Rallye mathématique des collèges de Bourgogne

Présentation

Ce rallye a lieu une fois par an. Il a pour but de montrer aux collégiens que les mathématiques peuvent être abordées de façon ludique et attrayante, de donner une vision moins scolaire des mathématiques en développant des capacités de recherche personnelle sur des énoncés invitant au jeu. Mais il cherche aussi à mettre en valeur le travail d'équipe dans une démarche scientifique.

Malgré les difficultés toujours plus nombreuses pour trouver des subventions pour organiser le rallye, l'IREM de Dijon tient à maintenir son entière GRATUITÉ !

Historique

La première édition a eu lieu en janvier 1998 avec la participation de 22 collèges de Côte-d'Or (soit 3 672 élèves) sous le nom « rallye mathématiques des collèges de Côte-d'Or ». En janvier 2007, pour sa dixième édition, un petit frère voit le jour sous le nom « rallye mathématique des collèges de Saône-et-Loire » avec la participation de 7 collèges de ce département. En 2011, les deux rallyes fusionnent pour former le « rallye mathématique des collèges de Bourgogne » et permet la participation de deux collèges de la Nièvre. En 2013 le rallye s'étend à l'intégralité des collèges de Bourgogne. Durant l'année scolaire 2016/2017 le rallye a fêté ses 20 ans d'existence avec une participation de 7 747 élèves soit 70 collèges. En février 2019 aura lieu la 22^{e} édition.

Compétition

— Niveaux : 6^{e}, 5^{e}, 4^{e} et 3^{e}.

— Nombre de participants : 60 à 75 collèges, 1 600 à 2 100 équipes, 6 000 à 8 000 élèves.

— Modalités : équipe de 4 élèves maximum, qui doit s'organiser pour chercher et rendre une seule copie contenant leur solution. Pour les 6^{e} - 5^{e} les solutions de certains exercices sont à compléter sur la feuille-réponse. Ils peuvent s'aider de tout ce qu'ils souhaitent sauf du téléphone portable, d'internet et des cerveaux de leurs surveillants.

► **1re étape**

— Sujets : un sujet 6e - 5e et un sujet 4e - 3e.

— Date / lieu : les épreuves du rallye ont lieu un vendredi après-midi, fin janvier ou début février dans les établissements des collégiens inscrits et durent 2 h.

— Correction : les copies sont réparties parmi l'ensemble des professeurs concernés qui les corrigent. Un classement par département et pour l'académie est établi.

— Récompenses : une cérémonie récompense les huit premiers groupes de chaque niveau en Côte-d'Or. Ailleurs, les modestes récompenses sont adressées directement aux établissements.

► **2nde étape**

Depuis juin 2011, est organisée une « super finale » à l'université des sciences de Bourgogne, à Dijon. Lors de cette journée, sont réunies les deux premières équipes de Côte-d'Or et de Saône-et-Loire, et les premières de la Nièvre et de l'Yonne, pour chaque niveau. Le but est de déterminer la meilleure équipe de Bourgogne, à travers 3 épreuves reposant sur la manipulation d'objets mathématiques, le tout dans une ambiance ludique et conviviale. Durant cette journée, les élèves participent aussi à des conférences, assistent à des expériences dans des laboratoires universitaires et découvrent la faculté.

► **Type d'épreuves proposées**

Chaque sujet comporte une huitaine d'exercices communs pour les 6e - 5e, avec deux exercices spécifiques pour les uns ou les autres. Idem pour 4e et 3e.

Les exercices se divisent en « énigmes » qui ne demandent pas d'explications et en « recherches » qui appellent des justifications.

Partenaires

IREM de Dijon, Université de Bourgogne, Institut de Mathématiques de Bourgogne, Conseil Départemental de Côte-d'Or, Conseil Départemental de Saône-et-Loire, APMEP, Aleph, la revue Cosinus, Crédit Mutuel, Casio.

