Rallye mathématique des écoles de Bourgogne & Franche-Comté

Présentation

Créé à l'initiative de l'OCCE (Office Central de la Coopération à l'École) de Côte-d'Or, de l'IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) de Dijon et de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) Bourgogne, le projet voit le jour en Côte-d'Or en 2011-2012.

Année test : 30 classes (environ 750 élèves) de cycle 3 (CE2, CM1, CM2) participent. La DSDEN de Côte-d'Or, avec le groupe départemental maths, en est le partenaire (jusqu'en 2015).

Progressivement, le rallye s'ouvre au cycle 2, aux grandes sections, à l'ASH, aux 6^{e} (dans le cadre de liaisons CM2-6^{e}). Il s'étend aussi à d'autres départements de Bourgogne et, cette année, à la Franche-Comté. En 2018, 705 classes, soit environ 15 000 élèves, ont participé.

Les partenaires actuels sont les OCCE de Côte-d'Or, Saône-et-Loire, Yonne, Doubs, Jura, Haute-Saône et Territoire de Belfort, l'APMEP de Bourgogne, l'IREM de Dijon.

Objectifs du projet

Permettre aux élèves d'aborder la résolution de problèmes sous forme coopérative : manipuler, dialoguer, réfléchir ensemble, argumenter pour valider une solution commune à la classe.

Calendrier

1^{re} étape : pendant une semaine fin janvier.

2^{e} étape : pendant la semaine des Mathématiques, mi-mars.

Les enseignants choisissent le moment de la semaine pour la passation des épreuves. Ils envoient les réponses des classes dès le début de la semaine suivante. Les solutions sont alors publiées.

Il n'y a pas de classement, pas de récompenses, ce n'est pas une compétition. Chaque classe reçoit un diplôme de participation, chaque élève son diplôme individuel.

Modalités de travail

À chaque étape, 15 exercices sont répartis sur les 7 niveaux (un ou plusieurs sont communs à deux, voire trois niveaux). Chaque classe résout les 3 ou 4 exercices de son niveau.

Les énoncés couvrent tous les domaines d'apprentissage en mathématiques et s'inscrivent dans les programmes de l'école maternelle, élémentaire ou 6e. Les problèmes de chaque niveau sont à résoudre en une heure ; le travail de groupe est à privilégier. Pour chaque problème, les élèves de la classe ont à trouver un accord sur la solution qui sera renvoyée ; un travail de mise en commun, postérieur ou pas au temps de la résolution, est indispensable.

Lors des liaisons maternelle-élémentaire ou école-collège, il est possible de faire des équipes mixtes GS-CP ou CM2-6e.

La brochure

Au cours du troisième trimestre, la brochure de l'année est éditée, reprenant tous les exercices, analysant les problèmes abordés, les réponses apportées et donnant des pistes pédagogiques et des prolongements possibles. Ces brochures sont en téléchargement libre :

www.occe.coop/~ad21/Rallyemaths.html

Contact

🖂 OCCE21, 1 rue Bernard Courtois, 21000 Dijon
☎ 03 80 45 50 46
@ ad21@occe.coop
🌐 irem.u-bourgogne.fr/rallyes-mathematiques/ecoles.html

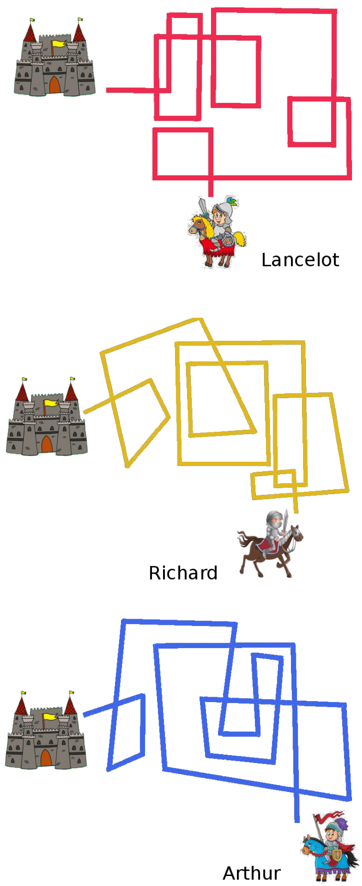
Chevalier, prends garde !

