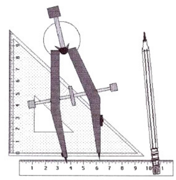
Rallye Mathématique de la Sarthe

Présentation

Historique



Le rallye se déroule depuis 1990 avec des effectifs qui augmentent chaque année. Pour le rallye 2018-2019, 775 classes issues de 61 collèges publics ou privés soit 19 441 élèves inscrits.

Déroulement

Ce rallye est ouvert à toutes les classes de tous les collèges sarthois (publics ou privés). C'est la classe entière qui doit s'organiser pour résoudre les énigmes mathématiques : la réponse est collective.

Deux épreuves de qualification (50 minutes chacune) se déroulent dans les collèges, la première en novembre, la seconde en janvier. Les objectifs :

— faire pratiquer les mathématiques ;

— aider à acquérir une méthode de travail en groupe ;

— entrainer au débat : argumenter, discuter de preuves, trouver des exemples, des contre-exemples, vérifier ;

— proposer un projet stimulant où s'impliquent tous les élèves d'une classe.

A l'issue de ces deux épreuves, 20 classes sont qualifiées pour la finale qui se déroule en mai-juin sur un site de plein air ; un même collège ne peut avoir qu'une classe qualifiée. La majorité des 10 ateliers proposés se déroule en extérieur et nécessite des manipulations, des mesures, des constructions et fait appel à la logique, au calcul et à l'organisation

L'organisation est prise en charge par une équipe de 13 professeurs avec le soutien de la DSDEN de la Sarthe, du Rectorat de l'Académie de Nantes et des IA-IPR de Mathématiques.

Contacts

Centre de Ressources : Collège JF Kennedy (Allonnes)

Professeur responsable : Gilles Ravigné, @ gilles.ravigne@ac-nantes.fr

Tous les renseignements, sujets, réponses, photos, films… sur le site du rallye : sarthe.cijm.org/blog/

Multiplions les méthodes (Finale mai 2016)

► **Mots clés :**
Multiplications, algorithme.

► **But du problème :**
Proposer différentes méthodes pour effectuer une multiplication entre deux nombres.

► **Présentation du problème :**
Découvrir différentes méthodes pour multiplier deux nombres au fil des âges et à travers le monde.

► **Commentaires et développement :**
Le calcul mental et le calcul posé sont des activités appréciées par les élèves. L'objectif de cet atelier est de revisiter le produit de deux nombres entiers en abordant diverses méthodes. La contrainte est parfois de savoir multiplier/diviser un nombre par 2.

Les réglettes de Genaille-Lucas présentent l'avantage de donner directement le résultat lorsque l'un des facteurs est inférieur à 10.

L'algorithme de Karatsuba permet d'obtenir tous les chiffres d'un produit de deux grands nombres. La calculatrice devient alors un outil pour un usage différent de celui qu'on lui donne habituellement. C'est un moyen de travailler aussi sur le sens à donner au résultat qu'affiche une calculatrice pour un produit de 2 grands nombres.

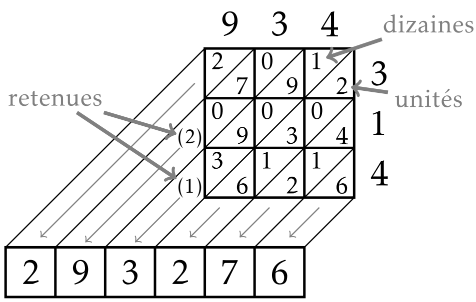
Questions données sur tous les niveaux (de la 6e à la 3e)

Les méthodes de multiplication utilisées à travers les âges et les pays sont très nombreuses. Vous allez en découvrir quelques-unes et les utiliser.

I) Multiplication *Per Gelosia*

Une disposition astucieuse de la multiplication apparaît au XVe siècle avec le mathématicien arabe Al-Kashi. Elle se propage en Orient, puis en occident.

Exemple avec 934×314



Question 1 : Observez cet exemple, et appliquez cette méthode pour calculer 427×238.

II) Multiplication Égyptienne

Dans le papyrus de Rhind datant de 1650 environ avant Jésus Christ, le scribe Ahmès donne de nombreux exemples de cette méthode sans donner de justification. L'emploi de cette méthode ne nécessite que de savoir multiplier par 2 et additionner.