Contact : Groupe Rallye des collèges, IREM de Dijon

✉ Faculté science Mirande, BP 47 870, 21078 DIJON Cedex
☎ 03.80.39.52.30
@ iremsecr@u-bourgogne.fr
rallyemath.u-bourgogne.fr

Aux quatre coins de la Bourgogne en saluant la Franche-Comté (énigme commune, 2018, 6^{e}-5^{e})

Énoncé

Remplir la grille de nombres croisés de la feuille réponse.
Les consignes ne sont données que pour des nombres s'écrivant avec au moins deux chiffres.
Si plusieurs nombres sont sur la même ligne ou la même colonne, les consignes sont séparées par une barre oblique /.

Extrait feuille réponse :
Horizontalement

- I Multiple de 21 dont la somme des chiffres est 21 / Département bourguignon
- II Nombre associé au carbone utilisé par les archéologues / Plus petit multiple de 3 dans sa centaine
- III Cinq territoires de Belfort
- IV La Haute-Saône en verlan / Somme des quatre premiers nombres impairs
- V Nombre qui s'écrivait MMXVIII chez les Romains
- VI Plus petit multiple de 21 possible / Pour le Jura

Verticalement

1. Département bourguignon / Autre département bourguignon avec un chiffre inutile
2. Nombre palindrome
3. Doubs et carré
4. Année de la médaille Fields de Cédric Villani
5. L / 10 heures et 780 secondes en minutes
6. Multiple de 12 / Département bourguignon

	1	2	3	4	5	6
I				■		
II			■			
III	■				■	
IV			■			■
V		■				
VI				■		

Domaine

L'énigme porte sur des notions variées des programmes de 6[e] et 5[e] : numération (chiffres romains, écriture d'un nombre), multiples et diviseurs, calculs.

Par ailleurs, certaines définitions visent à tester la culture générale et scientifique des élèves.

Dans le cadre de la Réforme des collèges, il permet de toucher deux domaines : domaine 1.3 (langage mathématique) pour les notions mathématiques et le domaine 5 (représentation du monde) quant aux questions de culture générale et scientifique.

Analyse

C'est une énigme qui est donnée en début d'énoncé afin de rassurer les élèves.

Elle porte sur des notions élémentaires de mathématiques et de culture générale.

Ce type d'exercice présente un certain avantage puisque les solutions s'enchainent et permettent de s'auto-corriger. Mais c'est aussi un inconvénient lorsque les élèves se trompent et enchainent les erreurs.

Solution

Horizontalement

I Multiple de 21 dont la somme des chiffres est 21 :

Il y a 3 cases donc le nombre s'écrit avec 3 chiffres. En **I1**, on a soit 2 (de 21), soit 7 (de 71). En **I2**, il y a un 7. **Si** en **I1** on a un 2, alors il reste : $21-7-2=14$ qui n'est pas composé d'un seul chiffre. Donc en **I1** on a un 7. Par conséquent : $21-7-7=7$; et on a bien : $777=21\times37$.

Département bourguignon :

Comme en **I5** on a un 5, c'est donc la Nièvre (58).

II Nombre associé au carbone utilisé par les archéologues :

Le carbone 14 est utilisé en datation.

Plus petit multiple de 3 dans sa centaine :

Comme en **II4** il y a un 2, « dans sa centaine » signifie qu'on est entre 200 et 299. Le plus petit multiple est 201 (la somme des chiffres est un multiple de 3).

III Cinq Territoire de Belfort :

Le département du Territoire de Belfort porte le numéro 90. Donc $5\times90=450$.

IV La Haute-Saône en verlan :

La Haute-Saône a pour numéro de département 70, donc en verlan : 07.

Somme des quatre premiers nombres impairs :

Les quatre premiers nombres impairs sont 1, 3, 5 et 7 et leur somme vaut 16. Ce qui confirme le 1 en **IV4** et le 6 en **IV5**.

V Nombre qui s'écrivait MMXVIII chez les romains :

MMXVIII = 2018 ; ce qui confirme le 2 en **V3**, le 0 en **V4** et le 1 en **V5**.

VI Plus petit multiple de 21 possible :

En **VI3** on a mis un 5, et en **VI1** un 1, ce nombre doit s'écrire 1_5. Seul un multiple de 5 se termine par 5, c'est donc 105 car $21 \times 5 = 105$.