L'énoncé suivant a été donné sur 3 pages pour faciliter la lecture des jeunes enfants.

Énoncé

Une sorcière a jeté un sort sur le pays de la princesse au bois dormant. Pour se déplacer, il faut aller tout droit ou tourner à gauche. Si on tourne à droite, on se change en grenouille.

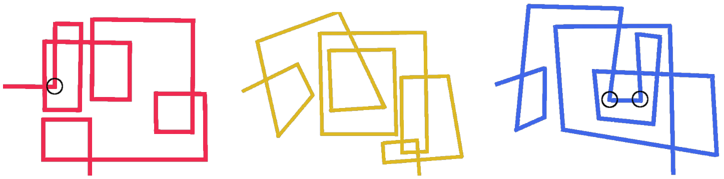
Quel est le chevalier qui va atteindre la princesse ?



Solution

Le chevalier qui arrive jusqu'à la princesse est **Richard**.

Justification



Cet exercice est prévu pour le niveau GS-CP.

Il met en œuvre des compétences en topologie (orientation) et gestion de données. Même si l'enseignant ne doit pas intervenir lors des passations, dans les classes de maternelle ou de cours préparatoire, il lit l'énoncé.

Il est proposé une version papier, et une version pour le TNI (tableau numérique interactif), programmée avec le logiciel « ActivInspire ».

La perception de l'exercice par les enfants n'est pas la même s'ils ont le papier en main ou si l'exercice est projeté sur un écran. L'écran est fixe et vertical, alors que le papier peut être orienté pour rester dans le sens de la marche.

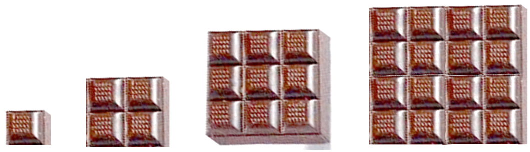
Dans les deux cas, il peut être nécessaire d'avoir un objet orienté et avec la gauche marquée, à déplacer sur le trajet. Dans certaines classes, l'enseignant a même dû tracer les parcours au sol. Il est important de faire vivre concrètement aux enfants des activités topologiques dans la salle de motricité, dans la cour, dans la classe, etc. pour se les approprier corporellement avant de les intégrer mentalement.

Pour information, le taux de réussite a été de 81%.

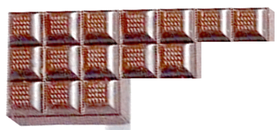
Carrément chocolat !

Énoncé

Chouky fabrique des carrés avec des petits carrés de chocolat.

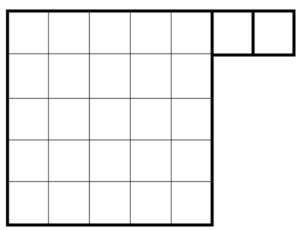


Avec ses carrés, il se rend compte qu'il peut représenter tous les nombres. Par exemple, il représente le nombre 15 avec quatre carrés (un carré de côté 3 + un carré de côté 2 + un carré de côté 1 + un carré de côté 1) :



27

Voici aussi 27 représenté :



Ainsi, 27 est représenté sous la forme d'une somme de carrés : un carré de côté 5 + un carré de côté 1 + un carré de côté 1.

Représentez 2018 **avec le moins possible de carrés. Avec quels carrés avez-vous représenté** 2018 **?**

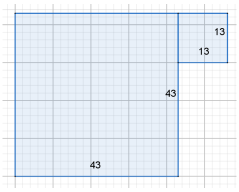
Solution

Avec le moins possible de carrés, 2 018 est représenté sous la forme de la somme des carrés de côtés : 43 et 13 (on utilise deux carrés).

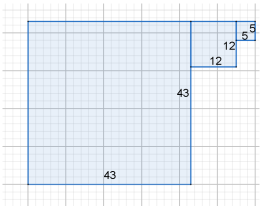
Il existe d'autres décompositions utilisant davantage de carrés, comme par exemple avec trois carrés de côtés : 44 ; 9 et 1 ou encore, avec trois carrés de côtés : 43 ; 12 et 5.

