Rallye dynamique et virtuel (RDV) - IREM de Caen-Normandie

Présentation

Ce rallye met en concurrence des classes de 3^{e} et de 2^{nde} de l'académie de Caen. Il consiste pour les élèves, lors d'une épreuve unique de 90 minutes, à résoudre le plus grand nombre possible de problèmes qu'ils découvrent au fur et à mesure de l'épreuve en franchissant une à une un certain nombre d'étapes (il y en a 6 dans la formule actuelle). À chaque étape, la résolution d'une énigme donne le code d'accès à l'étape suivante.

Les classes ont accès aux énoncés des problèmes grâce à une application autonome nommée « rdv.. » (rdv18 pour l'année 2018 par exemple) qui doit être copiée sur les postes utilisés par les élèves le jour du rallye et qui ne nécessite pas l'accès à Internet. Seul un poste utilisé par le professeur responsable doit être connecté au site du rallye pour la transmission des réponses obtenues par la classe en cours de jeu.

Historique

- Avril 2004 : mise en place de la 1^{re} édition du RDV.
- Entre 2004 et 2013, le programme rdv utilisé par les élèves pour avoir connaissance des problèmes, a été conçu sous la forme de pages pdf protégées par mots de passe.
- À partir de l'édition 2014, le rdv est un fichier exécutable au format « flash », format conçu pour faire de l'interactivité mais aussi de l'animation. C'est cette dimension que nous avons voulu intégrer. Ainsi, la compréhension de certaines des énigmes est parfois basée non seulement sur un texte mais aussi sur l'observation d'une image animée. Ce sont des énigmes d'une autre nature qui peuvent ainsi être proposées.

Compétition

► **Niveaux concernés**

3^{e} et 2^{nde}. En moyenne 60 à 70 classes participantes par édition.

- **Inscriptions à l'épreuve**
  Gratuite (entre janvier et mars).

- **Jour de l'épreuve**
  En général un vendredi au mois d'avril.

- **Durée de l'épreuve**
  1 h 30 min

Soutiens pour l'organisation

IREM de Caen-Normandie ; Inspection Pédagogique Régionale de mathématiques ; Rectorat de Caen (action culturelle).

Partenaires

CASIO ; TANGENTE ; APMEP.

Constitution de l'équipe du rallye en 2018

— Gérald Giangrande : professeur en lycée

— Jérôme Huet : professeur en collège

— Thierry Mercier : professeur en lycée

Conception et mise en forme des énigmes : tous les membres de l'équipe.

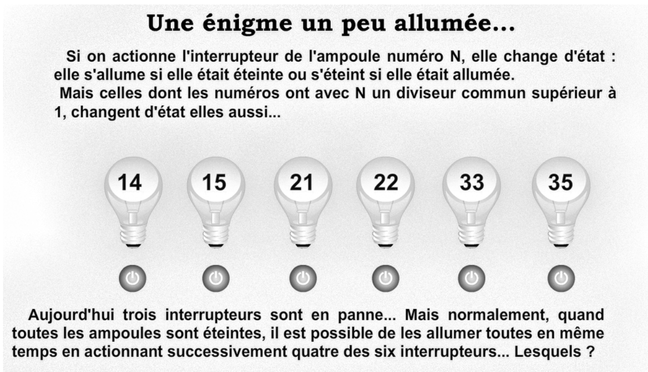
Réalisation de l'application « rdv » au format flash depuis l'édition 2014 : Thierry Mercier.

Contact

@ rdvmath-caen@laposte.net
irem.crdp.ac-caen.fr/rallye/debut.php

Une énigme un peu allumée (énigme 2 de l'édition 2018)

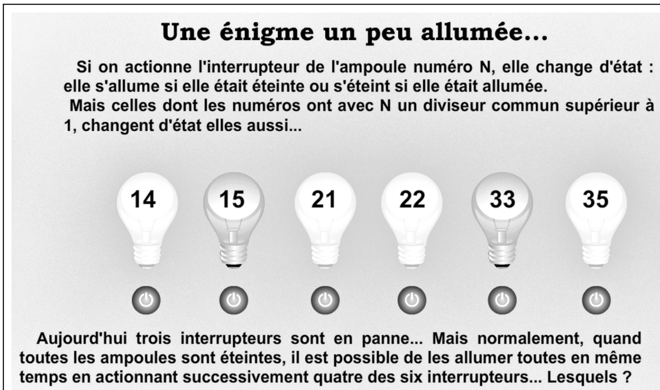
Énoncé



(copie d'écran du RDV18)

