Les nombres de Métal : alchimie mathématique de la transformation

G.Huvent

22 décembre 2004

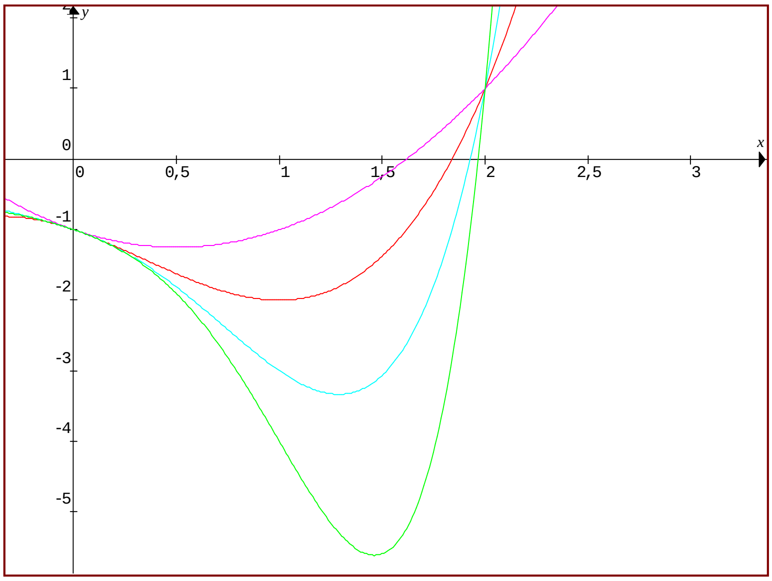
On considère pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ l'équation

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$$

On s'intéresse aux racines positives de cette équation. Lorsque $n = 2$, on retrouve le nombre d'or $\alpha_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$. et pour $n = 3$, le logiciel Maple donne $\alpha_3 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt[3]{19+\sqrt{33}}}{3} + \frac{4}{3\sqrt[3]{19+\sqrt{33}}}$ (le nombre d'argent). Pour $n \geq 2$, on prouvera l'existence et l'unicité d'une racine positive que l'on appellera alors énième nombre de métal et que l'on notera α_n. On s'intéresse ensuite au comportement de la suite $(\alpha_n)_n$, en particulier quelle est la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, peut on déterminer un développement asymptotique de α_n ?

1 Etude expérimentale

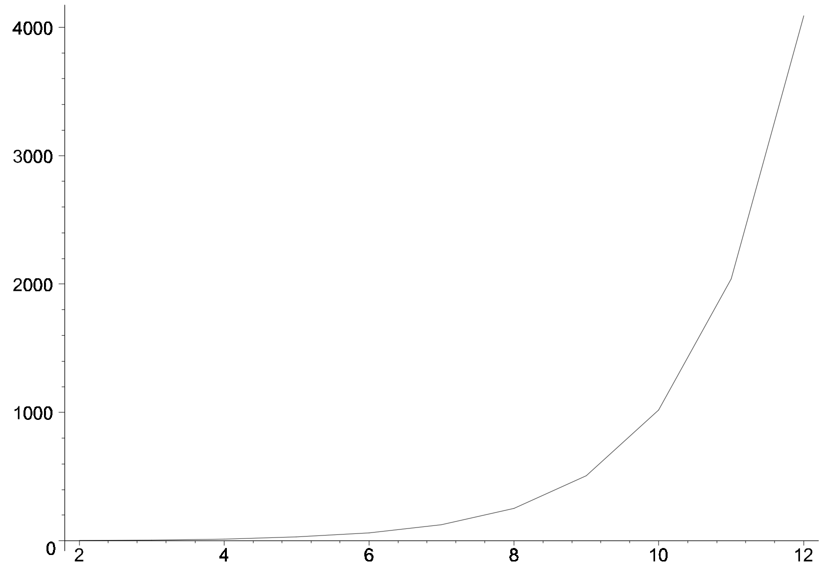
Posons $P_n = x^n - \left(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1\right) = \dfrac{x^{n+1} - 2x^n + 1}{x - 1}$ si $x \neq 1$, et traçons quelques courbes représentatives.



