Rallye Mathématique des collèges - IREM de Lille

Présentation

Ce Rallye, organisé dans l'Académie de Lille depuis 1992, suscite l'intérêt des élèves et des enseignants. En 2018, 13 500 collégiens ont participé aux phases qualificatives.

Chaque équipe de quatre élèves de niveaux différents (6^{e}, 5^{e}, 4^{e}, 3^{e}) doit résoudre 7 énigmes (numériques, géométriques, statistiques, algorithmiques ou logiques, dont une de communication) nécessitant la manipulation d'objets, chacune arbitrée par un enseignant, parent ou lycéen.

Déroulement

De janvier à mai, le matériel des énigmes des qualifications circule dans l'académie. Il est constitué d'énoncés, d'indications, de plateaux, d'objets à manipuler (pions, solides...) ainsi que de consignes d'arbitrage. Chaque collège participant aux qualifications présente une ou deux équipe·s à la finale, un samedi après-midi de juin, sur le campus Cité Scientifique de l'Université de Lille.

Objectifs

Les énigmes sont conçues pour permettre la mise en place d'analyses, de stratégies et la mobilisation de connaissances au sein d'une équipe d'élèves d'âges différents. Ceux-ci sont mis en situation de recherche mathématique par la manipulation d'objets dans un environnement différent de celui de la classe. Le travail en équipe oblige à verbaliser et à confronter différents raisonnements ou points de vue. Le regroupement inter-niveaux facilite la spontanéité. Les essais sont plus aisés quand il s'agit de bouger un pion tandis qu'un élève osera moins facilement écrire une réponse incertaine.

Ce Rallye promeut l'engagement des élèves, le travail en équipe, le décloisonnement des classes, la mutualisation des connaissances, l'investissement des équipes éducatives accueillant les qualifications ainsi que la participation des parents et d'anciens élèves en tant qu'arbitres.

Contact : IREM de Lille

✉ IREM de Lille, Bâtiment M1, Campus Cité Scientifique, Université de Lille, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex

☎ +33 (0)3 20 43 41 81

@ rallye-irem@univ-lille.fr

rallye-irem.univ-lille.fr

I 8 Σ π (logique-numérique, 2016)

Contenu

► Matériel

- 1 énoncé ;
- 43 portions de disque « part de tarte » (5 « Fraises » ; 14 « Framboises » ; 5 « Myrtilles » ; 6 « Abricots » ; 8 « Chocolat » ; 5 « Matcha ») ;
- 4 plateaux « Assiette » et 6 plateaux « Tarte » ;
- 11 indications.

► Énoncé

Soline, Milo, Zacharie et Juan se retrouvent entre amis dans un salon de thé pour déguster des tartes. Vous devez retrouver la composition de l'assiette de chacun.
Une part de tarte est représentée par un seul pion.

► Indications

Les 11 fiches d'indications données aux élèves ne sont pas numérotées, certaines le sont ici afin d'y faire référence plus loin.

⑤ Soline goûte quatre tartes parmi les six proposées, dont celle aux framboises et celle au chocolat. Elle les savoure en quantités égales.

② Milo ne goûte aucune tarte aux fruits. Il ne se limite pas à un seul parfum. Il mange $\frac{2}{6}$ d'une des tartes dont il aime le parfum.

③ Milo mange 4 fois plus d'une tarte que d'une autre.

Le chocolat et le thé matcha ne sont pas des fruits.

⑦ Zacharie mange moitié moins de tarte au matcha que Soline.

④ Juan mange $\frac{2}{5}$ d'une des tartes.

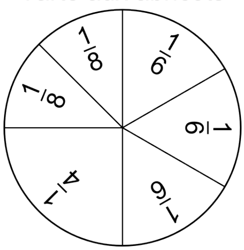
Il reste les $\frac{3}{4}$ de la tarte aux fraises quand tous les amis se sont servis.	⑥ Juan mange de toutes les tartes aux fruits rouges et uniquement de celles-ci.
⑧ Juan déguste autant de tarte aux myrtilles que Soline.	Les fruits rouges sont les fraises, les framboises et les myrtilles.
① Zacharie mange <u>une part</u> identique de chaque tarte. Son assiette contient l'équivalent de $\frac{3}{4}$ d'une tarte.	

Indication orale donnée par l'arbitre aux équipes :

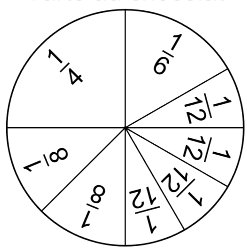
Aucune tarte n'est complètement répartie dans les assiettes.