Commentaire

Quand les élèves découvrent cette énigme, ils peuvent seulement cliquer sur les interrupteurs situés en dessous des ampoules 14, 15 et 21 et visualiser ainsi l'effet obtenu. Par exemple en cliquant sur le 1er interrupteur, on constate ceci :



(copie d'écran du RDV18)

Si on clique une 2^{e} fois sur ce même interrupteur, les ampoules 14, 21, 22 et 35 s'éteignent, mais si, au lieu de cliquer à nouveau sur ce 1er interrupteur, on clique sur le 2^{e} (ampoule 15), alors les ampoules 21 et 35 s'éteignent, tandis que s'allument les ampoules 15 et 33... Le fait de ne pas pouvoir cliquer sur les trois derniers interrupteurs était motivé par notre volonté d'éviter que les élèves n'obtiennent par hasard une solution du problème par une série de clics aléatoires, et de susciter une véritable démarche mathématique en les amenant à réfléchir sur ce qui se passerait si les interrupteurs étaient opérationnels...

Pourquoi cette énigme ?

Cette énigme en lien avec les nombres entiers repose en fait sur peu de connaissances en arithmétique même si elle permet de mobiliser la notion de diviseurs d'un entier. Dans l'énoncé nous avons d'ailleurs préféré ne pas utiliser le vocable d'entiers premiers (ou non) entre eux pour que cela ne soit pas un obstacle à la recherche dans le contexte ludique du rallye. Il s'agissait surtout ici de mettre en valeur des qualités d'organisation, d'ingéniosité et d'imagination pour venir à bout de l'apparente complexité de cette énigme.

Aide proposée lors du rallye

Une aide facultative était proposée aux élèves pour cette énigme. Si l'aide était prise, il en coûtait une pénalité de -2 pts pour la classe mais cela pouvait être utile en cas de blocage.

L'aide proposée suggère de visualiser la situation sous la forme du tableau à double-entrée ci-dessous.

Elle précise que les croix sur la ligne de l'interrupteur 14, signifient qu'actionner cet interrupteur change l'état des ampoules 14, 21, 22 et 35. Elle invite les élèves à compléter les lignes suivantes.

Elle fait également remarquer que pour passer d'« éteinte » à « allumée », une ampoule doit changer d'état un nombre impair de fois.

Ampoule / Interrupteur	14	15	21	22	33	35
14	X		X	X		X
15						
21						
22						
33						
35						

Une fois le tableau complété, on obtient ce qui suit.

On peut ensuite raisonner à l'aide de ce tableau en s'appuyant sur l'information que 4 interrupteurs doivent être actionnés successivement pour allumer toutes les ampoules (soit 2 interrupteurs non actionnés).
Par exemple, si on considère l'ampoule 22, deux cas se présentent :

Interrupteur \ Ampoule	14	15	21	22	33	35
14	X		X	X		X
15		X	X		X	X
21	X	X	X		X	X
22	X			X	X	
33		X	X	X	X	
35	X	X	X			X

1. Elle change d'état une seule fois en actionnant l'un des interrupteurs n^{os} 14, 22 ou 33. Les trois autres interrupteurs actionnés étant ceux des ampoules 15, 21 et 35 qui sont sans effet sur cette ampoule 22.
2. Elle change d'état trois fois en actionnant les interrupteurs 14, 22 et 33 et l'un des autres interrupteurs actionnés est choisi parmi les n^{os} 15, 21 et 35.

En raisonnant ainsi on peut vite obtenir une solution au problème. En effet, dans le cas 1, on se rend compte que si l'interrupteur choisi parmi les n^{os} 14, 22 et 33 est le n^{o} 22, alors toutes les ampoules autres que la n^{o} 22, changent d'état 3 fois, et finissent donc par être allumées. Ce qui donne la série 15-21-22-35.

