 61 le résultat serais trop éloigné. (1921 : si on avait choisi 61
2177 : si on avait choisi 63)

Donc le nombre à droite de 2018 est 2081 et le nombre à gauche est 1955.

1923	1986	2049
1925	1988	2051
1927	1990	2053
1929	1992	2055
1931	1994	2057
1933	1996	2059
1935	1988	2061
1937	2000	2063
1939	2002	2065
1941	2004	2067
1943	2006	2069
1945	2008	2071
1947	2010	2073
1949	2012	2075
1951	2014	2077
1953	2016	2079
1955	2018	2081
1957	2020	2083
...	...	...

Prolongement en classe

L'exercice semble un bon support pour :

— montrer l'intérêt de réfléchir à comment désigner ce dont on va parler (colonne, numéro de colonne, premier ou dernier nombre, ligne...) ;

— travailler sur une présentation simple des observations faites sur une suite de nombres ;

— remettre au clair le vocabulaire : nombre, chiffre, numéro ;

— attirer l'attention sur l'incontournable question des « bornes et intervalles » : pour obtenir le 17ᵉ nombre de la colonne, il faut ajouter 16 fois 2 au premier nombre de la colonne.

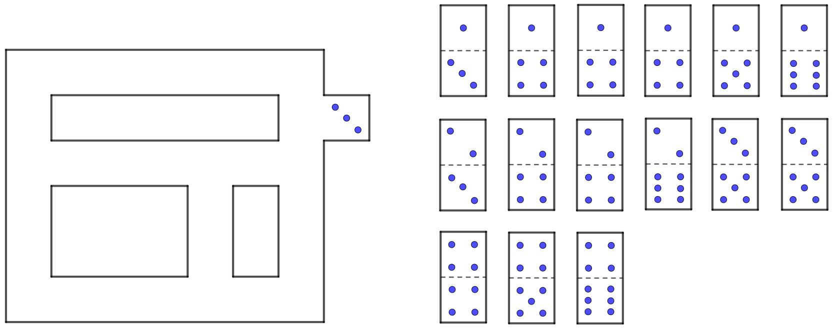
Il est aussi bon de faire remarquer que les différentes méthodes présentées reposent sur la possibilité de parcourir tous les entiers de 1 à 2018. Comment faire si l'on se pose la même question pour un nombre très grand ? Si le problème est posé à des élèves ayant plus de connaissances mathématiques, on peut utiliser la somme des nombres pairs pour trouver la colonne contenant le nombre cherché, ou même faire un raisonnement par récurrence pour la relation entre les premiers termes des colonnes successives, ce qui permet alors de résoudre le problème quel que soit le nombre donné.

Dominos

L'exercice suivant était proposé à un des stands de la course d'orientation. Au bout de 10 minutes, l'équipe devait repartir vers la balise suivante.

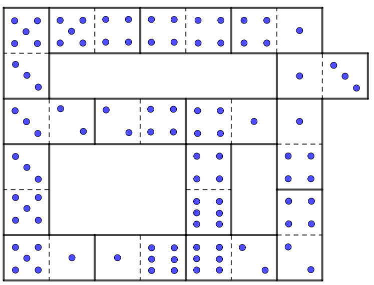
Énoncé

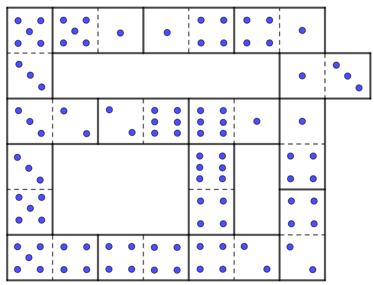
Utiliser les 15 pièces fournies pour compléter le circuit en respectant le principe du jeu de domino : deux pièces ne peuvent se raccorder que par le même nombre.
Il est obligatoire de positionner un 3 comme indiqué sur le circuit.