► **Plateaux « Tarte » et parts de tarte**

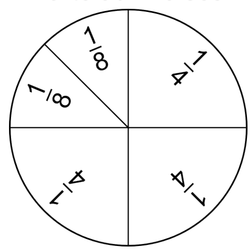
Tarte aux abricots



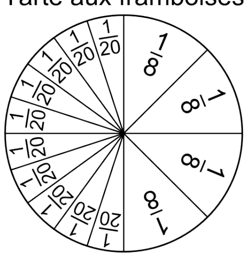
Tarte au chocolat



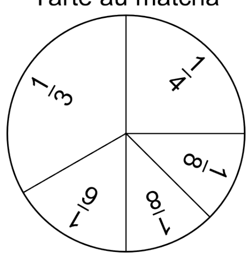
Tarte aux fraises



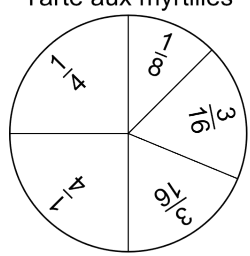
Tarte aux framboises



Tarte au matcha

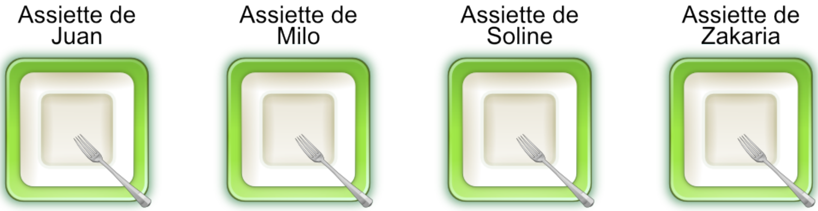


Tarte aux myrtilles



Remarques : Sur les plateaux les différents parfums des tartes sont représentés par des couleurs différentes. Les portions de disque données correspondent aux parts dessinées sur chaque plateau et sont de la couleur associée au parfum.

► **Plateaux « Assiette »**



► **Solution**

	Matcha	Chocolat	Framboises	Myrtilles	Fraises	Abricots
Zacharie	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
Soline	$\frac{1}{4}$	$\Sigma = \frac{1}{4}$	$\Sigma = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	×	×
Juan	×	×	$\Sigma = \frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	×
Milo	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	×	×	×	×

Pour les cases dans lesquelles se trouve une somme, il y a plusieurs possibilités pour obtenir la fraction de tarte indiquée.

— Pour obtenir $\frac{1}{4}$ de la tarte au chocolat dans l'assiette de Soline, on peut trouver $\frac{1}{4}$ ou $3 \times \frac{1}{12}$ ou $\frac{1}{6} + \frac{1}{12}$.

— Pour remplir la colonne « Framboises » on peut trouver
- $2 \times \frac{1}{8}$ dans l'assiette de Soline et $8 \times \frac{1}{20}$ dans l'assiette de Juan ;
- $2 \times \frac{1}{8}$ dans l'assiette de Soline et $2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{20}$ dans l'assiette de Juan ;
- $5 \times \frac{1}{20}$ dans l'assiette de Soline et $2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{20}$ dans l'assiette de Juan.

Analyse

► **Compétences**

— La fraction vue comme partage de grandeur (cycle 3).

— Résoudre un problème mettant en jeu 3 opérations tout en leur donnant du sens (cycle 3).

— Utiliser les fractions irréductibles, l'égalité de fractions (cycle 4).

► **Commentaires**

Dans notre rallye, une énigme estampillée « logique » ne fait pas forcément appel à des connaissances mathématiques mais nécessite toujours de croiser des indications pour parvenir à la solution.

Pour cette énigme de logique, l'objectif initial était d'effectuer du calcul fractionnaire en utilisant des pièces symbolisant des fractions de tartes. L'IREM fournit l'ensemble du matériel à utiliser, les élèves ne disposent pas de calculatrice et doivent donc soit calculer mentalement, soit manipuler. Les équipes étant constituées d'un élève de chaque niveau de la 6^{e} à la 3^{e}, tous les calculs nécessaires (sauf un) peuvent être réalisés uniquement par la manipulation des pièces. C'est d'ailleurs pour faciliter ce passage à la manipulation que la plupart des fractions ont pour numérateur 1.