On peut sans doute arriver à cette solution de beaucoup d'autres façons. Un examen plus approfondi montre que c'est la seule solution.

Prolongements

On peut envisager de poser le problème de façon plus ouverte, sans donner par avance d'information sur le nombre d'interrupteurs à actionner. Cela exige *a priori* de disposer de plus de temps pour la recherche d'une solution. Le temps de l'épreuve étant relativement limité, nous avions donc choisi de fournir cette information. Cependant, le problème peut très bien être résolu sans elle. Avec le tableau ci-dessus, on peut arriver rapidement à la conclusion que les ampoules ne peuvent pas toutes s'allumer en actionnant un seul interrupteur, ou seulement deux. Nous vous laissons le soin d'examiner la situation en actionnant trois interrupteurs.

Si l'on s'affranchit de la contrainte de se situer au niveau 3^{e} ou 2nde, on peut aussi envisager une formalisation du problème utilisant d'autres objets mathématiques.

Il y en a plusieurs. En voici une qui consiste à considérer la liste des états des ampoules comme une matrice ligne où les coefficients sont égaux en valeur absolue aux numéros des ampoules et de signe négatif ou positif selon que l'ampoule est éteinte ou allumée.

Ainsi la matrice $\begin{pmatrix}-14 & 15 & 21 & -22 & 33 & 35\end{pmatrix}$ traduit le fait que les deux ampoules 14 et 22 sont éteintes et les autres allumées.

Quant aux interrupteurs, ils peuvent être assimilés à des matrices carrées diagonales d'ordre 6 dont les coefficients diagonaux sont égaux à -1 ou à 1 selon qu'ils changent l'état d'une ampoule ou pas.

Notons, par exemple, Int(14) la matrice associée à l'interrupteur n° 14, on a

$$\mathrm{Int}(14) = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

On la notera $\mathrm{Diag}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

L'action d'un interrupteur se traduit par la multiplication de la matrice ligne traduisant l'état des ampoules, par la matrice diagonale associée à l'interrupteur.

Ainsi, si on considère la matrice $\begin{pmatrix}-14 & -15 & -21 & -22 & -33 & -35\end{pmatrix}$ (ampoules toutes éteintes), l'action de l'interrupteur n° 14 se traduit par le produit

$\begin{pmatrix}-14 & -15 & -21 & -22 & -33 & -35\end{pmatrix} \times \mathrm{Diag}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

égal à $\begin{pmatrix}-14\times-1 & -15\times1 & -21\times-1 & -22\times-1 & -33\times1 & -35\times-1\end{pmatrix}$

soit à $\begin{pmatrix}14 & -15 & 21 & 22 & -33 & 35\end{pmatrix}$.

De cette façon, nous avons donc :

$\mathrm{Int}(14) = \mathrm{Diag}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

$\mathrm{Int}(15) = \mathrm{Diag}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$

$\mathrm{Int}(21) = \mathrm{Diag}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$

$\mathrm{Int}(22) = \mathrm{Diag}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

$\mathrm{Int}(33) = \mathrm{Diag}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

$\mathrm{Int}(35) = \mathrm{Diag}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

L'action successive de plusieurs interrupteurs peut alors se traduire par une succession de produits par ces matrices « interrupteurs ». Ces matrices étant diagonales, elles commutent (cela met en évidence que l'on peut actionner les interrupteurs dans un ordre quelconque).

Notons que chacune des matrices « interrupteurs » est l'inverse d'elle-même (actionner deux fois un même interrupteur revient à ne rien faire). Par exemple : $\mathrm{Int}(14) \times \mathrm{Int}(14) = \mathrm{I}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