Il existe encore de nombreuses autres façons de représenter 2 018 sous la forme d'une somme de carrés.

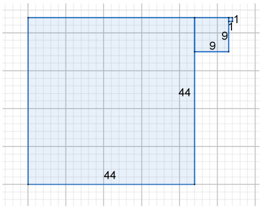
Justification



$(43 \times 43) + (13 \times 13)$



$(43 \times 43) + (12 \times 12) + (5 \times 5)$



$(44 \times 44) + (9 \times 9) + (1 \times 1)$

Lorsqu'on cherche (par tâtonnements au niveau CM2 ou 6[e], calculatrice autorisée), le plus grand carré contenu dans 2018 (ici 44 car $44 \times 44 = 1936$ et $45 \times 45 = 2025$), on ne trouve pas la décomposition permettant de représenter 2018 sous la forme d'une somme de carrés, avec le moins possible de carrés.

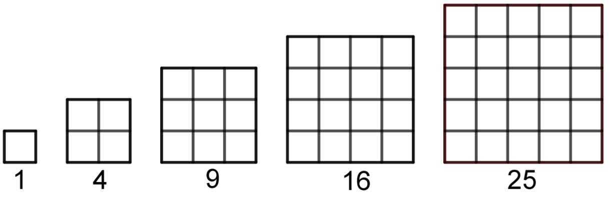
On aurait pu représenter 2018 avec deux-mille-dix-huit carrés de côté 1. C'est la décomposition utilisant le plus de carrés. Cette forme n'a pas été donnée par les classes ayant répondu à cet exercice.

Par contre, nous avons trouvé parmi les réponses proposées : cent-vingt-six carrés de côté 4 et deux carrés de côté 1 (soit cent-vingt-huit carrés utilisés) ; ou quatre-vingts carrés de côté 5, un carré de côté 3, deux carrés de côté 2 et un carré de côté 1 (soit quatre-vingt-quatre carrés utilisés).

Autres activités possibles ou prolongements

Le mathématicien Joseph Louis LAGRANGE (1736-1813) a démontré en 1770, que *tout nombre entier positif peut s'exprimer sous la forme d'une somme de quatre nombres carrés*.

Les nombres carrés (parfois appelés tétragones ou quarrés) apparaissent dans des textes dès l'antiquité (par exemple dans un livre manuscrit de Nicomaque de Gérase, mathématicien grec qui vécut autour de l'an 100 à Alexandrie). Ce sont les nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'un produit où les deux facteurs sont égaux. Par exemple 9 est un nombre carré car $9 = 3 \times 3$. On peut les représenter avec des petits carrés pour former un carré (comme Chouky l'a fait avec des petits carrés de chocolat au début de l'énoncé)...



Les premiers nombres carrés sont : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961, 1 024, 1 089, 1 156, 1 225, 1 296, 1 369, 1 444, 1 521, 1 600, 1 681, 1 764, 1 849, 1 936, 2 025, 2 116...

Vous pouvez décomposer en somme de carrés tous les nombres que vous voulez, il suffira d'avoir au maximum quatre nombres carrés ; comme cela, vous aurez vérifié, sur quelques nombres, que Lagrange a raison.

Voici, par exemple, une écriture des trente premiers nombres entiers positifs sous la forme de sommes de carrés, avec au maximum quatre carrés :

