Rallye Mathématique des lycées de Bourgogne

Présentation

Ce rallye est gratuit et est destiné aux élèves des lycées de Bourgogne, de la seconde à la terminale, quelle que soit la série.

Historique

Ce rallye a été créé en 1979 par Messieurs G. Bouillot, J. Chèze, R. Durier (directeur de l'IREM), D. Estève, R. Guyot, M. Lafond, G. Michelot, D. Reisz, L. Sautereau, J. Arbault.

Il y a beaucoup moins d'intervenants aujourd'hui.

Après une pause de 1986 à 1989, il fonctionne sans interruption depuis 1990.

Partenaires

IREM de Dijon - Institut Mathématique de Bourgogne - Rectorat de l'Académie de Dijon.

Compétition

Ce rallye se déroule chaque année, l'avant-dernier ou le dernier mercredi après-midi de janvier, de 14h à 18h.

Les élèves s'inscrivent individuellement ou par équipes (il leur est conseillé de participer en équipes de trois ou quatre) et ils doivent traiter six exercices durant ces quatre heures. Ils peuvent utiliser tous les documents et machines possibles. Quatre catégories ont été retenues depuis quelques années :

— Seconde (y compris les élèves de lycée professionnel) ;

— Première et Terminale d'autres séries que la série S ;

— Première S ;

— Terminale S.

Ce rallye est sans prétention. Les exercices posés ont un caractère ludique autant que mathématique et les énoncés sont toujours courts et aussi « attrayants » que possible. Les connaissances exigées sont modestes.

L'intérêt du public est grand, grâce à l'appui de la presse régionale et parfois des stations de télévision bourguignonnes. Les énoncés et les solutions paraissent dans les quotidiens, ce qui permet à de nombreux amateurs d'envoyer leur solution, sans oublier leurs commentaires.

Ce rallye rassemble environ 700 élèves chaque année. À titre d'exemple, en janvier 2018 ont participé 675 élèves regroupés en 208 équipes et provenant de 27 lycées.

Un peu plus de 20 % des élèves participants sont récompensés (livres d'énigmes mathématiques ou de vulgarisation mathématique, clés USB, casse-têtes).

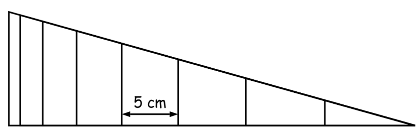
Contacts

Patrick Guisset, Michel Lafond, Florian Plastre et Marie Wagner.
@ florian.plastre@ac-dijon.fr
irem.u-bourgogne.fr/rallyes-mathematiques/lycees.html

Hissez les couleurs (2017, 1re S et TS)

Énoncé

La Rallynésie occidentale vient d'acquérir son indépendance, et le choix de son drapeau porte sur un motif triangulaire rectangle (voir figure).



Les 8 bandes verticales ont pour largeur en cm : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.

Chacune des bandes sera colorée soit en rouge soit en vert.

Comment faire en sorte que les aires des domaines rouges et verts soient égales ? Faire le dessin.

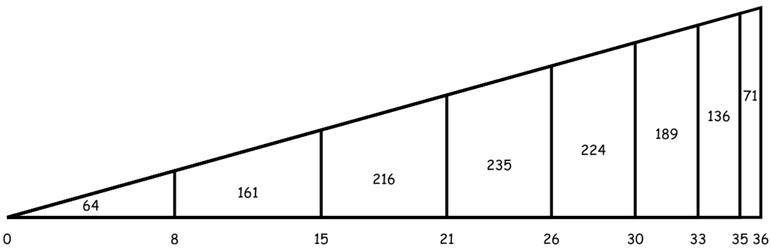
Solution

Les bases des triangles rectangles successifs mesurent :
8 cm ; $8+7=15$ cm ; $15+6=21$ cm ; $21+5=26$ cm ; $26+4=30$ cm ; $30+3=33$ cm ; $33+2=35$ cm et $35+1=36$ cm.

Les hauteurs de ces 8 triangles sont proportionnelles à leurs bases. On peut donc supposer que les hauteurs de ces 8 triangles sont : 16 cm, 30 cm, 42 cm, 52 cm, 60 cm, 66 cm, 70 cm et 72 cm.