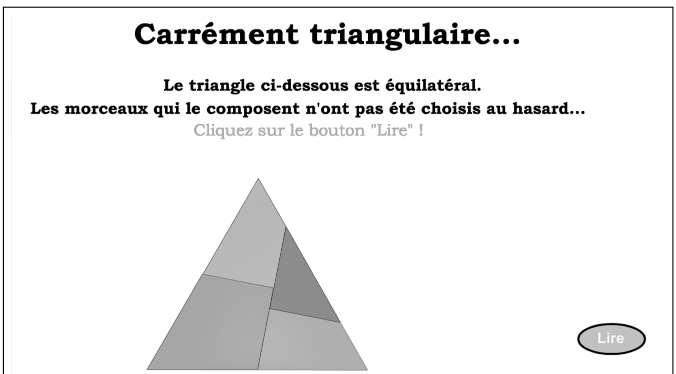
De cette façon, on peut vérifier que si l'on actionne successivement les 4 interrupteurs n[os] 15, 21, 22 et 35 cela se traduit par le produit suivant $\mathrm{Int}(15) \times \mathrm{Int}(21) \times \mathrm{Int}(22) \times \mathrm{Int}(35) = \mathrm{Diag}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Ce qui a bien pour effet de changer l'état de toutes les ampoules.

Nous espérons que cette traduction matricielle, par le nouvel éclairage qu'elle apporte à ce problème, constituera pour certains lecteurs une source d'inspiration !

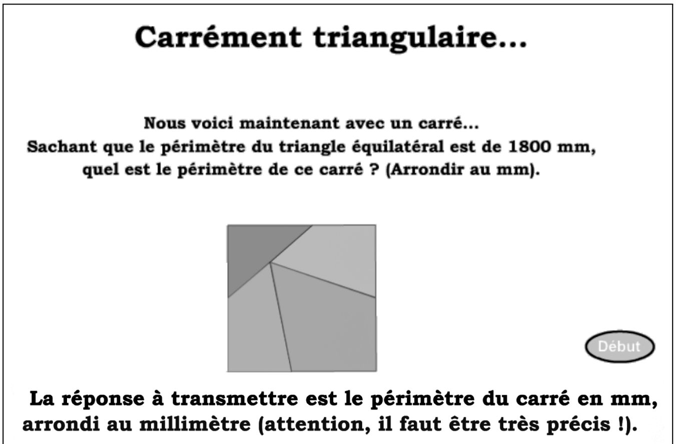
Carrément triangulaire… (bonus 1 de l'édition 2017)

Énoncé



(copie d'écran du RDV17)

Les élèves cliquent sur le bouton « lire », la figure s'anime, les 4 pièces pivotent et on obtient l'écran suivant.



(copies d'écran du RDV17)

Les élèves peuvent revenir autant de fois que nécessaire à la figure du départ à l'aide du bouton « début ». L'énoncé demande une valeur arrondie au millimètre. Comme il s'agit d'un bonus, les élèves devront être précis car ils n'ont droit qu'à une réponse sur le serveur, sans possibilité de vérification.

Pourquoi cette énigme ?

Ce problème de découpage d'un triangle équilatéral en carré est classique. Il a été proposé par le mathématicien britannique Henry Dudeney dans son ouvrage « The Canterbury puzzles ». Il existe beaucoup d'autres problèmes d'assemblages et de découpages où l'on peut travailler sur les périmètres et les aires. On pense notamment aux tangrams. Il s'agit ici de deux polygones réguliers très simples, et les élèves sont parfois surpris de constater que le périmètre du carré est plus petit que celui du triangle équilatéral. Le professeur de mathématiques connaît ce résultat que l'on peut voir comme une conséquence des inégalités iso-périmétriques.

La démarche de résolution est intéressante car elle nécessite plusieurs étapes.

— On commence par déterminer la longueur d'un côté c du triangle. $c = 1800 \div 3 = 600$ mm.

— L'aire des deux figures étant la même, il faut déterminer l'aire du triangle équilatéral à partir de ses propriétés. Plusieurs outils sont possibles : la trigonométrie (angles de 60°), le théorème de Pythagore (le pied d'une hauteur coupe la base en son milieu)...

On trouve $h = \frac{\sqrt{3}\times 600}{2} = 300\sqrt{3}$ mm.