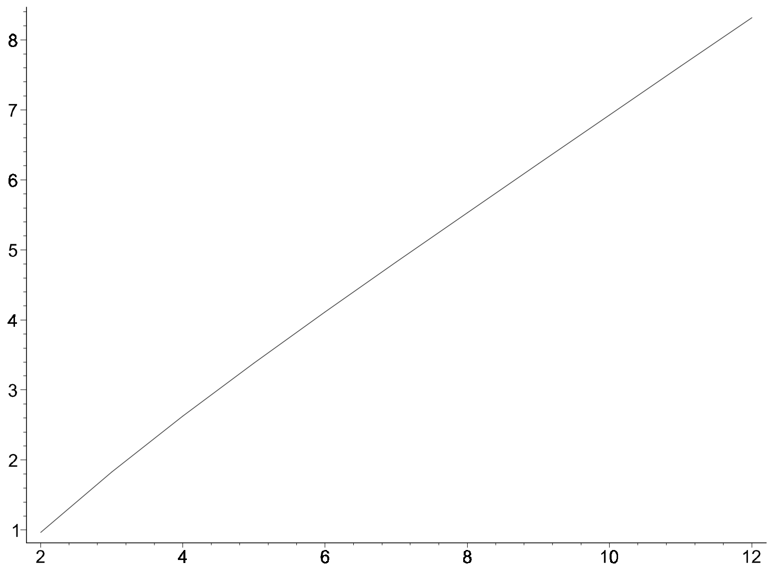
On constate graphiquement l'existence d'une unique solution α_n sur $\mathbb{R}_+$, il semble, de plus que la suite est croissante et que

$$\alpha_n \leq 2 \text{ et } \alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$$

Avec un logiciel de calcul numérique (Maple ou autre), on peut calculer des valeurs approchées de α_n pour $n \in \{2, \cdots, 12\}$. Puisque α_n semble tendre vers 2, il semble logique de s'intéresser à $\beta_n = 2 - \alpha_n$ qui tend vers 0 et il peut être intéressant de tracer la ligne polygônale de sommet $\left(n, \frac{1}{\beta_n}\right)$. On obtient le graphique suivant



La croissance semble être exponentielle, il est donc judicieux de tracer le même graphique en échelle logarithmique. On obtient alors



Ce qui ressemble fortement à une croissance linéaire. Il semble donc que β_n soit de la forme β^n. Le calcul approché de $\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}$ donne $\beta \approx 0,499\cdots$ On peut donc conjecturer que $\alpha_n \approx 2 - \frac{1}{2^n}$.
Passons maintenant à l'étude théorique

2 Existence d'une unique solution

On commence donc par prouver l'existence et l'unicité d'une racine positive α_n (strictement positive même). Lorsque $n = 2$, on retrouve le nombre d'or.

Pour cela, on remarque que 0 n'est pas solution et on utilise la transformation suivante

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 \Longleftrightarrow 1 = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{x}$$

La fonction

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x^k}$$

est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ (en tant que somme de fonctions strictement décroissantes) et elle est continue.
Elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur lui même (car $\lim_{0^+} f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = 0^+$).
Il existe donc une unique racine α_n.
Pour encadrer cette racine, on revient sur l'expression de P_n. Puisque $P_n(2) = 2^n - \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 1$ et $P_n(1) = 1 - n$, cette racine est comprise entre 1 et 2.

3 Une première valeur approchée via Newton

On dispose donc maintenant de plusieurs formulations équivalentes de notre problème

Le énième nombre de métal est l'unique réel $x \in]1, 2[$ tel que

$$\begin{aligned}
x^n &= x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 \\
\frac{x^{n+1} - 2x^n + 1}{x-1} &= 0 \\
x^{n+1} - 2x^n + 1 &= x^n (x-2) + 1 = 0 \text{ car } x \neq 1 \\
x^n (2-x) &= 1 \\
2 - x &= \frac{1}{x^n} \\
\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{x} &= 1
\end{aligned}$$

