Sur les polynômes dont les racines sont en progression arithmétique.

G.Huvent

7 octobre 2005

1 Position du problème

Soit P un polynôme de degré $n \geq 4$ dont les racines sont en progression arithmétique, en est-il de même de P', ou de l'une de ses dérivées ? Le but de ce document est de prouver, avec l'aide du logiciel de calcul formel Maple, qu'une des dérivées k-ième $P^{(k)}$ de P a également ses racines en progression arithmétique.

2 Le cas du degré 4 : un résultat prouvé par le logiciel *Maple*

Soit P de degré 4 tel que ses racines forment une suite arithmétique, les racines de P forment-elles aussi une suite arithmétique ? La session Maple suivante répond à la question.

Cas du degré 4

On note $\alpha, \alpha + r, \alpha + 2\,r, \alpha + 3\,r$ les racines de `P` et `a` son coefficient dominant (que l'on peut supposer égal à `1`).

$$\alpha, \alpha + r, \alpha + 2\,r, \alpha + 3\,r$$

D'après la factorisation, on a

```
> P:=a*(X-alpha)*(X-alpha-r)*(X-alpha-2*r)*(X-alpha-3*r);
```

$$P := a\,(X - \alpha)\,(X - \alpha - r)\,(X - \alpha - 2\,r)\,(X - \alpha - 3\,r)$$

On dérive alors `P`

```
> DP:=diff(P,X);
```

$$DP := a\,(X - \alpha - r)\,(X - \alpha - 2\,r)\,(X - \alpha - 3\,r) + a\,(X - \alpha)\,(X - \alpha - 2\,r)\,(X - \alpha - 3\,r) + a\,(X - \alpha)\,(X - \alpha - r)\,(X - \alpha - 3\,r) + a\,(X - \alpha)\,(X - \alpha - r)\,(X - \alpha - 2\,r)$$

```
> factor(DP);
```

$$2\,a\,(-3\,r + 2\,X - 2\,\alpha)\,(r^2 - 3\,X\,r + 3\,\alpha\,r - 2\,X\,\alpha + \alpha^2 + X^2)$$

Le polynôme dérivé se factorise bien.

```
> solve(DP,X);
```

$$\alpha + \frac{3}{2}\,r, \frac{3}{2}\,r + \alpha + \frac{1}{2}\,\sqrt{5}\,r, \frac{3}{2}\,r + \alpha - \frac{1}{2}\,\sqrt{5}\,r$$

On constate que les racines de `P'` sont bien en progression arithmétique de raison $\dfrac{\sqrt{5}\,r}{2}$.

3 Etude avec Maple du degré 5

La session Maple suivante constitue une étude expérimentale du degré 5.

Cas du degré 5

On note $\alpha, \alpha+r, \alpha+2r, \alpha+3r, \alpha+4r$ les racines de **P** et **a** son coefficient dominant (que l'on peut supposer égal à **1**).

D'après la factorisation, on a

```
> P:=a*(X-alpha)*(X-alpha-r)*(X-alpha-2*r)*(X-alpha-3*r)*(X-alpha-4*r);
```

$$P := a\,(X-\alpha)\,(X-\alpha-r)\,(X-\alpha-2\,r)\,(X-\alpha-3\,r)\,(X-\alpha-4\,r)$$

On dérive alors **P**

```
> DP:=diff(P,X);
```

$$\begin{aligned} DP := {} & a\,(X-\alpha-r)\,(X-\alpha-2\,r)\,(X-\alpha-3\,r)\,(X-\alpha-4\,r)+a\,(X-\alpha)\,(X-\alpha-2\,r)\,(X-\alpha-3\,r)\,(X-\alpha-4\,r)\\ & +a\,(X-\alpha)\,(X-\alpha-r)\,(X-\alpha-3\,r)\,(X-\alpha-4\,r)+a\,(X-\alpha)\,(X-\alpha-r)\,(X-\alpha-2\,r)\,(X-\alpha-4\,r)\\ & +a\,(X-\alpha)\,(X-\alpha-r)\,(X-\alpha-2\,r)\,(X-\alpha-3\,r)\end{aligned}$$

```
> racine_DP:=[solve(DP,X)];
```

$$\begin{aligned} racine\_DP := \Bigg[& \alpha+2\,r+\frac{1}{10}\sqrt{150\,r^2+10\sqrt{145}\,r^2},\ \alpha+2\,r-\frac{1}{10}\sqrt{150\,r^2+10\sqrt{145}\,r^2},\\ & \alpha+2\,r+\frac{1}{10}\sqrt{150\,r^2-10\sqrt{145}\,r^2},\ \alpha+2\,r-\frac{1}{10}\sqrt{150\,r^2-10\sqrt{145}\,r^2}\Bigg]\end{aligned}$$