Exemple avec 25×57

1+8+16
=25

	Multiples de 57
1	57
2	114
4	228
8	456
16	912
32	1 824

25×57
=57+456+912
=1425

Question 2 : Observez cet exemple et appliquez cette méthode pour calculer 29×37.

III) Multiplication dite à la russe

Cette méthode, encore en usage au début du XX^{e} siècle en Russie, est très voisine de la méthode égyptienne.

Exemple avec 314×217

314	**217**
628	108
1 256	54
2 512	27
5 024	13
10 048	6
20 096	3
40 192	1

$\times 2$ $\times 2$ $\times 2$ $\times 2$ ...

Quotient entier de la division de 217 par 2

Quotient entier de la division de 108 par 2

Quotient entier de la division de 54 par 2

Quotient entier de la division de 27 par 2

...

On repère dans cette colonne tous les nombres impairs : 217 ; 27 ; 13 ; 3 et 1.

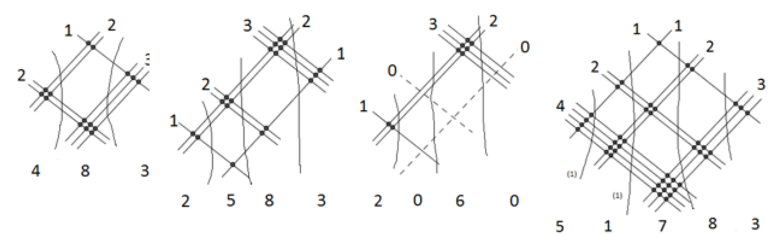
On ajoute les nombres de la colonne qui sont face à des nombres impairs : $314+2\,512+5\,024+20\,096+40\,192 = 68\,138$

Donc $314 \times 217 = 68\,138$

Question 3 : Observez cet exemple et appliquer cette méthode pour calculer 47×389

IV) Méthode graphique

Cette méthode serait d'origine maya, on la trouve aussi sous le nom de méthode japonaise ou méthode chinoise.



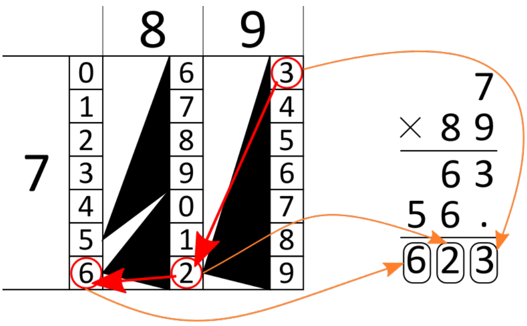
21 x 23 = 483 123 x 21 = 2583 103 x 20 = 2060 421 x 123 = 51 783

Question 4 : Observez ces exemples et rendez-vous à l'atelier n° 8 pour mettre cette méthode en application.

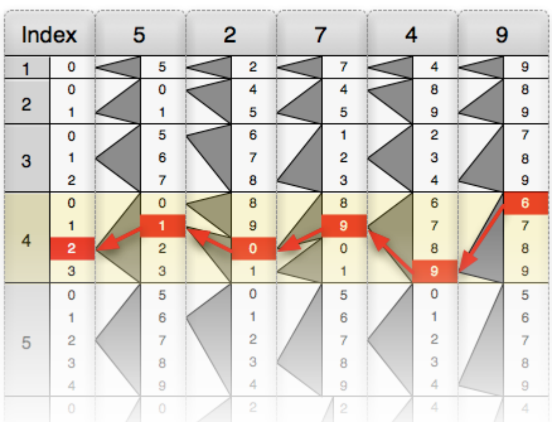
V) Les réglettes de Genaille-Lucas

Les réglettes multiplicatrices de Genaille et Lucas ont été inventées en 1885.

Il suffit de les juxtaposer côte à côte et de suivre par lecture directe le résultat d'un nombre à plusieurs chiffres multiplié par un nombre à un chiffre.



4×52749



Exemple :
$4 \times 52749 = 210\,996$

Question 5 : Observez cet exemple et rendez-vous à l'atelier n° 8 pour mettre cette méthode en application.