L'aire du triangle équilatéral est donc :

$$\mathcal{A} = \frac{\text{Base}\times\text{hauteur}}{2} = \frac{600\times300\sqrt{3}}{2} = 90\ 000\sqrt{3}\ \text{mm}^2.$$

— Cette aire est également l'aire du carré dont on peut maintenant déterminer la longueur du côté en utilisant la racine carrée du résultat précédent :

$$\sqrt{90\ 000\sqrt{3}} = 300\sqrt[4]{3}\ \text{mm}.$$

— Il reste à multiplier par 4 pour obtenir le périmètre demandé,

$$\mathcal{A} = 1200\sqrt[4]{3}\ \text{mm} \backsimeq 1\ 579\ \text{mm}.$$

Quelques remarques

On le voit, ce problème est riche et utilise de nombreux outils des mathématiques du collège et du lycée : notions d'aire, de périmètre, propriétés du triangle équilatéral, trigonométrie, théorème de Pythagore, racine carrée, gestion des valeurs exactes et des arrondis...

Aucune étape n'est très difficile, mais pour un élève qui serait seul, le problème est imposant. D'autant plus que, comme il s'agit d'un bonus, les élèves ne disposent pas d'aide et il est impossible de tester la solution avant de l'envoyer. Le travail en équipe est donc ici primordial pour avancer dans les étapes de résolution et pour valider les résultats.

Une des difficultés pour les élèves de collège notamment est de gérer correctement les valeurs arrondies. Beaucoup d'élèves travaillent avec des valeurs arrondies et le risque d'avoir, au bout de quelques étapes, une réponse trop éloignée de celle attendue est réel. En particulier lors du passage $\sqrt{90\ 000\sqrt{3}} = 300\sqrt[4]{3}$. Les élèves ne connaissent pas forcément la racine quatrième et écrivent au mieux $300\sqrt{\sqrt{3}}$ ce qui est très bien. Dans la création de notre énigme nous avions testé plusieurs stratégies d'élèves et le choix de la valeur « 1 800 mm » pour le périmètre avait été fait dans ce sens. Nous nous étions également donné la possibilité de valider à posteriori des réponses suffisamment proches de 1 579 mm.

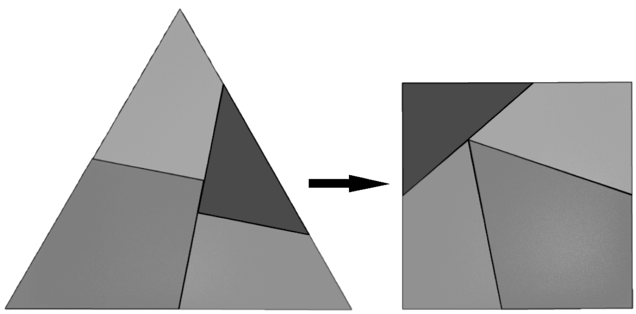
Prolongements en classe

Cette énigme est une jolie tâche complexe que l'on peut donner en 3$^{\text{e}}$ ou en 2$^{\text{nde}}$. Mais on peut aussi utiliser ce type de découpage pour travailler la notion d'aire et de périmètre dès la 6$^{\text{e}}$. Voici l'exemple d'un devoir maison de 6$^{\text{e}}$ proposé en fin d'année.

Voici comment transformer un triangle équilatéral en carré en 3 coups de ciseaux.

- Construis un triangle équilatéral ABC de 10 cm de côté.
- Place le point D et le point E sur le segment [BC] de sorte que la longueur BD mesure $\frac{1}{4}$ de la la longueur BC. La longueur BE mesure $\frac{3}{4}$ de la la longueur BC.
- Place le point F au milieu de [AB] et place le point G au milieu de [AC].
- Trace le segment [DG].
- La perpendiculaire à (DG) passant par F coupe [DG] en H. Trace [FH].
- La perpendiculaire à (DG) passant par E coupe [DG] en I. Trace [EI].

1. Trace une première fois cette figure sur ta copie en laissant les traits de construction et les lettres.



2. Reproduis une seconde fois cette figure sur une feuille de papier blanc. Découpe le triangle et ses quatre pièces, puis reconstitue le carré comme ci-dessus. Colle-le sur la copie. Tu peux le colorier comme tu veux.
3. Compare le périmètre du carré et celui du triangle équilatéral.
4. Compare les aires des deux figures.