On constate que les racines de **P'** sont simples, mais elles ne forment pas, a priori une progression arithmétique. On regarde alors **P''**.

```
> D2P:=diff(P,X$2):
> factor(D2P);
```

$$10\,a\,(X-\alpha-2\,r)\,(5\,r^2-8\,X\,r+8\,\alpha\,r-4\,X\,\alpha+2\,\alpha^2+2\,X^2)$$

La dérivée seconde se factorise bien.

```
> solve(D2P,X);
```

$$\alpha+2\,r,\ \alpha+2\,r+\frac{1}{2}\sqrt{6}\,r,\ \alpha+2\,r-\frac{1}{2}\sqrt{6}\,r$$

Ses racines forment une progression de raison $\frac{\sqrt{6}\,r}{2}$ et de premier terme $\alpha+2\,r-\frac{\sqrt{6}\,r}{2}$

Pour un polynôme de degré 5, deux dérivations semblent donner un résultat intéressant, plus généralement, on est amené à énoncer la conjecture suivante :

Conjecture 1 *Si P est de degré $n \geq 4$ est tel que ses racines forment une progression arithmétique, il en est de même de $P^{(n-3)}$.*

Il s'agit maintenant de vérifier expérimentalement ce résultat, de l'affiner et de préciser la raison et le premier terme de la suite des racines de $P^{(n-3)}$ et enfin de le prouver. Pour cela, Maple sera, une fois de plus un outil intéressant.

4 Elaboration d'un résultat

On procède donc, dans un premier temps, à une étude expérimentale des cas où deg $P = 6, 7, 8 \cdots$

Si **P** est de degré **n** alors

```
> P:=n->a*product((X-alpha-k*r),k=0..n-1);
```

$$P := n \to a \left(\prod_{k=0}^{n-1} (X - \alpha - k\, r) \right)$$

Par exemple

```
> P(6);
```

$$a\,(X-\alpha)\,(X-\alpha-r)\,(X-\alpha-2\,r)\,(X-\alpha-3\,r)\,(X-\alpha-4\,r)\,(X-\alpha-5\,r)$$

On définit une fonction qui calcule $\frac{\partial^{n-3}}{\partial X^{n-3}} P(n)$ et le factorise.

```
> Dn_3P:=n->factor(diff(P(n),X$(n-3)));
```

$$Dn\_3P := n \to factor\left(\frac{\partial^{n-3}}{\partial X^{n-3}} P(n) \right)$$

Et une autre fonction qui détermine les racines de cette dérivée n-3 ième.

```
> racines:=n->solve(Dn_3P(n),X);
```

$$racines := n \to solve(Dn\_3P(n), X)$$

Il ne reste plus qu'a faire quelques essais, puis à former une conjecture.

```
> racines(4);
```

$$\frac{3}{2}\,r+\alpha,\ \frac{3}{2}\,r+\alpha+\frac{1}{2}\sqrt{5}\,r,\ \frac{3}{2}\,r+\alpha-\frac{1}{2}\sqrt{5}\,r$$

```
> racines(5);
```

$$\alpha+2\,r,\ \alpha+2\,r+\frac{1}{2}\sqrt{6}\,r,\ \alpha+2\,r-\frac{1}{2}\sqrt{6}\,r$$

```
> racines(6);
```

$$\alpha+\frac{5}{2}\,r,\ \frac{5}{2}\,r+\alpha+\frac{1}{2}\sqrt{7}\,r,\ \frac{5}{2}\,r+\alpha-\frac{1}{2}\sqrt{7}\,r$$

```
> racines(7);
```

$$\alpha+3\,r,\ 3\,r+\alpha+\sqrt{2}\,r,\ 3\,r+\alpha-\sqrt{2}\,r$$

```
> racines(8);
```

$$\alpha+2\,r,\ \alpha+5\,r,\ \alpha+\frac{7}{2}\,r$$

On constate que :