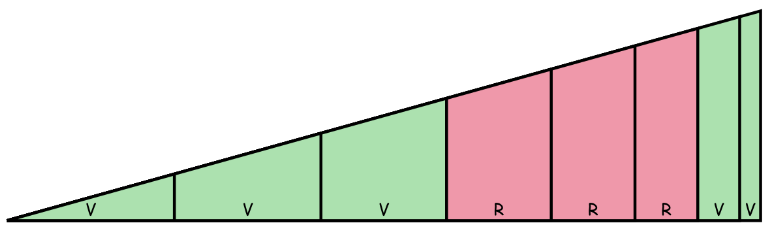
Les aires sont alors : 64 cm^2, 225 cm^2, 441 cm^2, 676 cm^2, 900 cm^2, 1 089 cm^2, 1 225 cm^2 et 1 296 cm^2.

Par soustraction des aires de triangles consécutifs emboîtés, les aires des bandes verticales sont : 64 cm^2, 161 cm^2, 216 cm^2, 235 cm^2, 224 cm^2, 189 cm^2, 136 cm^2, 71 cm^2.



Il faut trouver des bandes dont la somme des aires est $\frac{1\,296}{2} = 648$. Si l'on suppose que la bande d'aire 235 cm^2 est de couleur rouge, il reste à colorier en rouge $648 - 235 = 413$ cm^2 qui n'est réalisable qu'en coloriant les bandes d'aire 224 cm^2 et 189 cm^2.

D'où la solution unique à permutation près des couleurs :



Analyse

Cet exercice a été traité par 80 % des équipes, avec un taux de réussite de 40 %. Beaucoup d'équipes ont choisi arbitrairement une hauteur de drapeau, sans justifier que le résultat est indépendant de ce choix. Sans parler de proportionnalité, l'utilisation du théorème de Thalès était une alternative. Ensuite, un petit test permettait de résoudre ce problème.

Mèches (2015, tous niveaux)

Énoncé

Trois mèches se consument respectivement en 64 secondes, 48 secondes et 24 secondes lorsqu'on les allume à un bout et moitié moins longtemps si on les allume aux deux bouts !
On ne peut pas les allumer ailleurs qu'aux extrémités.
Il est facile de chronométrer exactement une minute : on allume à un bout, et on laisse bruler la mèche de 48 secondes, puis on allume aux deux bouts celle de 24 secondes.
Mais comment chronométrer exactement 47 secondes ?

Solution

Soient A la mèche de 64 s, B la mèche de 48 s et C la mèche de 24 s.

On allume la mèche A et la mèche B à un bout, et la mèche C aux deux bouts.

Au bout de **12 secondes**, il restera une mèche A de 52 s, allumée à un bout ; une mèche B de 36 s, allumée à un bout. On allume alors le deuxième bout de la mèche B.

Au bout de **18 secondes**, il ne reste qu'une mèche A de 34 s.

Si à cet instant on allume le deuxième bout de la mèche A, au bout de **17 secondes**, il ne restera plus rien.

Le temps total de la combustion a été 12 + 18 + 17 = **47 secondes**.

Analyse

Cet exercice a été traité par 82 % des équipes, avec un taux de réussite de 22 %. Nous espérions une meilleure réussite mais beaucoup d'équipes ont proposé des solutions dans lesquelles le chronométrage était évasif.

Cet exercice ne nécessite aucune connaissance mathématique : seule une part d'imagination et de logique suffisait. Beaucoup de tentatives ont cependant été infructueuses.

Réverbération (2018, tous niveaux)

Énoncé

Le produit d'un nombre entier N par le nombre « miroir » N' obtenu en écrivant N de droite à gauche est égal à 16 029 559.
Que vaut N ?

Solution

Si N avait moins de 4 chiffres, on aurait $NN' \leqslant 999^2$ soit

$$NN' \leqslant 998\,001$$

d'où $NN' < 16\,029\,559$.

Si N avait plus de 4 chiffres on aurait $NN' \geqslant 10001^2$ soit

$$NN' \geqslant 100\,020\,001$$

d'où $NN' > 16\,029\,559$.