$1 = (1\times1)$	$2 = (1\times1) + (1\times1)$
$3 = (1\times1) + (1\times1) + (1\times1)$	$4 = (2\times2)$
$5 = (2\times2) + (1\times1)$	$6 = (2\times2) + (1\times1) + (1\times1)$
$7 = (2\times2) + (1\times1) + (1\times1) + (1\times1)$	$8 = (2\times2) + (2\times2)$
$9 = (3\times3)$	$10 = (3\times3) + (1\times1)$
$11 = (3\times3) + (1\times1) + (1\times1)$	$12 = (2\times2) + (2\times2) + (2\times2)$
$13 = (3\times3) + (2\times2)$	$14 = (3\times3) + (2\times2) + (1\times1)$
$15 = (3\times3) + (2\times2) + (1\times1) + (1\times1)$	$16 = (4\times4)$
$17 = (4\times4) + (1\times1)$	$18 = (3\times3) + (3\times3)$
$19 = (3\times3) + (3\times3) + (1\times1)$	$20 = (4\times4) + (2\times2)$
$21 = (4\times4) + (2\times2) + (1\times1)$	$22 = (3\times3) + (3\times3) + (2\times2)$
$23 = (3\times3) + (3\times3) + (2\times2) + (1\times1)$	$24 = (4\times4) + (2\times2) + (2\times2)$
$25 = (5\times5)$	$26 = (5\times5) + (1\times1)$
$27 = (3\times3) + (3\times3) + (3\times3)$	$28 = (3\times3) + (3\times3) + (3\times3) + (1\times1)$
$29 = (5\times5) + (2\times2)$	$30 = (5\times5) + (2\times2) + (1\times1)$

Analyse des résultats

Sur les 64 classes de CM2 et 6^{e} de Côte-d'Or (nous n'avons malheureusement pas pu dépouiller les réponses des six autres départements), 6 classes n'ont rien répondu (soit 9% des classes ayant participé).

Sur les 58 réponses, 7 étaient fausses (soit 12% des réponses).

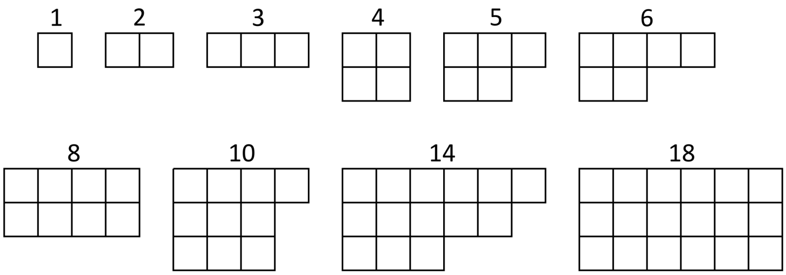
Sur les 51 réponses ayant une décomposition exacte de 2 018, seules 2 étaient avec le moins possible de carrés (soit 4% des réponses donnant un calcul exact), et 46 ont donné la solution avec des carrés de côtés 44, 9, et 1 (soit 90% des réponses donnant un calcul exact).

Lors de nos premières réunions du groupe rallye des écoles, nous cherchions, pour des CM2-6^{e}, un exercice de géométrie et calcul. Nous avons choisi de faire découvrir une propriété concernant des sommes de carrés. Pourquoi pas celle de Lagrange ?

Recherche

Ceci est le tout premier essai d'énoncé.

Voici des nombres représentés sous forme de carrés ou de sommes de carrés :



Pour dessiner les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 14 et 18, on a utilisé chaque fois un nombre minimum de carrés. Les nombres représentés avec le plus grand nombre de carrés sont 3, 6 et 14 (pour lesquels on a utilisé trois carrés)

1. Dessinez 7, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20 sous forme de carrés ou de sommes de carrés (en utilisant chaque fois un nombre minimum de carrés).
2. Parmi tous les nombres de 1 à 20, quels sont les nombres dessinés avec un seul carré ?
3. Parmi tous les nombres de 1 à 20, quels sont les nombres dessinés avec deux carrés ?
4. Parmi tous les nombres de 1 à 20, quels sont les nombres dessinés avec trois carrés ?
5. Parmi tous les nombres de 1 à 20, quels sont les nombres dessinés avec quatre carrés ?
6. Y a-t-il des nombres dessinés avec plus de quatre carrés ?

Question facultative : si vous continuez de dessiner les nombres entiers avec des sommes de carrés, combien de carrés sont nécessaires au maximum pour chaque nombre ?

Cet énoncé complet étant évidemment trop long, nous l'avons modifié, édulcoré, illustré. Nous avons voulu utiliser un langage le plus simple possible. Et la propriété de Lagrange a disparu de l'énoncé ! On la fait réapparaître dans la brochure éditée en 2018.

Mais on s'est un peu détournés de notre intention de départ et un exercice de géométrie est peu resté en géométrie mais s'est transformé en exercice de calcul.