L'indication ① est la seule permettant de remplir immédiatement une assiette. Elle n'a posé aucune difficulté : les élèves ont repéré que la pièce $\frac{1}{8}$ était la seule présente dans toutes les tartes et en juxtaposant 6 de ces pièces, ils ont pu vérifier que la somme équivaut à $3 \times \frac{1}{4}$ et est représentée sur le plateau « Tarte aux fraises ».

L'indication ② n'est pas auto-suffisante, il y a deux façons de la respecter. Les tartes au chocolat et au matcha ne comportent ni l'une ni l'autre 2 parts représentant chacune $\frac{1}{6}$, il faut donc trouver une autre manière d'obtenir la fraction $\frac{2}{6}$ (visible sur le plateau « Tarte aux abricots ») : en prenant soit $\frac{1}{3}$ de tarte au matcha, soit $4 \times \frac{1}{12}$ de tarte au chocolat. C'est grâce à l'indication ③ que le choix s'opère. Celle-ci fait chercher le quadruple ou le quart de $\frac{2}{6}$, le quadruple excédant l'unité (ici une tarte entière), c'est le quart qu'il faut choisir. Par manipulation des pièces « chocolat » et « matcha », on trouve que Milo mange $\frac{1}{3}$ de tarte au matcha et $\frac{1}{12}$ de tarte au chocolat.

La plus grosse difficulté est posée par l'indication ④, la fraction $\frac{1}{5}$ n'est pas présente parmi les pièces proposées, les élèves doivent penser à en changer l'écriture fractionnaire ou chercher à la visualiser sur une des tartes. La seule tarte permettant cette visualisation est la tarte aux framboises dont une moitié a été découpée en 10 parts représentant chacune $\frac{1}{20}$.

Il se peut aussi que le choix des pièces effectué pour une indication complique la suite de la résolution. Si une équipe a placé 5 pièces $\frac{1}{20}$ pour représenter $\frac{1}{4}$ de la tarte aux framboises dans l'assiette de Soline, elle ne pourra pas obtenir les $\frac{2}{5}$ de cette tarte pour l'assiette de Juan en n'utilisant que des pièces $\frac{1}{20}$, il faudra trouver une autre décomposition additive en juxtaposant des fractions différentes $\left(2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{20}\right)$.

En cas d'erreur ou de proposition incomplète de l'équipe à la fin du temps imparti, l'évaluation de ce type d'énigme consiste à vérifier quelles informations ont été respectées afin de valoriser les étapes de raisonnement. Par exemple, si une équipe a posé sur l'assiette de Soline quatre pièces issues de tartes différentes représentant chacune $\frac{1}{4}$ de tarte, une partie de l'indication ⑤ est vérifiée. La tâche de l'arbitre est donc complexe et il ne peut effectuer l'évaluation entre deux passages d'équipes. Afin de l'aider, nous lui fournissons une fiche d'aide à l'évaluation sur laquelle il recopie la proposition de l'équipe dans un tableau présenté comme le tableau « solution » et une fiche de correction par indication. Comme l'arbitre n'est pas nécessairement professeur de mathématiques, nous fournissons également un tableau contenant toutes les sommes de fractions possibles. La présentation du tableau des fiches « Aide à l'évaluation » et « Solution » a été pensée de façon à faciliter la correction par indication. Ainsi, dans les colonnes, on retrouve le matcha à côté du chocolat pour l'indication ②, la framboise à côté du chocolat pour l'indication ⑤, les fruits rouges regroupés pour l'indication ⑥ ; dans les lignes, on trouve Zacharie en 1$^{\text{er}}$ car l'indication ① est auto-suffisante, Soline juste en dessous pour l'indication ⑦ et Juan en 3$^{\text{e}}$ position pour l'indication ⑧.

Cette énigme peut être réinvestie en classe de 5$^{\text{e}}$ en guise d'introduction au calcul fractionnaire, la construction des pièces par les élèves permettant également de revoir l'utilisation du rapporteur.

Et rond, et rond petit macaron (algorithmique, 2017)

Contenu

► Matériel

- 1 énoncé ;
- 50 disques (8 noirs ; 7 orange ; 10 roses ; 5 violets ; 4 rouges ; 1 jaune ; 3 verts ; 4 bleus ; 8 gris) ;
- 3 plateaux « gâteau » ;
- 3 programmes.