Si $\deg P = n$ et si les zéros de P forment une suite arithmétique de premier terme α et de raison r, alors les trois zéros de $P^{(n-3)}$ forment une suite arithmétique de raison

$$r_n = \frac{\sqrt{n+1}}{2} r$$

et de premier terme

$$\alpha_n = \alpha + \frac{n-1}{2} r - \frac{\sqrt{n+1}}{2} r$$

Il s'agit de donner une preuve de ce résultat. La méthode qui semble s'imposer est la récurrence, et on va donner explicitement l'expression de $P^{(n-3)}(X)$. Pour cela, il nous manque son coefficient dominant. Puisque l'on dérive $n-3$ fois, le coefficient dominant de $P^{(n-3)}(X)$ vaut $\frac{n!}{3!} = \frac{n!}{6}$. On peut donc énoncer un résultat définitif :

Conjecture 2 *Si $n \geq 4$ et si*

$$P_n(X) = a \prod_{k=0}^{n-1} (X - \alpha - k \times r)$$

est un polynôme dont les racines forment une suite arithmétique de premier terme α et de raison r, alors le polynôme dérivée d'ordre $n-3$ est

$$P_n^{(n-3)}(X) = a\frac{n!}{6}\left(X - \alpha - \frac{n-1}{2} r + \frac{\sqrt{n+1}}{2} r\right)\left(X - \alpha - \frac{n-1}{2} r\right)\left(X - \alpha - \frac{n-1}{2} r - \frac{\sqrt{n+1}}{2} r\right)$$

En particulier ses racines forment une suite arithmétique de premier terme $\alpha_n = \alpha + \frac{n-1}{2} r - \frac{\sqrt{n+1}}{2} r$ et de raison $r_n = \frac{\sqrt{n+1}}{2} r$.

5 Première preuve (assistée par Maple)

On va établir le résultat de la conjecture 2. par récurrence et en utilisant les capacités de calcul formel de Maple. L'initialisation réside dans le cas $n = 3$ (qui est trivial), ou (pour les sceptiques) dans les cas $n = 4$ et $n = 5$ étudiés précédemment. Pour l'hérédité, on utilise le fait que

$$P_{n+1}(X) = P_n(X) \times (X - \alpha - n \times r)$$

et d'après la formule de Leibniz

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{(n+1-3)}(X) &= [P_n(X) \times (X - \alpha - n \times r)]^{(n+1-3)} \\ &= P_n^{(n+1-3)}(X) \times (X - \alpha - n \times r) + (n+1-3) P_n^{(n-3)}(X) \\ &= \frac{d}{dX}\left(P_n^{(n-3)}(X)\right) \times (X - \alpha - n \times r) + (n+1-3) P_n^{(n-3)}(X) \end{aligned}$$

Il reste à vérifier la validité de l'ensemble avec le calcul formel.

Démonstration de la conjecture

On définit l'expression que l'on cherche à prouver pour Dn_3P

```
> Dn_3P_conjecture:=n->a*n!/6*(X-alpha-(n-1)/2*r-sqrt(n+1)/2*r)*(X
  -alpha-(n-1)/2*r)*(X-alpha-(n-1)/2*r+sqrt(n+1)/2*r);
```

$$Dn\_3P\_conjecture := n \to \frac{1}{6} a\, n! \left(X-\alpha-\frac{1}{2}(n-1)r-\frac{1}{2}\sqrt{n+1}\,r\right)\left(X-\alpha-\frac{1}{2}(n-1)r\right)\left(X-\alpha-\frac{1}{2}(n-1)r+\frac{1}{2}\sqrt{n+1}\,r\right)$$

On vérifie l'hérédité

```
> diff(Dn_3P_conjecture(n),X)*(X-alpha-n*r)+(n+1-3)*Dn_3P_conjectu
  re(n)-Dn_3P_conjecture(n+1):
> simplify(%);
```

$$0$$

Ceci termine la preuve.