Ici encore le travail est très riche même si les objectifs sont différents de l'énigme du rallye. Le problème ainsi posé aborde plusieurs compétences des programmes du cycle 3 :

- reconnaître, représenter, reproduire des figures (ici à partir d'un programme de construction) ;

— utiliser et représenter des fractions simples (ici les fractions $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$) ;
— comparer, mesurer, estimer des périmètres et des aires ;
— s'engager dans une démarche, manipuler, raisonner.

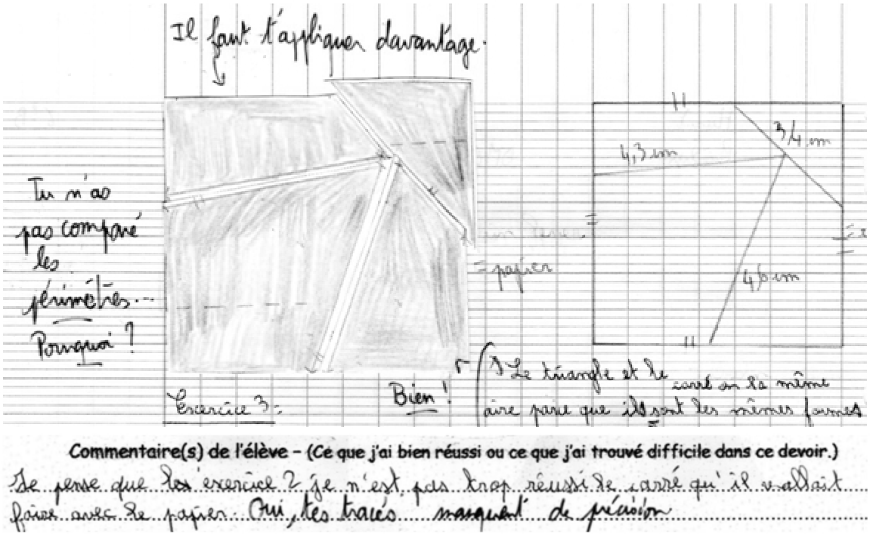
Il est intéressant de montrer aux élèves que deux figures peuvent avoir la même aire et des périmètres différents. La manipulation des différents polygones qui composent le triangle n'est pas aussi simple qu'on le pense pour des 6e. Cette dimension kinesthésique de l'activité est importante dans la compréhension de l'invariance de l'aire pour certains élèves plus en difficulté. Enfin la consigne « comparer les aires » montre que l'on n'attend pas forcément des calculs. Voici par exemple deux copies de 6e avec leur commentaire sur l'exercice réalisé :

Ici l'élève a bien compris que les aires étaient les mêmes… mais ses parents lui ont conseillé de le vérifier par le calcul. Bien sûr cette élève a trouvé deux valeurs différentes. Cela ne l'a pas perturbée si on en croit son commentaire :

Commentaire(s) de l'élève – (Ce que j'ai bien réussi ou ce que j'ai trouvé difficile dans ce devoir.)

J'ai pris un peu de temps pour le triangle mais j'ai tout de suite compris que le triangle et le carré avaient la même ~~boite~~ aire ?

Voici ce que donne cet exercice pour une élève plus en difficulté en géométrie avec un commentaire lucide :



L'élève a bien vu que les aires étaient égales mais n'a pas comparé les périmètres. Pensait-elle qu'il y avait aussi égalité des périmètres ? A-t-elle été gênée par sa figure trop imprécise pour effectuer des mesures ?

À noter que, pour simplifier le travail des 6e, l'énoncé propose de découper le segment [BC] à $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ de sa longueur. Ce découpage a l'avantage d'être simple à réaliser… mais qui a le défaut de n'être pas tout à fait exact. En effet si on note c la longueur du côté du triangle équilatéral, nous avons vu dans la résolution du problème initial que la longueur du côté du carré obtenu après découpage et assemblage sera $\frac{c\sqrt[4]{3}}{2} \simeq 0,658c$.

Dans le découpage des 6es la longueur du côté du carré correspond à la longueur GD avec les notations de l'énoncé. Or si on calcule GD, par exemple en utilisant la trigonométrie dans le triangle GDC, on observe que $\mathrm{GD} = \frac{c\sqrt{7}}{4} \simeq 0,661c$. La différence reste faible et imperceptible pour les élèves. Et elle n'enlève pas l'intérêt du problème.