Pour le Jura :

Le numéro du département du Jura est 39.

Verticalement

1. Département bourguignon :

   Côte-d'Or (21), Nièvre (58), Saône-et-Loire (71), Yonne (89).

   C'est la Saône-et-Loire ; voir le raisonnement de « horizontal I ».

   Autre département bourguignon avec un chiffre inutile :

   Le chiffre inutile en tête d'un nombre est 0.

   La Côte-d'Or est le seul « autre » département de Bourgogne possible qui n'a pas encore été placé dans cette colonne et en prenant compte de la réponse à **VI**.

2. Nombre palindrome :

   Un nombre palindrome est un nombre que l'on peut lire dans les deux sens, sans que cela ne change sa valeur.

   Les réponses à **II2** et **III2** donnent bien deux 4. La réponse à IV2 donne un 7 en I2.

3. Doubs et carré :

   Le département du Doubs a pour numéro 25, et 25 est le carré de 5.

4. Année de la Médaille Fields de Cédric Villani :

   2010

5. L :

   50 en chiffre romain.

   10 heures et 780 secondes en minutes :

   10 h = 10×60 min = 600 min

   780 s = 780 s : 60 s/min = 13 min

   Donc 10 h 780 s = 600 min + 13 min = 613 min.

6. Multiple de 12 :

   Comme en **I6** on a un 8, et en **II5** un 1, ce nombre doit s'écrire : 81_.
   On cherche les multiples de 12 au-delà de 810. $12 \times 68 = 816$.

   Département bourguignon :

   Comme en **V6** on a 8 et en **VI6** 9, le numéro est bien celui de l'Yonne.

Constat

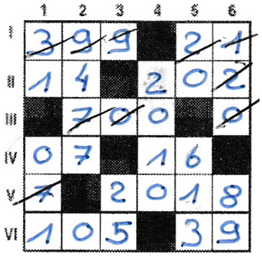
Cet exercice présente 3 possibilités de réponses :

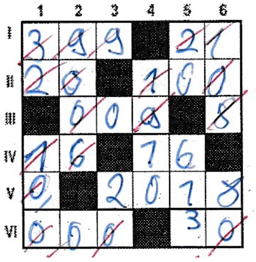
— totalement réussi ;

— non traité, l'absence de réponse est peut-être due à un manque de culture de la région et de maitrise des nombres ;

— quelques réponses justes (chiffres romains, département, médaille Fields, etc.).

L'exercice a été réussi de la même manière quel que soit le niveau.





Pour aller plus loin

Ce type d'exercice peut être réinvesti dans n'importe quel niveau des cycles 3 et 4, en modifiant l'énoncé, lors d'un club de mathématique ou durant la semaine des mathématiques afin de diversifier les exercices.

Ce tournoi nous donne le tournis (énigme commune, 2018, 6^e-5^e et 4^e-3^e mais réservée aux 4es pour ce dernier)

Énoncé

On souhaite réaliser un tournoi entre 7 équipes sportives.
Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres et ne peut jouer qu'un seul match par jour.
★ **Quel est le minimum de jours à prévoir pour faire toutes les rencontres ? Expliquez.**
★ Et si on ajoute une 8^e équipe, **faut-il prévoir plus de jours ? Expliquez. (Uniquement 4^e)**

Domaine

Le dénombrement est une notion essentielle des mathématiques, notamment lorsque l'on avance dans un cursus mathématique. Il est donc important pour nous d'essayer de présenter chaque année un exercice de ce genre afin d'initier les élèves à ce domaine important des mathématiques.

Analyse

Cet exercice permet d'initier les élèves aux problèmes ouverts qui demandent des compétences multiples : chercher (comprendre l'énoncé), modéliser, raisonner, calculer et communiquer leur réponse. Dans celui-ci, les élèves pouvaient aussi choisir leur modélisation : schématiser leur réponse, effectuer des calculs ou prendre le point de vue d'une équipe.

Un intérêt supplémentaire est qu'il est proposé à plusieurs niveaux, et peut ainsi être résolu par des méthodes et raisonnements différents.