6 Une preuve directe du résultat

Si $P_n(X) = a\prod_{k=0}^{n-1}(X-\alpha-k\times r)$, il semble alors judicieux de "décaler" les racines en posant $X-\alpha=Y$, ainsi

$$P_n(X) = Q_n(Y) = a\prod_{k=0}^{n-1}(Y-kr)$$

On développe cette expression pour obtenir

$$Q_n(Y) = a\left(Y^n - \sum_{i=0}^{n-1} irY^{n-1} + \sum_{0\le i<j\le n-1} ijr^2Y^{n-2} - \sum_{0\le i<j<k\le n-1} ijkr^3Y^{n-3} + \cdots\right)$$

ce qui permet le calcul direct de $Q_n^{(n-3)}(Y)$. Il reste cependant à déterminer une forme close pour les trois coefficients $\sum_{i=0}^{n-1} i$, $\sum_{0\le i<j\le n-1} ij$ et $\sum_{1\le i<j<k\le n-1} ijk$. On sait que

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

Puis

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le n-1} ij &= \sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1} ij \\ \sum_{1\le i<j<k\le n-1} ijk &= \sum_{i=0}^{n-3}\sum_{j=i+1}^{n-2}\sum_{k=j+1}^{n-1} ijk\end{aligned}$$

une fois encore, Maple nous sort de l'embarras.

```
> factor(sum(sum(i*j,j=i+1..n-1),i=1..n-2));
```

$$\frac{1}{24}\, n\,(n-1)\,(n-2)\,(3\,n-1)$$

```
> factor(sum(sum(sum(i*j*k,k=j+1..n-1),j=i+1..n-2),i=1..n-3));
```

$$\frac{1}{48}\, n^2\,(n-2)\,(n-3)\,(n-1)^2$$

On obtient alors

$$Q_n(Y) = a\left(Y^n - \frac{n(n-1)}{2}rY^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{24}r^2Y^{n-2} - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)(n-3)}{48}r^3Y^{n-3} + \cdots\right)$$

en dérivant $n-3$ fois, il vient

$$\begin{aligned} Q_n^{(n-3)}(Y) &= a\left(\tfrac{n!}{6}Y^3 - \tfrac{(n-1)!}{2}\tfrac{n(n-1)}{2}rY^2 + (n-2)!\tfrac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{24}r^2Y - (n-3)!\tfrac{n^2(n-1)^2(n-2)(n-3)}{48}r^3\right) \\ &= \frac{an!}{6}\left(Y^3 - \frac{3(n-1)}{2}rY^2 + \frac{(n-2)(3n-1)}{4}r^2Y - \frac{n(n-1)(n-3)}{8}r^3\right) \end{aligned}$$

et

$$P_n^{(n-3)}(X) = \frac{an!}{6}\left((X-\alpha)^3 - \frac{3(n-1)}{2}r(X-\alpha)^2 + \frac{(n-2)(3n-1)}{4}r^2(X-\alpha) - \frac{n(n-1)(n-3)}{8}r^3\right)$$

Il reste ensuite à déterminer les racines de $P_n^{(n-3)}(X)$, pour constater qu'elles sont bien en progression arithmétique ! Pour cela, il suffit de déterminer une racine de $Q_n^{(n-3)}(Y)$, si on suppose que ces racines forment une suite arithmétique, elles s'écrivent $\beta - r_n, \beta, \beta + r_n$. Leur somme vaut donc 3β, mais, d'après les relations coefficients-racines, elle est égale à $\frac{3}{2}(n-1)r$.

On vérifie donc que $\beta = \frac{n-1}{2}r$ est bien racine de $Q_n^{(n-3)}(Y)$, i.e. que

$$\frac{(n-1)^3}{6\times 8} - \frac{(n-1)^3}{4\times 4} + \frac{(n-2)(3n-1)(n-1)}{24\times 2} - \frac{n(n-1)(n-3)}{48} = 0$$

ce qui ne pose aucune difficulté. Pour obtenir les autres racines, on peut calculer la raison r_n à l'aide du coefficient de Y dans $Q_n^{(n-3)}(Y)$ qui vaut

$$\begin{aligned} \frac{(n-2)(3n-1)}{4} &= \beta(\beta - r_n) + \beta(\beta + r_n) + (\beta - r_n)(\beta + r_n) \\ &= 3\beta^2 - r_n^2 \\ &= \frac{(3\beta)^2}{3} - r_n^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} r_n^2 &= \frac{\left(\frac{3}{2}(n-1)r\right)^2}{3} - \frac{(n-2)(3n-1)r^2}{4} \\ &= \frac{1}{4}r^2(n+1) \end{aligned}$$

soit

$$r_n = \frac{\sqrt{n+1}}{2} r$$

Pour conclure, on vérifie que

$$\begin{aligned} Q_n^{(n-3)}(Y) &= \frac{an!}{6}\left(Y - \frac{n-1}{2}r\right)\left(Y - \frac{n-1}{2}r - \frac{\sqrt{n+1}}{2}r\right)\left(Y - \frac{n-1}{2}r - \frac{\sqrt{n+1}}{2}r\right) \\ &= \frac{an!}{6}\left(Y - \frac{n-1}{2}r\right)\left(\left(Y - \frac{n-1}{2}r\right)^2 - \frac{n+1}{4}r^2\right) \end{aligned}$$

ce qui prouve que les racines de $Q_n^{(n-3)}$ (et donc de $P_n^{(n-3)}$) sont en progression arithmétique.