Pour aller plus loin

Vous pouvez retrouver le découpage de Dudeney avec de nombreux autres problèmes et casse-tête sur le site www.gutenberg.org . Il s'agit du problème 26 du livre « The Canterbury puzzles ». Les solutions sont à la fin de l'ouvrage qui date de 1907 et qui vaut le coup d'œil pour ses illustrations, l'originalité et la variété des problèmes présentés.

Vous trouverez une version animée du puzzle de Dudeney dans l'application rdv17 (proposée en téléchargement sur le site de notre rallye). Thèrèse Eveillau en propose une aussi sur son site « Les mathématiques magiques » ainsi qu'un programme de construction et une démonstration du résultat.

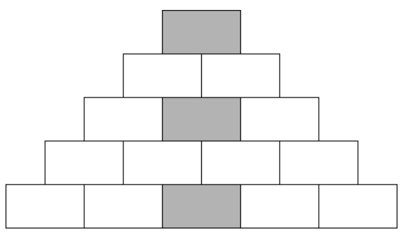
Enfin, si vous souhaitez creuser ce sujet, Jean-Pierre Friedelmeyer de l'IREM de Strasbourg a écrit un article [1] très intéressant sur des découpages en 3 coups de ciseaux. Il généralise le découpage de Dudeney à des triangles quelconques en détaillant des procédures de construction.

The mystery of the pyramid (bonus 5 de l'édition 2018)

Énoncé

Ce bonus est le premier que nous proposons dont l'énoncé est en anglais :

Each box of the pyramid must contain a number between 1 and 9, respecting two conditions :
You cannot use the same number twice on the same row.
On each row, the average of two numbers in two adjacent boxes can be seen in the box just above them.
What are the numbers in the three central coloured boxes ?



Answer to be sent : The product of the numbers in the three coloured boxes.

Commentaires

Il nous a semblé intéressant de proposer un énoncé en anglais dans l'objectif affiché du rallye de faire participer les élèves au sein du groupe classe. Ainsi les élèves ayant des compétences en anglais peuvent les mettre en avant à cette occasion. D'autre part, il nous a semblé original d'utiliser une telle pyramide reposant sur la notion de moyenne et ne contenant que des chiffres. Il est étonnant aussi de constater que certaines cases se voient imposées leur contenu.

1. Voir le bulletin de l'APMEP n°469 à la rubrique : « Dans nos classes ».

Résolution·s

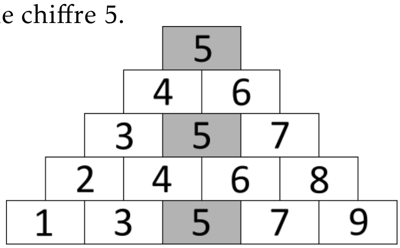
Une fois l'étape de la traduction passée, les élèves peuvent procéder à des essais. Peut-être certaines classes ont résolu ce bonus simplement en essayant de compléter les cases sans réelle stratégie. Néanmoins, les élèves doivent être certains de la réponse qu'ils proposent car l'application du rallye ne permet pas de la tester.

On s'aperçoit vite que le fait de mettre côte à côte un nombre pair et un nombre impair n'est pas possible car alors la moyenne qui doit apparaître dans la case du dessus n'est pas un nombre entier (en effet la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair).

On en conclut que dans une même ligne on ne doit avoir que des chiffres pairs ou que des chiffres impairs.

Or en considérant qu'il n'y ne peut pas y avoir deux fois le même chiffre dans une ligne donnée et qu'il n'y a que 4 chiffres pairs entre 1 et 9, on en conclut que la ligne du bas ne peut contenir que tous les impairs. Il reste à déterminer dans quel ordre.

Si on les place dans l'ordre croissant (1, 3, 5, 7, 9) ou décroissant (9, 7, 5, 3, 1) la pyramide se complète alors sans problème en effectuant les moyennes pour compléter les lignes supérieures. Les trois cases grisées contiennent toutes le chiffre 5.