Partie donnée seulement pour les 4e et 3e

VI) Selon l'algorithme de Karatsuba, et avec une calculatrice

Karatsuba est un mathématicien soviétique, décédé en 2008. Il mit au point un algorithme permettant de multiplier plus rapidement des grands nombres entre eux à l'aide d'un ordinateur.

Sa méthode à l'avantage de permettre de connaître tous les chiffres d'un produit de deux nombres jusqu'au chiffre des unités, ce qu'une calculatrice ne permet pas toujours.

Une illustration de son algorithme avec une multiplication de deux grands nombres peut se résumer de la manière suivante :

Exemple avec $67\,523\,415 \times 987\,643\,237$

$\boxed{675\ \ 23415} \times \boxed{9876\ \ 43237}$

Les chiffres sont regroupés par paquet de 5 chiffres en partant des unités.

675	23415
9876	43237

		10123	94355	$\longleftarrow$	$43237 \times 23415 = 1\,012\,394\,355$	= 1 0123 94355
	291	84975		$\longleftarrow$	$43237 \times 675 = 29\,184\,975$	= 291 84975
	2312	46450		$\longleftarrow$	$9876 \times 23415 = 231\,246\,540$	= 2312 46540
66	66300			$\longleftarrow$	$9876 \times 675 = 6\,666\,300$	= 66 66300
	(1)			$\longleftarrow$	retenue pour $10123 + 89475 + 46450 = 1\ 41638$	
66	68904	41638	94355			

$$67\,523\,415 \times 987\,643\,237 = 66\,689\,044\,163\,894\,355$$

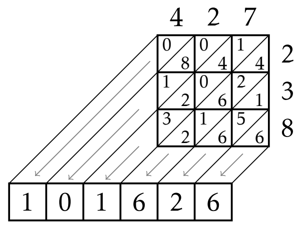
Le principe est le même qu'avec une multiplication posée.

Il suffit de poser l'opération comme à l'habitude, à l'aide de la calculatrice mais en utilisant des blocs de 5 chiffres.

Question 6 : À l'aide de cette méthode, écrire tous les chiffres du résultat de $432\,673\,102 \times 6\,521\,352\,114$.

Solutions

Question 1 : Résultat de 427×238 selon la méthode *per gelosia*.



Question 2 : Résultat de 29×37 selon la méthode égyptienne.

	Multiples de 37
→ 1	37
2	74
→ 4	148
→ 8	296
→ 16	592
32	1184

$16+8+4+1=29$

donc $29 \times 37 = 37+148+296+592$

$29 \times 37 = 1\,073$

Question 3 : Résultat de 47×389 selon la méthode à la russe

×2

47	**389** ←
94	194
188	97 ←
376	48
752	24
1 504	12
3 008	6
6 016	3 ←
12 032	1 ←

Quotient entier de la division de 389 par 2

$47 \times 389 = 389+97+3+1$

$47 \times 389 = 18\,283$

Question 6 : Écrire tous les chiffres du résultat de $432\,673\,102 \times 6\,521\,352\,114$.

4326 73102

65213 52114

		38096	37628
	2254	45164	
	47672	00726	
2821	11438		
2821	61364	83986	37628

$432\,673\,102 \times 6\,521\,352\,114 = 2\,821\,613\,648\,398\,637\,628$

Robot binaire (finale juin 2017)

► **Mots clés :**
Robot, programme, programmation.

► **But du problème :**
Programmer les déplacements d'un robot à l'aide de seulement deux actions et d'une procédure récursive.

► **Présentation du problème :**
Ce sujet a été choisi pour faire travailler tous les élèves (et vérifier leurs acquis) sur l'ajout dans le nouveau programme de mathématiques pour le cycle 3 : « Programmer les déplacements d'un robot ou ceux d'un personnage sur un écran ».

Les élèves recevaient les consignes, les plans des niveaux et un pion pour simuler les déplacements en autonomie. Pour l'un des niveaux, ils pouvaient venir tester leur solution sur un ordinateur.