7 Caractérisation des polynômes de degré 3 dont les racines sont en progression arithmétique

Le paragraphe précédent doit inciter le lecteur à se poser la question suivante : peut-on caractériser simplement les polynômes de degré 3 dont les racines sont en progression arithmétique ? La condition nécessaire et suffisante ne serait-elle pas très simple ? La réponse est affirmative.

Soit

$$P(X) = X^3 - aX^2 + bX - c$$

un polynôme de degré 3 (supposé unitaire, ce qui ne change rien au problème). Si les racines de P sont en progression arithmétique, on peut les noter $\beta - r, \beta, \beta + r$ où r est la raison de la progression. On a alors

$$\begin{aligned} P(X) &= (X - \beta - r)(X - \beta)(X - \beta + r) \\ &= X^3 - 3\beta X^2 + \left(3\beta^2 - r^2\right)X + \beta\left(r^2 - \beta^2\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} a = 3\beta \\ b = 3\beta^2 - r^2 \\ c = \beta\left(\beta^2 - r^2\right) \end{cases}$$

en particulier $\beta = \dfrac{a}{3}$ est racine de P, et la raison est telle que

$$r^2 = \frac{a^2}{3} - b$$

On a donc une condition nécessaire très simple

$$\frac{a}{3} \text{ est racine de } P$$

Réciproquement, si $P\left(\dfrac{a}{3}\right) = 0$ alors $\left(\dfrac{a}{3}\right)^3 - a\left(\dfrac{a}{3}\right)^2 + b\left(\dfrac{a}{3}\right) - c = 0 \Longleftrightarrow c = \dfrac{a}{3}\left(b - \dfrac{2}{9}a^2\right)$, d'où

$$P(X) = X^3 - aX^2 + bX - \frac{a}{3}\left(b - \frac{2}{9}a^2\right)$$

on peut ainsi mettre $\left(X - \dfrac{a}{3}\right)$ en facteur pour obtenir

$$P(X) = \left(X - \frac{a}{3}\right)\left(X^2 - \frac{2aX}{3} + b - \frac{2a^2}{9}\right)$$

Les racines de P sont alors
$$\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}\delta,\frac{1}{3}a,\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\delta \text{ où } \delta^2=3a^2-9b$$
elles forment bien une progression arithmétique de raison r telle que $r^2=\dfrac{3a^2-9b}{9}=\dfrac{a^2}{3}-b$.

On peut donc énoncer le

Théorème 1 *Les racines de $P(X)=X^3-aX^2+bX-c$ forment une progression arithmétique si et seulement si $\dfrac{a}{3}$ est racine de P.*

8 Preuve directe et immédiate "à la main"

On se propose de donner une preuve directe du résultat sans utiliser le calcul formel.