À ce titre, pour les élèves de 4^e, la seconde question permet d'aller plus loin dans le raisonnement et de faire comprendre aux élèves que, pour 7 ou 8 équipes, la durée du tournoi sera la même.

En plus de l'actualité sportive de l'année 2018, cet exercice permet aux élèves participant à des tournois de comprendre l'intérêt des mathématiques pour l'organisation de ceux-ci.

Solution

Une des solutions consiste à présenter les matchs sous la forme d'un tableau à double entrée. On ne complète que la partie supérieure ou inférieure à la diagonale afin de ne pas compter les matchs-retours et les matchs contre soi-même.

	A	B	C	D	E	F	G
A		3	2	5	4	7	6
B			1	6	7	5	4
C				7	6	4	5
D					1	2	3
E						3	2
F							1
G							

Chaque jour de rencontres, un nombre pair d'équipes jouent, il ne peut donc y avoir que trois matchs au maximum.
En effet, la division euclidienne de 7 par 2 donne : $7 = 3 \times 2 + 1$ avec $1 < 2$.
Ainsi, chaque jour de rencontres, une équipe ne joue pas. Ce ne peut pas être 2 fois la même équipe ! Par exemple : A ne joue pas le jour 1, B le jour 2, ..., G le jour 7.
On donne dans ce tableau une programmation possible avec le numéro du jour dans la case de chaque match.
Il faut donc au minimum 7 jours pour faire toutes les rencontres.

► **Autres raisonnements possibles**

— Chaque équipe rencontre 6 équipes adverses. On pourrait croire qu'il y a donc $6 \times 7 = 42$ rencontres à prévoir. Mais, on compterait deux fois une même rencontre puisque lorsqu'une équipe A rencontre une équipe B, la B rencontre donc la A.

Le nombre de rencontres nécessaires est donc : $42 : 2 = 21$.

— On peut aussi raisonner en imaginant qu'une 1^re^ équipe rencontre les 6 autres, puis que la 2^e^ n'a plus que 5 rencontres, etc. ; ce qui fait donc $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ rencontres.

— Enfin, en une journée, on ne peut faire jouer que 3 rencontres, soit 6 équipes, la septième n'ayant pas d'adversaire. Comme $21 = 7 \times 3$, il faut donc prévoir un minimum de 7 jours.

On procède de la même façon pour 8 équipes.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		1	2	3	4	5	6	7
B			3	2	7	4	5	6
C				1	6	7	4	5
D					5	6	7	4
E						1	2	3
F							3	2
G								1
H								

Cette fois, le nombre de rencontres est : $7 \times 8 : 2 = 28$.
Chaque jour, il peut y avoir quatre matchs au maximum.
En effet : $8 = 4 \times 2$.
$28 : 4 = 7$
Il faut donc au minimum 7 jours pour faire toutes les rencontres ; il ne faut pas prévoir plus de jours que lorsqu'il y a 7 équipes.
On propose donc ci-contre une programmation du tournoi.

Constat

Les élèves de 6^e n'ont pas très bien réussi cet exercice, ne sachant pas comment le résoudre.

La première raison est qu'ils ont mal compris l'énoncé et ont compté un match par jour.

Recherche 6 : Il faut 21 jour pour que toute les équipes se remcontrent.

1 jours : équipes 1-2	8 jours : équipes 2-4	15 jours : équipes : 3-7
2 jours : équipes 1-3	9 jours : équipes 2-5	16 jours : équipes : 4-5
3 jours : équipes 1-4	10 jours : équipes : 2-6	17 jours : équipes : 4-6
4 jours : équipes 1-5	11 jours : équipes : 2-7	18 jours : équipes : 4-7
5 jours : équipes 1-6	12 jours : équipes : 3-4	19 jours : équipes : 5-6
6 jours : équipes 1-7	13 jours : équipes : 3-5	20 jours : équipes : 5-7
7 jours : équipes : 2-3	14 jours : équipes : 3-6	21 jours : équipes : 6-7

Soit, ils ont fait un dénombrement correct mais se sont trompés dans le nombre de jours nécessaires.

Enfin, quelques équipes ont pensé à utiliser la division.