► Énoncé

Les trois gâteaux d'anniversaire carrés de l'IREM sont à décorer avec des macarons colorés.
Vous devez poser au fur et à mesure les macarons dans l'ordre croissant des cases numérotées selon les instructions données par les programmes.
On note « nb.vides » le nombre de cases vides dans la ligne en cours.
On note « nb.remplies » le nombre de cases remplies dans la ligne en cours.
Les cases contiguës à une case donnée sont : la case du dessus, la case du dessous, la case de droite et la case de gauche.

Indications orales données par l'arbitre aux équipes :
Vous avez droit à deux propositions par programme.
Les gâteaux peuvent être complétés simultanément.

► Plateaux

Gâteau 1

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Gâteau 2

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Gâteau 3

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

► Programmes

Sur les fiches données aux élèves, les disques sont de la couleur indiquée entre parenthèses, la couleur de l'instruction « boucle » ou « condition » et du cadre correspondant change pour chaque nouvelle instruction.

Programme du gâteau 1

Aller à la case 1

Répéter 2 fois :

> poser un ● *(rouge)*
> aller à la case suivante
> poser un ● *(bleu)*
> aller à la case suivante

Répéter 2 fois :

> si nb.vides > nb.remplies
>
> alors
> poser un ● *(rouge)*
> aller à la case suivante
>
> sinon
> poser un ● *(bleu)*
> aller à la case suivante

si nombre de ● *(bleu)* restants > nombre de ● *(rouge)* restants

alors
poser un ● *(rouge)*
aller à la case suivante

sinon
poser un ● *(jaune)*
aller à la case suivante

Répéter 2 fois :

> si nombre de ● *(rouge)* restants > nombre de ● *(bleu)* restants
>
> alors
> poser un ● *(rouge)*
> aller à la case suivante
>
> sinon
> poser un ● *(bleu)*
> aller à la case suivante

Programme du gâteau 2

Aller à la case 1

Répéter 3 fois :

- si : nombre de ● *(violet)* restants > nombre de ● *(vert)* restants
- alors :
  - poser un ● *(gris)*
  - aller à la case suivante
  - poser un ● *(violet)*
  - aller à la case suivante
- sinon :
  - poser un ● *(vert)*
  - aller à la case suivante
  - poser un ● *(vert)*
  - aller à la case suivante

Tant que nombre de ● *(gris)* restants > nombre de ● *(violet)* restants :

- poser un ● *(gris)*
- aller à la case suivante

Répéter 4 fois :

- si : nb.vides $\geqslant$ nb.remplies
- alors :
  - poser un ● *(violet)*
  - aller à la case suivante
  - poser un ● *(gris)*
  - aller à la case suivante
- sinon :
  - poser un ● *(vert)*
  - aller à la case suivante

Programme du gâteau 3

Aller à la case 1
Répéter 2 fois :

- Tant que nombre de ● *(rose)* restants > nombre de ● *(noir)* restants :
  - poser un ● *(rose)*
  - aller à la case suivante
  - poser un ● *(orange)*
  - aller à la case suivante
- Répéter 4 fois :
  - si : nombre de ● *(noir)* restants > nombre de ● *(orange)* restants
  - alors :
    - poser un ● *(noir)*
    - aller à la case suivante
  - sinon :
    - poser un ● *(rose)*
    - aller à la case suivante
- Répéter 3 fois :
  - Tant qu'il n'y a pas de ● *(noir)* dans une case contiguë :
    - poser un ● *(noir)*
    - aller à la case suivante
  - si : nombre de ● *(noir)* restants = 0
  - alors :
    - poser un ● *(rose)*
    - aller à la case suivante
  - si : nb.vides > nb.remplies
  - alors :
    - poser un ● *(orange)*
    - aller à la case suivante
  - sinon :
    - poser un ● *(rose)*
    - aller à la case suivante

► **Solution**

B pour bleu, G pour gris, J pour jaune, N pour noir, O pour orange, R pour rouge, Rs pour rose, Ve pour vert, Vi pour violet.

Solution 1

R	B	R
B	R	B
J	B	R

Solution 2

G	Vi	G	Vi
Ve	Ve	G	G
G	Vi	G	Ve
Vi	G	Vi	G

Solution 3

Rs	O	Rs	O	N
N	N	Rs	N	Rs
O	O	Rs	O	Rs
O	N	N	N	Rs
N	Rs	O	Rs	Rs

Analyse

► **Compétences**

— Exécution d'un programme simple.

— Utilisation de séquences d'instructions.

— Utilisation de boucles itératives (répéter n fois) et conditionnelles (tant que ...).

— Utilisation d'instructions conditionnelles (« si ... alors ... » et « si ... alors ... sinon ... »).