8.1 Deux cas typiques : les degrés 4 et 5

8.1.1 Cas où P est de degré 4

On note $\alpha,\alpha+r,\alpha+2r$ et $\alpha+3r$ les racines de P (où r est la raison de la suite arithmétique de la suite des racines de P), on a alors
$$P(X)=a(X-\alpha)(X-\alpha-r)(X-\alpha-2r)(X-\alpha-3r)$$
Puisque les racines sont régulièrement espacées, on va "recentrer" le tout en plaçant l'origine du repère en $\alpha+r+\dfrac{r}{2}$, on pose donc $X=Y+\alpha+\dfrac{3r}{2}$ alors
$$\begin{aligned}P(X)&=R(Y)\\ \text{où } R(Y)&=a\left(Y+\frac{3r}{2}\right)\left(Y+\frac{r}{2}\right)\left(Y-\frac{r}{2}\right)\left(Y-\frac{3r}{2}\right)\\ &=a\left(Y^2-\frac{r^2}{4}\right)\left(Y^2-\frac{9r^2}{4}\right)\end{aligned}$$
On constate que Q est un polynôme pair, en le dérivant, on obtient un polynôme impair dont les racines sont toujours en progression arithmétique. Plus précisément
$$\begin{aligned}P'(X)&=R'(Y)=2aY\left(Y^2-\frac{9r^2}{4}\right)+2aY\left(Y^2-\frac{r^2}{4}\right)\\ &=aY\left(4Y^2-5r^2\right)\end{aligned}$$
car $\dfrac{dY}{dX}=1$, ainsi
$$P'(X)=4a\left(X-\alpha-\frac{3r}{2}\right)\left(\left(X-\alpha-\frac{3r}{2}\right)^2-\frac{5r^2}{4}\right)$$
Les racines de P' sont donc
$$\alpha+\frac{3r}{2}-\frac{\sqrt{5}r}{2},\alpha+\frac{3r}{2},\alpha+\frac{3r}{2}+\frac{\sqrt{5}r}{2}$$
elles forment une suite arithmétique de raison $\dfrac{\sqrt{5}}{2}r$.

8.1.2 Cas où $\deg P = 5$

On utilise la même idée, à savoir qu'une suite arithmétique de 5 élements ce n'est pas un terme suivi de quatre autres régulièrement espacés, mais cinq termes disposés de part et d'autre d'un terme médian. Si $\alpha, \alpha + r, \cdots, \alpha + 4r$ sont les racines de P, on pose $X = Y + \alpha + 2r$, ainsi

$$\begin{aligned} P(X) &= a(X-\alpha)(X-\alpha-r)(X-\alpha-2r)(X-\alpha-3r)(X-\alpha-4r) \\ &= a(Y+2r)(Y+r)(Y)(Y-r)(Y-2r) \\ &= aY\left(Y^2-r^2\right)\left(Y^2-4r^2\right) = R(Y) \\ &= a\left(Y^5-5r^2Y^3+4r^4Y\right) \end{aligned}$$

En dérivant deux fois R, on obtient un polynôme impair de degré 3, dont les racines sont en progression arithmétique. Plus précisément

$$R''(Y) = 10aY\left(2Y^2-3r^2\right)$$

a pour racines $Y = -\frac{\sqrt{6}r}{2}, 0, \frac{\sqrt{6}r}{2}$. Les racines de P'' sont donc $\alpha - 2r - \frac{\sqrt{6}r}{2}, \alpha - 2r, \alpha - 2r + \frac{\sqrt{6}r}{2}$ (on retrouve bien les résultats précédemment trouvés).

9 Cas général

Examinons le cas de $P_n(X) = a\prod_{k=0}^{n-1}(X-\alpha-kr)$ sur lequel on effectue un changement de variable en recentrant les racines.

9.1 Si n est impair

On pose $X = Y + \alpha + \frac{n-1}{2}r$ alors

$$\begin{aligned} P_n(X) &= R_n(Y) \\ &= a\prod_{k=0}^{n-1}\left(Y+\left(\frac{n-1}{2}-k\right)r\right) \\ &= a\prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1}\left(Y+\left(\frac{n-1}{2}-k\right)r\right)\times Y\times\prod_{k=\frac{n-1}{2}+1}^{n-1}\left(Y+\left(\frac{n-1}{2}-k\right)r\right) \\ &= aY\prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1}\left(Y+\left(\frac{n-1}{2}-k\right)r\right)\prod_{j=0}^{\frac{n-1}{2}-1}\left(Y-\left(\frac{n-1}{2}-j\right)r\right) \text{ en posant } j=(n-1)-k \\ &= aY\prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(Y^2-j^2r^2\right) \\ &= a\left(Y^n-\left(\sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}}j^2\right)r^2Y^{n-2}+\cdots\right) \end{aligned}$$

Le polynôme $R_n(Y)$ est impair, sa dérivée $n-3$ fois aussi donc ses racines sont en progression arithmétique. Plus précisément

$$R_n^{(n-3)}(Y) = a\left(\frac{n!}{6}Y^3-(n-2)!\left(\sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}}j^2\right)r^2Y\right)$$