L'une des difficultés pour les élèves était d'utiliser une procédure annexe pour utiliser le moins d'actions possibles mais ils en ont bien compris le fonctionnement grâce aux simulations. Beaucoup l'ont d'ailleurs utilisée pour programmer l'action « tourner à gauche » (en tournant trois fois à droite). Le fait d'utiliser une procédure de cette façon permet de bien comprendre la notion de répétition (car on écrit la commande autant de fois que l'on souhaite l'exécuter). Certains élèves ont même été jusqu'à appeler la procédure au sein de la procédure pour limiter encore davantage le nombre de blocs.

Ce sujet peut très facilement être réinvesti en classe car il nécessite peu de matériel et peut être facilement développé : un élève crée le parcours, d'autres doivent en programmer les déplacements (avec une contrainte ou non sur le nombre de blocs).

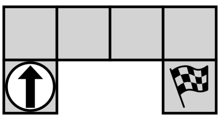
Questions données sur tous les niveaux (de la 6e à la 3e)

MT2 est un robot ancien dont la mémoire ne permet d'enregistrer que les deux actions de déplacements suivantes (représentées par des blocs) :

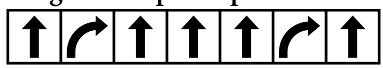
 avancer d'une case

 faire un quart de tour vers la droite

Sur le parcours ci-dessous, le pion fléché  indique la position initiale du robot et sa direction. Avec ce programme, le robot peut se rendre sur la case  .



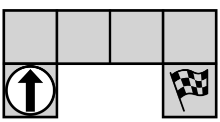
Programme principal :

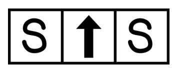


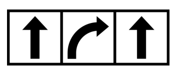
Un professeur de mathématiques a souhaité lui donner une seconde vie en lui ajoutant une barrette mémoire supplémentaire. Cela permet d'enregistrer une troisième action (la super-action) combinant les deux autres.

S super-action

Sur le même parcours, on peut maintenant programmer le robot de la façon ci-dessous pour qu'il se rende sur la case  .



Programme principal : 

Super-action S : 

Le robot effectue d'abord la super-action : il avance d'une case (image 1), il fait un quart de tour vers la droite (image 2) et avance de nouveau d'une case (image 3). Ensuite, le robot avance d'une case (image 4). Enfin, il effectue une deuxième fois la super-action et parvient sur la case  (image 5).

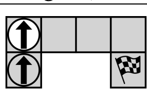
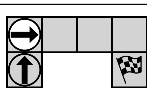
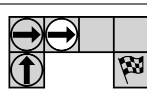
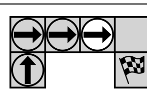
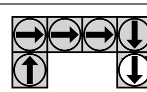
				

Image 1	Image2	Image 3	Image 4	Image 5

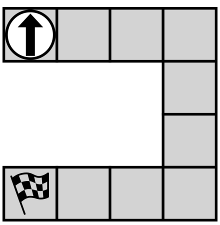
Vous devrez réaliser quatre défis qui vous seront remis lors de l'atelier.

— Les trois premiers défis consistent à programmer le robot pour qu'il atteigne l'arrivée. N'oubliez pas que la super-action indiquée précédemment n'est qu'un exemple et qu'elle peut être modifiée selon vos besoins. Au niveau de l'atelier, vous pourrez simuler sur ordinateur, une et une seule fois, votre réponse à l'un de ces trois premiers défis. Vous choisirez sur quel défi vous souhaitez l'utiliser.

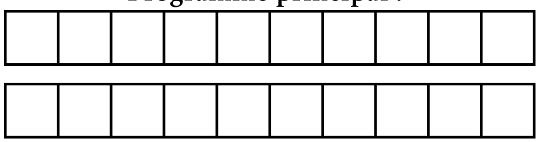
— Le quatrième défi consiste à venir sur l'atelier pour déplacer le robot sur une grille en suivant un programme donné. Seulement deux élèves devront venir. Après lecture de cet énoncé, venez d'ores et déjà chercher le défi 1.

Vous pouvez faire ces défis à l'adresse suivante :
sarthe.cijm.org/blog/archives/2010-2019/2016-2017/irobot/

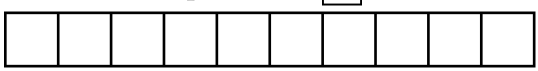
Défi 1 : Vous devez écrire le programme pour que le robot se rende sur la case  .