Donc N a exactement 4 chiffres : $N = abcd$ et on peut supposer $a \leqslant d$.

Puisque NN' se termine par 9, les seules possibilités pour (a, d) sont $(1,9)$; $(3,3)$; $(7,7)$.

— Si $N = 3bc3$, on a $NN' \leqslant 3\,993^2$ soit $NN' \leqslant 15\,944\,049$ d'où

$$NN' < 16\,029\,559.$$

— Si $N = 7bc7$, on a $NN' \geqslant 7007^2$ soit $NN' \geqslant 49\,098\,049$ d'où

$$NN' > 16\,029\,559.$$

On conclut donc que N est de la forme $1bc9$ (ou son miroir).

On étudie ensuite les valeurs de b possibles.

— Si $b \leqslant 5$, on a $NN' \leqslant 1\,599 \times 9\,951$ soit $NN' \leqslant 15\,911\,649$ d'où

$$NN' < 16\,029\,559.$$

— Si $b \geqslant 8$, on a $NN' \geqslant 1\,809 \times 9\,081$ soit $NN' \geqslant 16\,427\,529$ d'où

$$NN' > 16\,029\,559.$$

Il reste donc deux possibilités : $N = 16c9$ ou $N = 17c9$ (ou leur miroir).

Quelques essais pour la valeur de c montrent que la seule possibilité est **N = 1 729 ou son miroir 9 271.**

Travaux d'élèves

Programme en Python proposé par le lycée Stephen Liégeard de Brochon :

Exercice 4 : J'ai créé un programme python qui essaye tous les nombres de 0 à 10000.

```
def main() :
    liste =[]
    for y in range(10 000):
        yy = str(y)
        liste = list(yy)
        try :
            a = liste[0]
        except:
            a = 0
        try :
            b = liste[1]
        except:
            b = 0
        try :
            c = liste[2]
        except:
            c = 0
        try :
            d = liste[3]
        except:
            d = 0
        try :
            e = liste[4]
        except:
            e = 0
        try :
            f = liste[5]
        except:
            f = 0
        nb = f + e + d + c + b + a
        nb2 = int(nb)
        total = y*nb2
        if total = = 16029559:
            print y

main()
```

Je transforme le nombre y pour qu'il soit possible de l'inverser.

J'utilise des try / except pour ne pas avoir d'erreur si le numéro de la liste n'existe pas.

La réponse est 1729 ou 9271 car 9271 est le nombre miroir de 1729 et inversement.

Une seconde **programmation en Python** proposée par le lycée Eiffel de Dijon :

Exercice 1

Afin de résoudre cet exercice, nous avons utiliser un algorithme coder en Python. Nous avons donc :

```
unite; dizaine; centaine; millier = 0;0; 0;0
N, N' = 0, 0
def changement ():
    global unite, dizaine, centaine, millier, N, N'
    if unite == 10:
        unite = 0
        dizaine = dizaine + 1
    if dizaine == 10:
        dizaine = 0
        centaine = centaine + 1
    if centaine == 10:
        centaine = 0
        millier = millier + 1
for x in range (100 000):
    N = unite + dizaine x 10 + centaine x 100 + millier x 1000
    N' = unite x 1000 + dizaine x 100 + centaine x 10 + millier.
    if N x N' = 1602 9559:
        print (N)
        print (N')
    unite = unite + 1
    changement ()
```

Programmation sous Algobox proposée par le lycée Julien Wittmer de Charolles :