Recherche 6 :

Il ya 21 matchs et on peut en disputer que 3 par jour du coup 21 ÷ 3 = 7
Il faut prévoir minimum 7 jours de compétition

Le niveau 5^e a tout de même mieux réussi ce type d'exercice.

Pour quelques équipes, on peut envisager que leur expérience de la compétition les ait aidées dans la résolution du problème. Ainsi, leur réponse se résume alors à une phrase exposant le point de vue d'une équipe, ce que nous n'avions pas envisagé comme solution.

7 équipe − mon équipe = 6 équipes donc 6 jours +
1 jour de repos = 7 jours

Mais nous avons rarement eu un dénombrement comme avec les 6^e, et si c'était le cas, ce fut présenté sous forme de tableau.

Les réponses du niveau 4^e regroupe l'intégralité de celles des 6^e et 5^e mais en ajoutant la solution sous forme de tableau.

La question 2 a été bien réussie mais ne semble pas les avoir laissés perplexes sur le résultat.

Tampon Patate (énigme commune, sujet 2018, 4^e^-3^e^)

Énoncé

Peut-être savez-vous que l'on peut fabriquer un tampon à l'aide d'une pomme de terre.
On dispose d'une pomme de terre (O.G.M. !!!) en forme de cube de 8 cm d'arête. (Elles s'empilent mieux dans les cagettes !)
En coupant un « coin », on veut fabriquer un tampon triangulaire de la façon suivante :

- à partir d'un sommet S, on place un point A sur une arête, à 3 cm de S ;
- on place un point B sur une autre arête, à 4 cm de S ;
- on place un point C sur la 3e arête, à 5 cm de S ;
- on coupe le « coin » de la pomme de terre suivant le plan (ABC), on met de l'encre sur le triangle ABC et on tamponne…

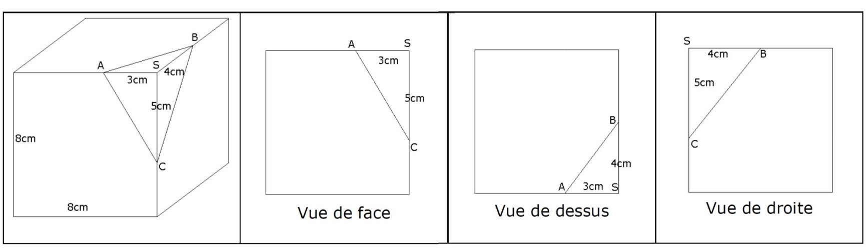
★ **Dessinez en vraie grandeur la forme du dessin obtenu.**
Aide : Fabriquez ou dessinez un patron des 3 faces du « coin » du cube, puis construisez le triangle ABC à la règle et au compas.

Analyse

C'est un exercice de géométrie de l'espace : l'IREM souhaite donner un coup de projecteur à ce domaine. En effet, la part de géométrie dans les programmes semble diminuer et les élèves ont généralement davantage de difficultés dans ce domaine des mathématiques.

Il s'agit donc, à partir d'une situation concrète et (peut-être) connue des élèves, de les intéresser aux problèmes géométriques du plan et de l'espace (visualisation dans l'espace), comme cela est préconisé dans les programmes de cycle 4 (partie A, Espace et géométrie).

Solution



Il suffit ensuite de construire le triangle ABC à la règle et au compas.
Les côtés mesurent environ : AC $\simeq$ 5,8 cm ; AB = 5 cm ; BC $\simeq$ 6,4 cm.

Constat

Quel que soit le niveau, l'exercice est soit réussi, soit pas du tout. Les échecs semblent avoir pour origine les difficultés à visualiser en trois dimensions. Ainsi, le tracé des trois faces est difficile.

Lorsque l'exercice est traité, les réponses sont précises, soignées et l'utilisation du compas est maîtrisée.

Prolongements possibles

On peut demander de calculer le volume du cube tronqué afin d'évaluer la capacité des élèves à gérer la notion de volume (calcul par soustraction de volumes de solides de référence).

Pour un exercice en classe, afin que les élèves plus fragiles puissent s'investir, on peut envisager également de calculer le volume de la pyramide afin de donner une question plus proche des programmes.