► **Commentaires**

Cette énigme se range dans la catégorie « algorithmique ». Notre rallye a toujours régulièrement proposé ce type d'épreuve sous diverses formes : séries de déplacements à effectuer ou à déterminer, programme de calculs... mais suite à l'apparition de cette notion dans la dernière refonte des programmes, nous avons décidé d'inclure une énigme de ce type par session. Dans notre choix de mise en page des algorithmes, on retrouve les mâchoires des blocs de Scratch sous forme de cadres et l'indentation utilisée en Python.

L'objectif est ici de remplir des plateaux avec des jetons colorés en exécutant les algorithmes donnés. Les 3 plateaux sont indépendants, de difficulté croissante et utilisent des pions de couleurs différentes.

L'énoncé donne 3 définitions sur lesquelles toutes les équipes ont dû revenir lors de l'exécution : les élèves, étant pressés de rentrer dans l'activité, n'ont eu qu'une lecture superficielle de cet énoncé.

Deux stratégies ont dominé : faire les plateaux dans l'ordre à quatre ou se séparer en binômes pour faire les plateaux 1 et 2 puis se regrouper pour exécuter le programme 3. Dans tous les cas, le tri des pions par couleur puis par plateau a été effectué rapidement.

Le remplissage du 1er plateau n'a posé aucune difficulté : même si les équipes ont majoritairement compté le nombre de cases vides ou remplies parmi l'ensemble des cases et non pas parmi celles de la ligne courante, cela ne change pas le résultat, ils ont donc continué confiants.

Le début du programme 2 a été exécuté facilement, les difficultés sont arrivées avec la condition « si nb.vides $\geqslant$ nb.remplies » :

— Les équipes ayant mal lu ou oublié les définitions données dans l'énoncé ont compté le nombre de cases vides et remplies sur le plateau et non pas sur la ligne courante. À ce stade, on dénombre 7 cases vides et 9 remplies sur le plateau. Elles ont donc posé le dernier jeton vert et se sont retrouvées bloquées pour la 2e itération. Certaines, pensant avoir terminé, ont annoncé leur 1re proposition à l'arbitre qui leur a indiqué qu'il y avait une erreur sans préciser laquelle. D'autres ont immédiatement relu les définitions. Dans tous les cas, toutes ont compris où était leur erreur et l'ont corrigée.

— La 2e difficulté vient de l'inégalité large qui a été confondue avec une inégalité stricte, cela pose problème lors de la 4e répétition. Quelques groupes n'ayant plus de vert à poser ont pensé avoir terminé.

Le plateau 3 a été abordé en dernier par toutes les équipes, celles qui s'étaient séparées en binômes pour travailler simultanément sur les deux premiers plateaux se sont rassemblées pour le dernier. Très peu d'équipes ont réussi à le compléter correctement dans le temps imparti.

— Les instructions sont plus complexes avec des boucles imbriquées. Beaucoup de groupes se sont perdus dans le compte des itérations et ont dû recommencer plusieurs fois. Ceux qui se sont répartis les rôles avec un lecteur, un compteur et des débatteurs sont allés plus loin que les autres.

— Le mot « contiguë » a dérouté les élèves, là encore ils ont dû relire l'énoncé avant de poursuivre l'activité.

— Les équipes ont aussi été déstabilisées par le fait de ne pas poser de pion quand, dès le 1er tour, la condition « nombre de ● *(noir)* restants = 0 » n'était pas vérifiée. Les programmes précédents contenaient tous des instructions du type « si… alors… sinon… » alors qu'ici il s'agit uniquement d'un « si… alors… ». Le même problème s'est posé la 1re fois que les élèves n'ont pas pu mettre de pions dans la boucle « Tant qu'il n'y a pas de ● *(noir)* dans une case contiguë ». Pour les autres occurrences, cela ne les a plus gênés.