Algorithme de l'exercice 1 :

```
sanstitre  -  24.01.2018

******************************************

******************************************

VARIABLES
  Y EST_DU_TYPE NOMBRE
  G EST_DU_TYPE NOMBRE
  E EST_DU_TYPE NOMBRE
  F EST_DU_TYPE NOMBRE
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  B EST_DU_TYPE NOMBRE
  C EST_DU_TYPE NOMBRE
  D EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  Y PREND_LA_VALEUR 16029559
  //Y représente le nombre à trouver
  G PREND_LA_VALEUR 0
  POUR A ALLANT_DE 1 A 9
    DEBUT_POUR
    POUR B ALLANT_DE 0 A 9
      DEBUT_POUR
      POUR C ALLANT_DE 0 A 9
        DEBUT_POUR
        POUR D ALLANT_DE 1 A 9
          DEBUT_POUR
          //On va tester pour faire en sorte que le nombre composé des 4 chiffres A, B, C et D balait toutes les possibilités de 1001 à 9999.
          E PREND_LA_VALEUR A*1000+B*100+C*10+D
          //E représente ici le nombre N.
          F PREND_LA_VALEUR D*1000+C*100+B*10+A
          //F représente ici le nombre "miroir" N'.
          G PREND_LA_VALEUR E*F
          //On va calculer N*N'.
          SI (G==Y) ALORS
            DEBUT_SI
            AFFICHER E
            //On affiche N et N'.
            FIN_SI
          FIN_POUR
        FIN_POUR
      FIN_POUR
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

Analyse

Près de 84 % des équipes ont proposé une réponse correcte à cet exercice.

C'est un bon exemple d'exercice-type du rallye :

— son énoncé est court ;

— il est suffisamment attractif pour que les élèves s'y plongent facilement ;

— il donne l'impression que sa résolution est simple ;

— son traitement ne demande aucune connaissance mathématique : il suffit d'un peu de réflexion, d'intuition, de tests.

Il est intéressant de noter que certaines équipes ont proposé une résolution sous forme d'un programme. C'est pourquoi trois exemples ont été proposés ci-dessus : l'un sous Algobox et deux en Python (dont l'un avec la gestion de listes).

Cet exercice peut être proposé lors d'une séance d'algorithmique précédée d'un question préliminaire : comment, par des opérations numériques, récupérer chaque chiffre d'un nombre donné ? C'est l'occasion de manipuler la division euclidienne par 10.

Pour terminer cette analyse, nous nous attendions évidemment à un fort taux de réussite (ce qui n'est malheureusement pas toujours le cas) et à quelques résolutions sous forme de programmation : cette attente a été largement comblée !