Programme principal :

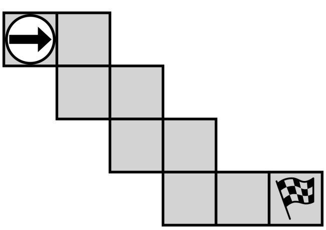


Super-action $\boxed{\text{S}}$ **:**

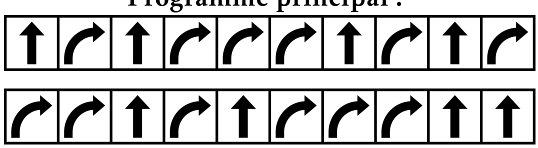


Défi 2 : On a écrit le programme ci-dessous pour que le robot se rende sur la case  .

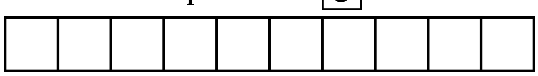
Vous devez l'optimiser en réduisant au maximum le nombre total de blocs utilisés (programme principal et super-action).



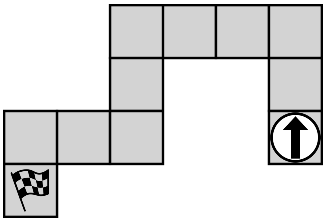
Programme principal :



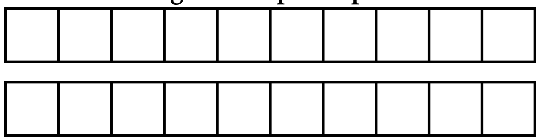
Super-action $\boxed{\text{S}}$ **:**



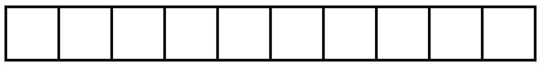
Défi 3 : Vous devez écrire le programme pour que le robot se rende sur la case  . Vous devez optimiser votre programme en réduisant au maximum le nombre total de blocs utilisés (programme principal et super-action).



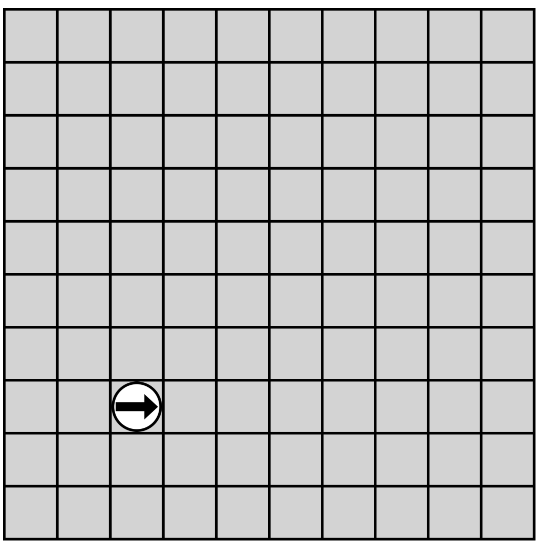
Programme principal :



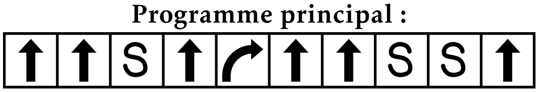
Super-action S :



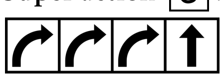
Défi 4 : Vous devez indiquer la case sur laquelle le robot parvient après exécution du programme ci-dessous.



Programme principal :

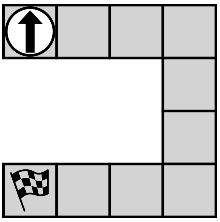


Super-action S :



Solutions

Défi 1 :



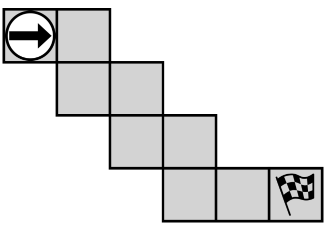
Programme principal :

S	S	S							

Super-action $\boxed{S}$ **:**

↱	↑	↑	↑						

Défi 2 :



Programme initial (à optimiser) :