On peut aussi envisager de chercher diverses formes de coupes du cube (triangles divers, rectangles, carré, pentagone, hexagones, autres). Sous forme fermée en suggérant des formes ou plus ouvertes en laissant découvrir les polygones possibles...

À se crêper le chignon ! (sujet 2018 des 4^{e}-3^{e}, réservé aux 3es)

Énoncé

On dispose de deux piles de crêpes industrielles, donc toutes de même forme, même volume et même masse (nombre entier de grammes, évidemment supérieur à 1). Les deux piles sont posées sur deux plats identiques.
Avec le plat, la première pile pèse 998 g.
Avec le plat, la seconde pèse 1 153 g.
On retire une pile d'un plat que l'on pose au-dessus de l'autre pile (donc avec un seul plat en dessous). Le tout pèse alors 1 401 g.

★ Une matheuse bretonne dit que l'on peut trouver : **la masse de chaque plat, la masse d'une crêpe et le nombre de crêpes dans chaque paquet. Donnez-les lui !** Mais non, il ne manque aucun renseignement, lisez bien et **trouvez aussi le nombre total de crêpes !**

Analyse

C'est un exercice classique d'arithmétique sous la forme d'un problème ouvert, ce qui peut dérouter les élèves par la somme de compétences mises en jeu :

— chercher : lire l'énoncé et prendre en compte toutes les informations ;

— modéliser : choisir un cadre de résolution pour le problème (schéma, équation, arithmétique...) ;

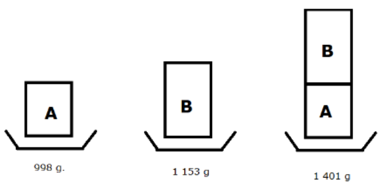
— raisonner : effectuer un raisonnement logique simple et en groupe ;

— calculer : notion de multiple et de diviseur, connaissance des opérations ;

— communiquer : rédiger la réponse avec un langage mathématique correct.

Cependant, la situation s'appuie sur un cadre concret connu des élèves (les crêpes et la notion de pesée).

Solution



La masse des 2 plats et des 2 piles est de : 998 g + 1 153 g = 2 151 g.

La masse d'un plat est de : 2 151 g − 1 401 g = **750** g.

La masse de la 1re pile de crêpes est de : 998 g − 750 g = 248 g.

La masse de la 2e pile de crêpes est de : 1 153 g − 750 g = 403 g.

La masse d'une crêpe doit donc être un diviseur commun à 403 et 248.

La liste des diviseurs de 248 est : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; **31** ; 62 ; 124 et 248, et la liste des diviseurs de 403 est : 1, 13, **31**, 403. Ainsi le seul diviseur commun supérieur à 1 est 31.

Or $248 = 8 \times 31$ et $403 = 13 \times 31$.

Les nombres et la masse d'une crêpe étant des entiers, on peut en déduire que la masse d'une crêpe est de **31 g** et leurs nombres **8** et **13**. Le total est : 8 + 13 = **21** encore !!!

Constat

Les réponses sont variées et ne manquent pas d'intérêt. Nous avons eu des mises en équation, des réponses argumentées à la manière d'un problème classique d'arithmétique ou encore des schémas, des graphiques.

En général, les élèves de 3e ont trouvé la masse du plat. Lorsque le reste des questions est traité, cela est juste et bien rédigé. Malgré cela, très peu d'élèves ont traité le reste des questions, par manque de temps probablement.