D'autre part, on notera la symétrie géométrique de la figure qu'il est intéressant de rapprocher du fait que la moyenne de 2 cases symétriques est toujours égale à 5. On peut alors penser qu'une case se trouvant sur l'axe de symétrie, qui est donc sa propre symétrique, prend une valeur telle que la moyenne de cette valeur avec elle-même soit égale à 5 ; ce ne peut être que 5.

La solution est donc $5 \times 5 \times 5 = 125$.

Unicité

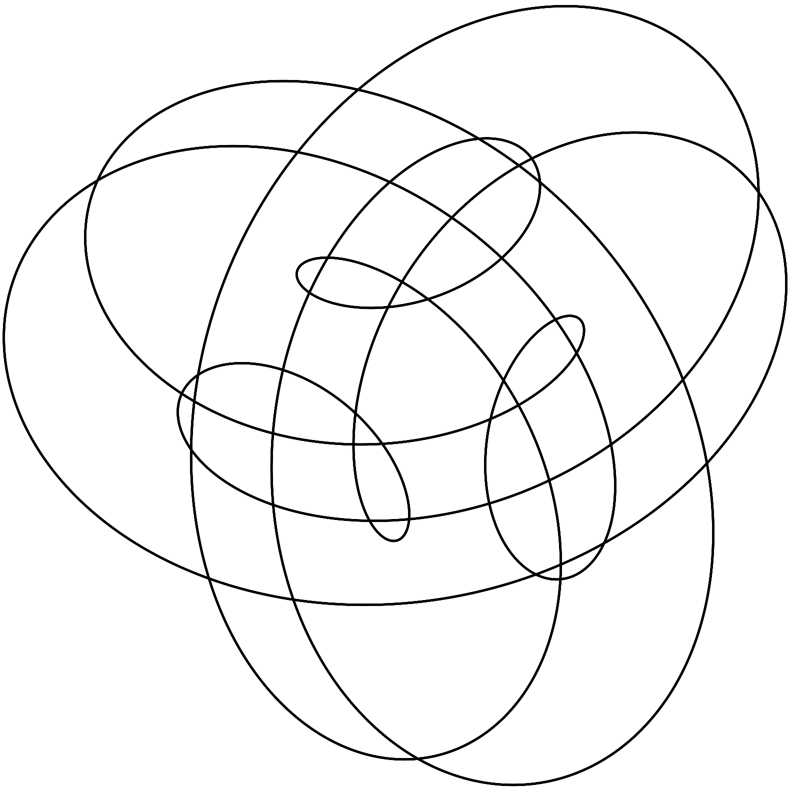
Pour les élèves, trouver une solution suffit ; pour nous, organisateurs du rallye, il est fondamental de les trouver toutes.

La pyramide présentant un axe de symétrie, à chaque solution de remplissage correspond une situation symétrique (par exemple la première ligne peut être composée des chiffres impairs dans l'ordre croissant ou dans l'ordre décroissant de façon symétrique). C'est pour cette raison que les seules cases invariantes sont celles situées sur cet axe de symétrie.

Considérons alors le fait que la moyenne entre deux nombres distincts (c'est le cas pour chaque ligne) est un nombre strictement compris entre ces deux là. On en conclut donc que les chiffres de la deuxième ligne en partant du bas sont strictement compris entre 1 et 9. Ce qui exclut 1 et 9 ; la deuxième ligne est donc constituée des chiffres de 2 à 8.

À l'aide du même principe, la troisième ligne est constituée des chiffres de 3 à 7 ; la quatrième des chiffres de 4 à 6 ; et la cinquième du seul chiffre 5. Nous avons donc complété la ligne du haut sans avoir déterminé précisément le contenu des cases des lignes précédentes. On peut alors « redescendre » la pyramide de proche en proche avec un seul choix consistant à mettre 4 et 6 dans cet ordre ou dans l'ordre inverse pour la quatrième ligne. Choix qui génère soit le remplissage trouvé plus haut, soit son symétrique.

Ce remplissage est donc unique à la symétrie près.



$$\begin{cases} x(t) = -44\cos(10t) + 50\cos(16t) + 30\cos(-8t - 90) \\ y(t) = -44\sin(10t) + 50\sin(16t) + 30\sin(-8t - 90) \end{cases}$$