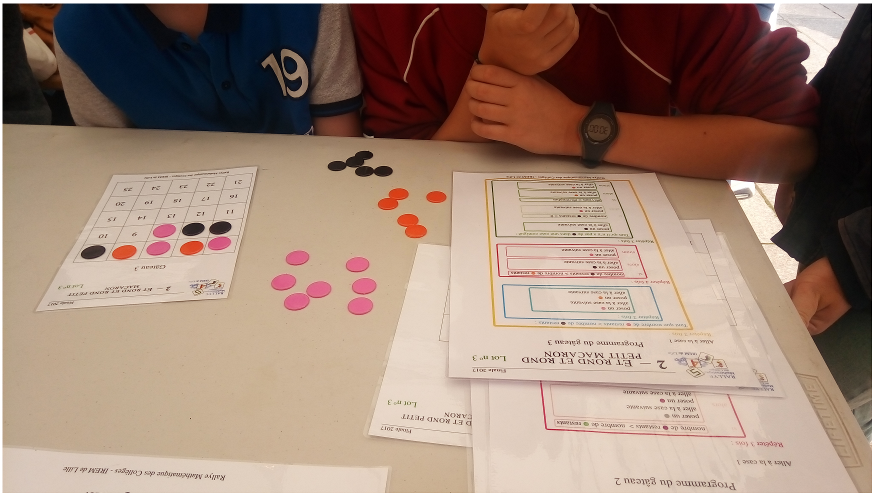
Lors de l'évaluation, les réponses partielles étaient prises en compte et chaque boucle correctement exécutée était valorisée.

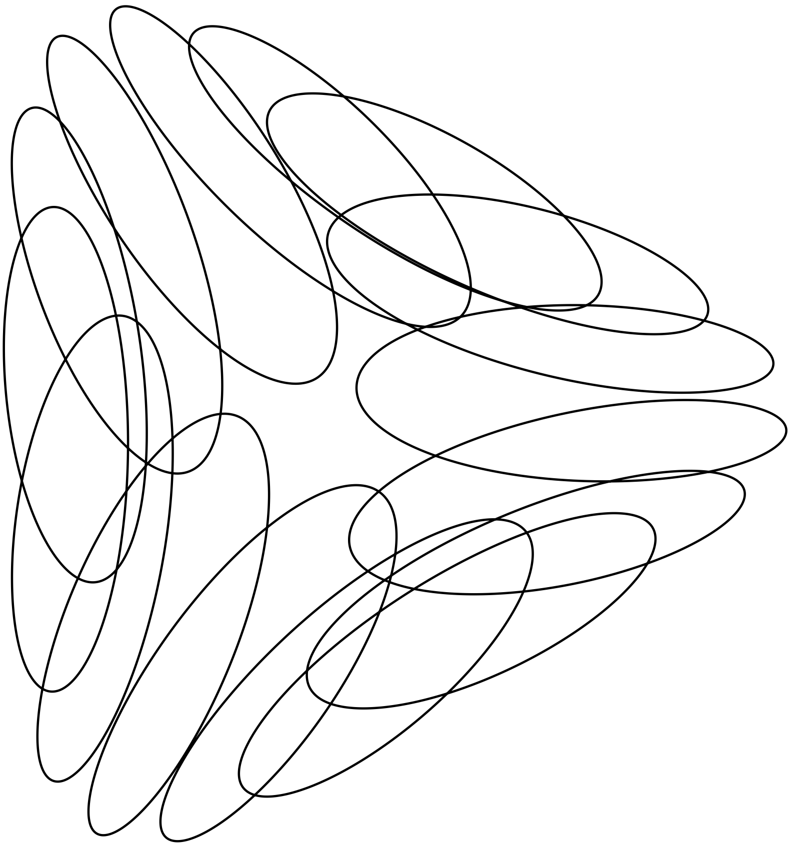
► **Prolongement**

L'épreuve peut être individualisée en donnant les plateaux vierges que chaque élève complète avec des feutres (dans ce cas il ne faut pas oublier d'indiquer le nombre de pions de chaque couleur à utiliser). Ils comparent ensuite leur production et proposent une réponse commune. Les élèves ont ainsi réfléchi individuellement à certaines commandes et doivent argumenter devant leurs camarades la compréhension qu'ils en ont (compétence *communiquer*).

On peut aussi proposer aux élèves de construire leur propre programme pour décorer un gâteau 4×4 avec certaines instructions imposées. Puis ils échangent leur programme avec celui d'un condisciple, l'exécutent, et comparent leur résultat à ce qui était attendu. Éventuellement, le binôme corrige les erreurs dans l'exécution ou même dans le programme lui-même.

Plus difficile, on peut donner un gâteau décoré et demander aux élèves de trouver un programme permettant de l'obtenir sachant que certaines instructions sont à utiliser.





$$\begin{cases} x(t) &= 14\cos(14t+30) - 25\cos(-15t+113) - 46\cos(t+33) \\ y(t) &= 14\sin(14t+30) - 25\sin(-15t+113) - 46\sin(t+33) \end{cases}$$