Pour donner les racines de $R_n^{(n-3)}$, on utilise le résultat classique[1] $\sum_{j=1}^{N-1} j^2 = \frac{N(N-1)(2N-1)}{6}$ qui donne $\sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} j^2 = \frac{n(n-1)(n+1)}{24}$ et

$$R_n^{(n-3)}(Y) = a\frac{n!}{6}Y\left(Y^2 - \frac{(n+1)}{4}r^2\right)$$

On retrouve bien les racines de $P_n^{(n-3)}$ qui sont $\alpha + \frac{n-1}{2}r - \frac{\sqrt{n+1}}{2}r, \alpha + \frac{n-1}{2}r, \alpha + \frac{n-1}{2}r + \frac{\sqrt{n+1}}{2}r.$

9.2 Si n est pair

On pose $X = Y + \alpha + \frac{n-1}{2}r$ alors

$$\begin{aligned}
P_n(X) &= R_n(Y) \\
&= a\prod_{k=0}^{n-1}\left(Y + \left(\frac{n-1}{2} - k\right)r\right) \\
&= a\prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\left(Y + \left(\frac{n-1}{2} - k\right)r\right)\prod_{k=\frac{n}{2}}^{n-1}\left(Y + \left(\frac{n-1}{2} - k\right)r\right) \\
&= a\prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\left(Y + \left(\frac{n-1}{2} - k\right)r\right)\prod_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\left(Y - \left(\frac{n-1}{2} - j\right)r\right) \quad \text{en posant } j = (n-1) - k \\
&= a\prod_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\left(Y^2 - \left(\frac{n-1}{2} - j\right)^2 r^2\right) \\
&= a\left(Y^n - \left(\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{n-1}{2} - j\right)^2\right)r^2Y^{n-2} + \cdots\right)
\end{aligned}$$

Il reste à calculer

$$\sigma = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{n-1}{2} - j\right)^2$$

[1] Pour démontrer ce résultat, on écrit que

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

et l'on somme cette égalité de 0 à $N-1$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{N-1}(i+1)^3 &= \sum_{i=1}^{N} i^3 = \sum_{i=0}^{N-1} i^3 + n^3 = \sum_{i=0}^{N-1} i^3 + 3\sum_{i=0}^{N-1} i^2 + 3\sum_{i=0}^{N-1} i + \sum_{i=0}^{N-1} i \\
n^3 &= 3\sum_{i=0}^{N-1} i^2 + 3\frac{N(N-1)}{2} + N
\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{i=0}^{N-1} i^2 = \frac{N(N-1)(2N-1)}{6}$$

Or

$$\begin{aligned}
\sigma &= \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} 1 - 2\frac{n-1}{2} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} j + \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} j^2 \\
&= \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - (n-1)\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{24} \\
&= \frac{n(n-1)}{8} + \frac{n(n-1)(n-2)}{24} \\
&= \frac{(n+1)n(n-1)}{24}
\end{aligned}$$

d'où

$$R_n^{(n-3)}(Y) = a\frac{n!}{6}Y\left(Y^2 - \frac{(n+1)}{4}r^2\right)$$

et l'on retrouve exactement les mêmes résultats (l'expression de $R_n^{(n-3)}$ est la même dans les deux cas, heureusement !).

Il convient de remarquer que ces résultats, compte tenu de ce qui précède, permettent alors de déduire $S_3 = \sum_{i=0}^{n-1} i^3$, $\sum_{1\leq i<j\leq n-1} ij$ et $\sum_{1\leq i<j<k\leq n-1} ijk$.

10 Conclusion

L'usage d'un logiciel de Calcul Formel tel que Maple permet, dans un premier temps, de formuler de façon précise un résultat non trivial puis de le démontrer. Il n'est cependant pas inutile, dans un second temps, d'essayer de redémontrer "à la main" ce résultat. Cela impose d'envisager une autre approche, moins directe, plus réfléchie. Trop souvent, c'est cette dernière voie, et uniquement celle ci qui est exposée au lecteur (élève-étudiant), elle paraît alors un peu mystérieuse. Le lecteur n'ayant pas eu l'occasion de "débroussailler" par lui même le problème, il ne peut pas identifier les difficultés calculatoires des autres méthodes. En relisant ce document, on constate que le résultat auquel on aboutit se démontre, en fin de compte, assez facilement sans avoir recours à aucun calcul algébrique compliqué. Mais pour arriver à cette conclusion (de l'inutilité du calcul formel), on a utilisé au maximum les possibilités du calcul formel pour comprendre le problème sous ses différents aspects. C'est souvent un des paradoxes de ce genre d'outil que de nous permettre de "décortiquer" un problème à tel point que l'outil initialement utilisé devient inutile !