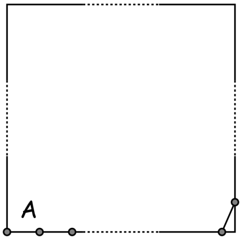
La puce sauteuse (2018, 1re S et TS)

Énoncé

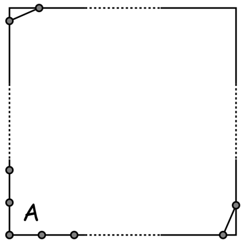
Une puce savante fait des sauts sur un fil tendu selon un carré. Elle commence en un sommet du carré et ensuite fait des bonds en avant de 20 cm. Son dernier saut, après un seul tour, la ramène exactement à son point de départ. Elle a effectué 130 sauts, sans nécessairement passer par tous les sommets du carré.
Quelle est l'aire du carré délimité par le fil ?

Solution

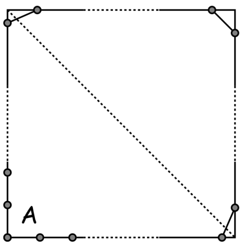
Représentons par des petits disques gris tous les points sur lesquels la puce s'est posée. La lettre A désigne le point de départ.

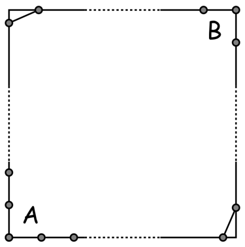


Par symétrie, on a donc :

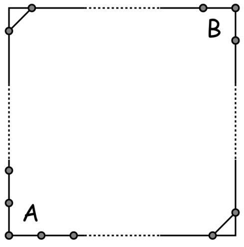


Il y a alors deux possibilités selon que la puce a atteint ou non le coin B en haut à droite :





Le premier cas est impossible, car le nombre de disques situés sous la diagonale (en pointillé) serait impair, et le nombre de disques situés au dessus serait pair. Le nombre total de disques serait impair, ce qui n'est pas le cas de 130. On est donc dans le second cas et la diagonale (AB) est axe de symétrie. Ceci amène à la configuration ci-dessous :



Si k est le nombre de disques situés sur chaque côté, on a

$$4(k-1)+2 = 4k-2 = 130$$

d'où $k = 33$.

Le côté du carré mesure $((k-1)+\frac{\sqrt{2}}{2})20 = 640+10\sqrt{2} \simeq 654{,}14$ cm d'où l'**aire demandée** $(640+10\sqrt{2})^2 \simeq$ **427 901,93 cm^2**.

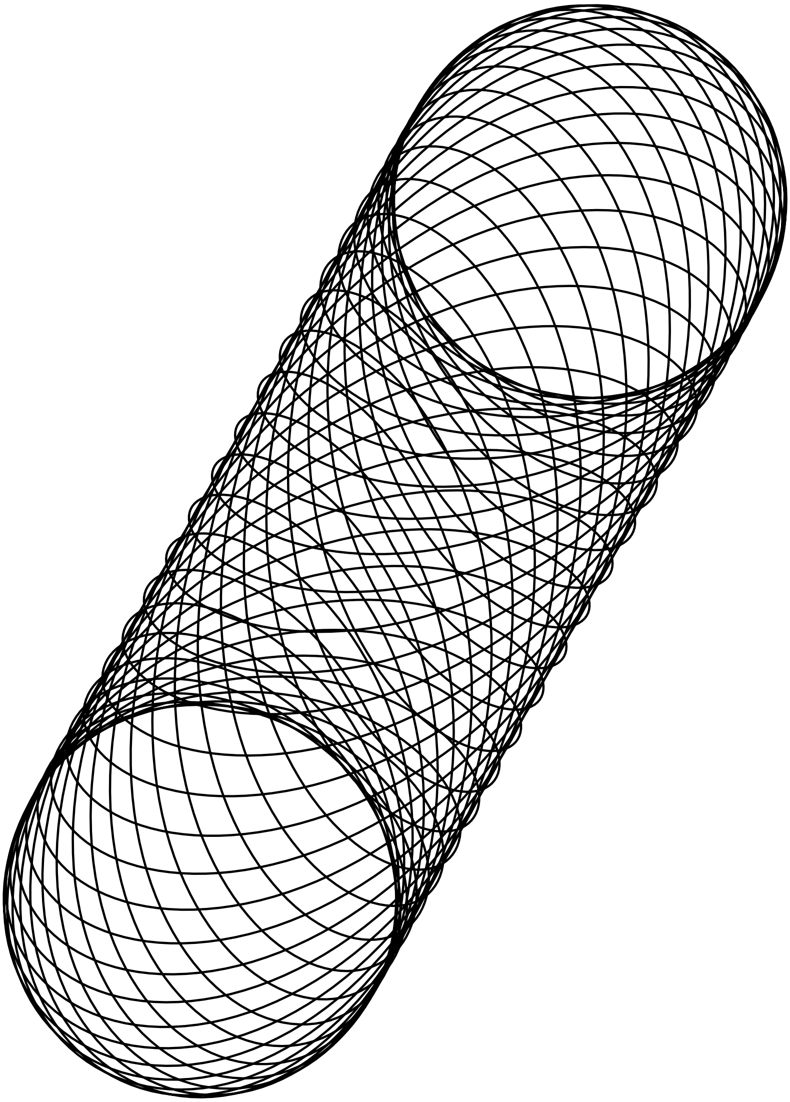
Analyse

Seulement 30 % des équipes ont correctement résolu cet exercice, bien évidemment plus difficile que le précédent (c'était l'avant-dernier exercice du sujet proposé aux élèves).

Cet exercice reprend les caractéristiques d'un exercice-type, énoncées dans l'analyse précédente, avec un item essentiel supplémentaire : ne pas avoir d'a priori. En effet, ici, il faut comprendre que la puce retombe toujours sur le fil, sans que son bond soit nécessairement effectué à la verticale du fil.

Logique, symétries et théorème de Pythagore suffisent à résoudre cet exercice.

Cet exercice peut faire l'objet d'un devoir à la maison pour des élèves de 2$^{\text{nde}}$ ou en début d'année de 1$^{\text{re}}$ S ou ES.



$$\begin{cases} x(t) &= 73\cos(-18t+156)+72\cos(18t+154)+71\cos(53t+132) \\ y(t) &= 73\sin(-18t+156)+72\sin(18t+154)+71\sin(53t+132) \end{cases}$$