↑	↱	↑	↱	↱	↱	↑	↱	↑	↱
↱	↱	↑	↱	↑	↱	↱	↱	↑	↑

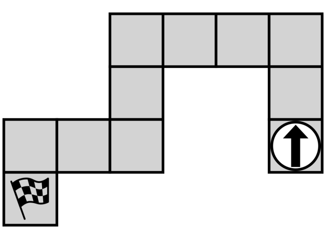
Programme principal :

S	S	S	↑	↑					

Super-action $\boxed{S}$ **:**

↑	↱	↑	↱	↱	↱			

Défi 3 :



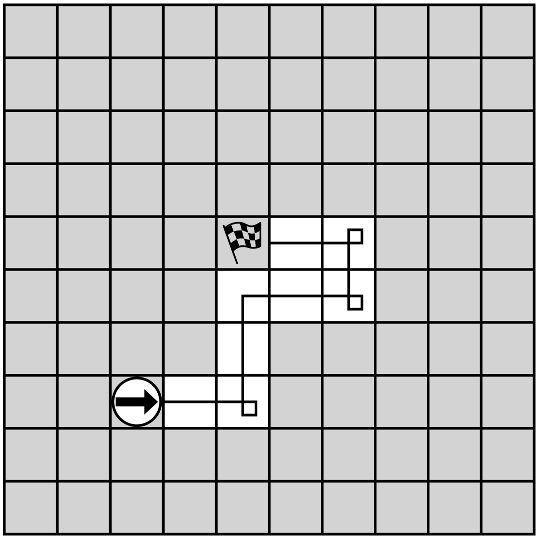
Programme principal :

S	↑	S	S	↱	↱	S	↑		

Super-action $\boxed{S}$ **:**

↑	↑	↱	↱	↱				

Défi 4 :

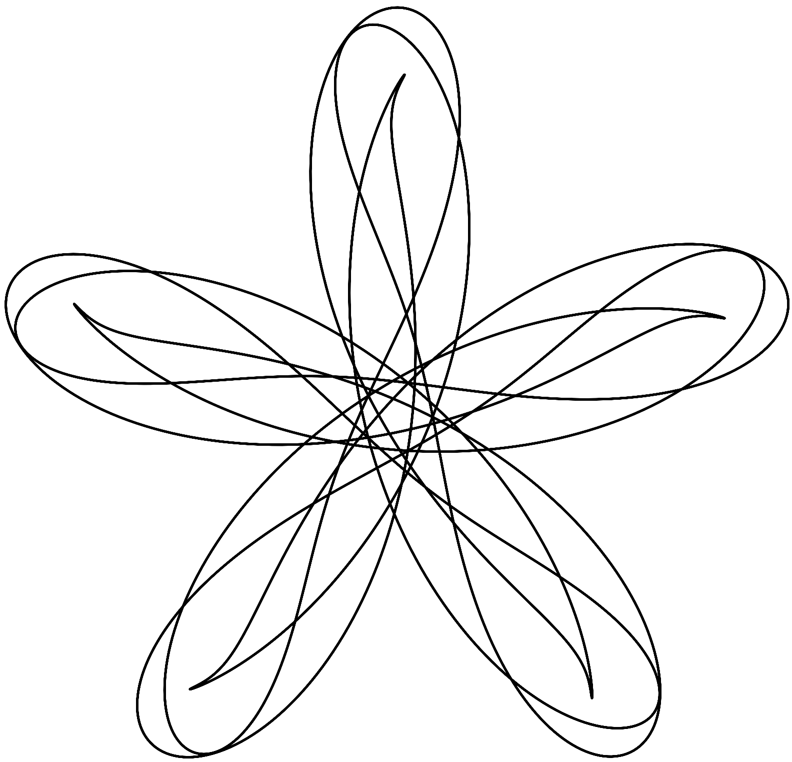


Programme principal :

↑	↑	S	↑	↱	↑	↑	S	S	↑

Super-action S **:**

↱	↱	↱	↑					



$$\begin{cases} x(t) & = & 100\cos(-18t+180) - 100\cos(27t+45) - 21\cos(57t-8) \\ y(t) & = & 100\sin(-18t+180) - 100\sin(27t+45) - 21\sin(57t-8) \end{cases}$$