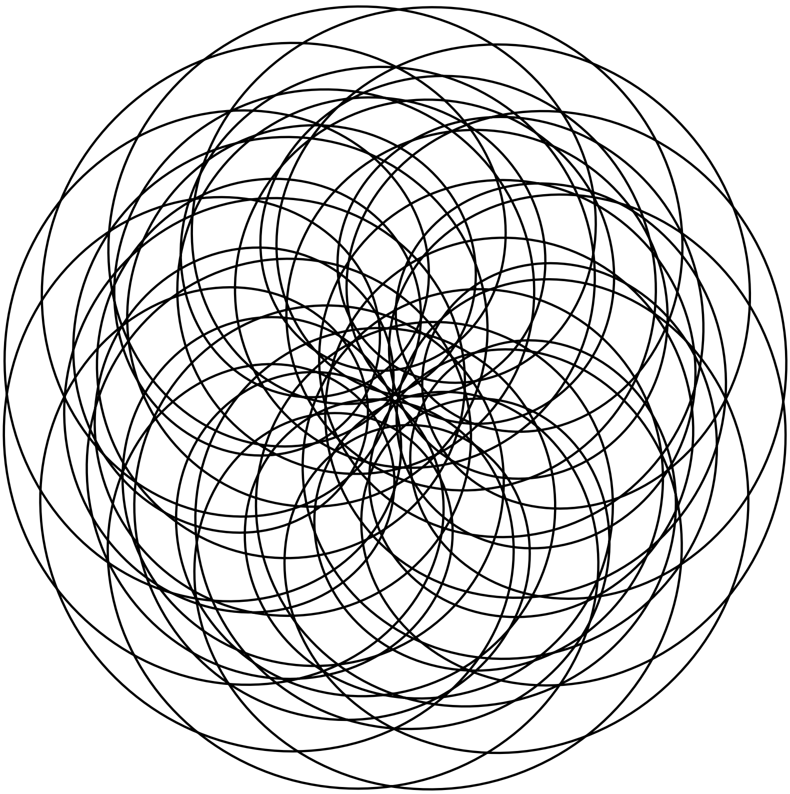
soit x la masse du plat
$1153 + 998 - x = 1401$
$2151 - x = 1401$
$-x = 1401 - 2151$
$x = \frac{-750}{-1}$
$x = 750$
le plat a une masse de 750 g
$998 - 750 = 248$
la 1ère pile a 248 grammes de crêpes
$1153 - 750 = 403$
la 2è pile contient 403 grammes de crêpes.
Pour savoir le nombre de crêpes dans chaque paquet, il faut chercher le plus grand ~~multiple~~ diviseur commun de 248 et 403 afin de trouver la masse d'une crêpe.
Décomposition – de 248 : $248 = 2^3 \times 31$
– de 403 : $403 = 13 \times 31$
le plus grand multiple commun à 248 et 403 est 31, la masse d'une crêpe est de 31 grammes et 2 au cube est égal à 8, il y a donc 8 crêpes de 31 grammes dans le paquet de la 1ère pile et 13 crêpes de 31 grammes dans le paquet de la 2è pile.
$13 + 8 = 21$ En tout, il y a 21 crêpes.

Poids du plat :
$998 - (1401 - 1153) = 998 - 248$
$= 750$
Le plat pèse 750 g.
On enlève le poids du plat de chaque pile :
$998 - 750 = 248$ g
$1153 - 750 = 403$ g
Décomposition en nombres premiers de 248 et 403 :
$248 = 2 \times 2 \times 2 \times 31$
$403 = 13 \times 31$
Les diviseurs communs à 248 et 403 sont 1 et 31.
Comme une crêpe ne peut pas peser 1 g, on en déduit qu'une crêpe pèse 31 g.
Nombre de crêpes dans chaque plat :
$403 \div 31 = 13$
$248 \div 31 = 8$
Dans le paquet qui pèse 248 g il y a 8 crêpes.
Dans le paquet qui pèse 403 g il y a 13 crêpes.
$13 + 8 = 21$
Il y a 21 crêpes au total.

Prolongement en classe

C'est un exercice pertinent pour explorer l'arithmétique en problème ouvert. Les questions intermédiaires pourraient être retirées afin de demander uniquement le poids d'une crêpe.

En 3e, on peut modifier légèrement les masses données. On s'aperçoit ainsi que l'algèbre donne la masse d'un plat, puis celle des piles de crêpes, mais si les résultats ne sont pas des entiers « convenables », le problème n'a pas de solution. On fait ainsi la part entre arithmétique et algèbre... et bon sens !



$$\begin{cases} x(t) &= 92\cos(5t+111)-100\cos(41t+119)+32\cos(17t-40)\\ y(t) &= 92\sin(5t+111)-100\sin(41t+119)+32\sin(17t-40)\end{cases}$$