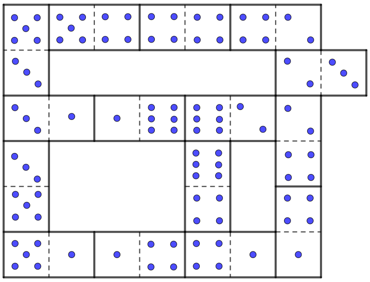
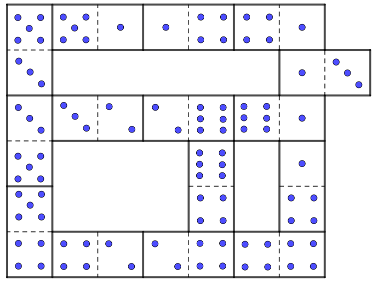


Solution

Voici quelques solutions :





Attendus

Le contexte (travail debout à un stand en plein air et en temps limité) n'est pas favorable à une longue étude théorique. L'exercice pouvait très bien être réalisé « à tâtons ».

Comme il y a 4 pièces portant un 3 et que l'un d'entre eux est utilisé, il en reste 3 à placer. Les 3 se trouvent donc à une intersection en T.

Il y a trois fois la valeur 6, le 6 est donc aussi à une intersection en T.

Il y a 9 fois (nombre impair) la valeur 4, le 4 est donc aussi à une intersection en T.

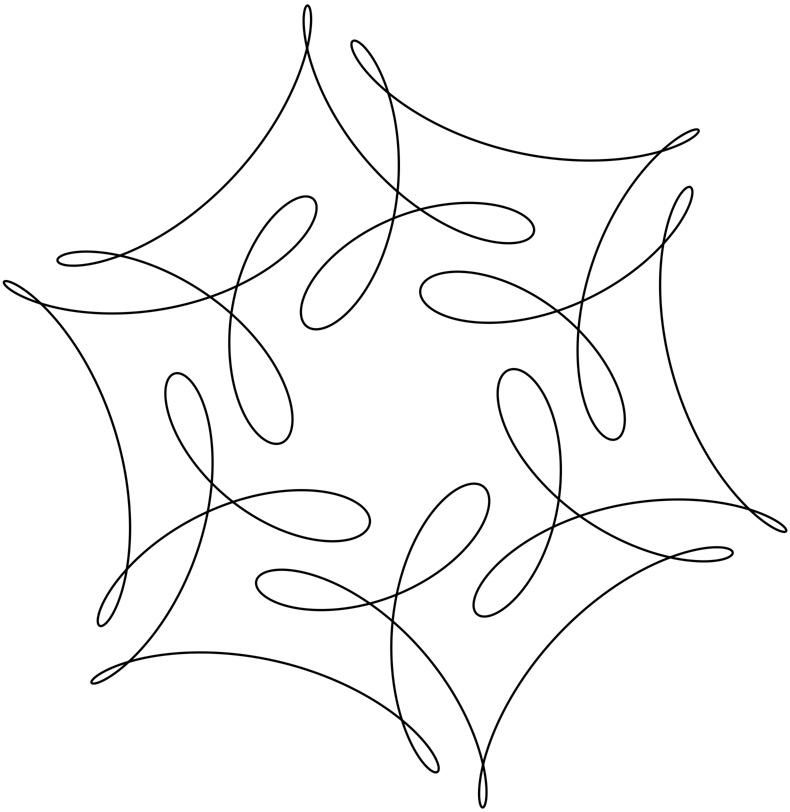
Avec ces contraintes et quelques essais, on trouve assez facilement au moins une solution.

Tous les groupes à qui cet exercice a été proposé se sont pris au jeu.

Lorsqu'une solution n'a pas été trouvée à tâtons très rapidement, en général un des élèves a remarqué au moins une contrainte sur 3 ou 6 et a guidé l'élève qui manipulait les dominos pour éliminer rapidement les configurations qui ne pouvaient pas aboutir.

La moitié des groupes a trouvé une solution en moins de 10 minutes.

Cette activité ne fait pas travailler une notion particulière des programmes de mathématiques. Par contre, elle met en jeu ce qu'on demande généralement à des élèves : observation, inventivité, méthode et persévérance.



$$\begin{cases} x(t) &=& 200\cos(t) + 100\cos(7t) + 60\cos(-17t - 90) \\ y(t) &=& 200\sin(t) + 100\sin(7t) + 60\sin(-17t - 90) \end{cases}$$