Si on applique la méthode de newton en partant de $x = 2$, on obtient une première approximation de la racine. La question est alors la suivante : quelle formulation doit-on utiliser ?
On va donc choisir une représentation du problème sous la forme

$$\varphi(x) = 0$$

et on prend comme première approximation de α_n :

$$\alpha_n = 2 - \frac{\varphi(2)}{\varphi'(2)}$$

3.1 Avec $\varphi_1(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1 = 0$

On obtient alors

$$\alpha_n \approx 2 - \frac{1}{2^n}$$

Cette première approximation est extrément simple, mais est-ce une valeur par défaut ou par excès ? Il est très facile de répondre à cette question, en effet α_n est l'unique racine dans $]1, 2[$ de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{1}{x^n} - (2 - x)$$

Une étude rapide de g fournit les variations suivantes

x	1		$\sqrt[n+1]{n}$		2
g'		$-$	0	$+$	
g	0	$\searrow$	< 0	$\nearrow$	$\frac{1}{2^n}$

puisque $g\left(2-\dfrac{1}{2^n}\right)=\dfrac{1}{\left(2-\dfrac{1}{2^n}\right)^n}-\dfrac{1}{2^n}\geq 0$ car $2-\dfrac{1}{2^n}<2$ et $x\to\dfrac{1}{x^n}$ est décroissante, on peut affirmer que

$$\alpha_n \leq 2-\frac{1}{2^n}$$

3.2 Avec $\varphi_2(x)=\dfrac{x^{n+1}-2x^n+1}{x-1}$

On obtient alors comme valeur approchée

$$\alpha_n \approx 2-\frac{1}{2^n-1}$$

On peut numériquement constater que cette valeur approchée l'est encore par excès. Le prouver semble plus difficile, mais en mathématiques, rien n'est jamais perdu...

3.3 Avec $\varphi_3(x)=\dfrac{1}{x^n}+x-2$

On obtient dans ce cas

$$\alpha_n = 2-\frac{1}{2^n-\dfrac{n}{2}}$$

ce qui est encore une meilleure approximation de α_n (on verra pourquoi) !
Pour prouver que l'on obtient bien une valeur par excès, on utilise la convexité de φ. En effet dans ce cas

$$\varphi_3''(x)=\frac{n(n+1)}{x^{n+2}}>0 \text{ sur } \left]1,2\right[$$

La courbe est donc strictement au dessus de ces tangentes[1]. En particulier φ_3 est au dessus de sa tangente en $x=2$. Donc $\varphi_3\left(2-\dfrac{1}{2^n-\dfrac{n}{2}}\right)\geq 0$ (la tangente en 2 coupe Ox en $2-\dfrac{1}{2^n-\dfrac{n}{2}}$).
On en déduit que

$$\alpha_n \leq 2-\frac{1}{2^n-\dfrac{n}{2}} \leq 2-\frac{1}{2^n-1} \leq 2-\frac{1}{2^n}$$

Tout cela est donc très intéressant, mais quid des valeurs par défaut ?

4 Monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On peut commencer par étudier la monotonie de $(\alpha_n)_n$. On sait que

$$\alpha_n^n(\alpha_n-2)=-1$$

donc

$$P_{n+1}(\alpha_n)=\frac{\alpha_n^{n+1}(\alpha_n-2)+1}{\alpha_n-1}=\frac{1-\alpha_n}{\alpha_n-1}=-1<0$$

voir avec le polynome

On en déduit que

$$\alpha_n<\alpha_{n+1}$$

La suite $(\alpha_n)_n$ est donc strictement croissante (et majorée donc converge).

[1] Cette propriété se démontre facilement en classe de Terminale. En effet soit f dérivable deux fois sur l'intervalle I et telle que $f''(x)>0$ sur I. Soit $u\in I$, l'équation de la tangente en u est

$$y=f'(u)(x-u)+f(u)$$

la fonction $g(x)=f(x)-(f'(u)(x-u)+f(u))$ est dérivable deux fois de dérivée seconde égale à f'', donc g' est strictement croissante. Puisque $g'(u)=0$, on a les variations de g et son signe (qui est >0 sauf en u).

5 Un minorant grossier de α_n, calcul de la limite

On va établir la convergence de $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ vers 2, pour cela on calcule $g\left(2-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{\left(2-\dfrac{1}{n}\right)^n}-\dfrac{1}{n}$ (voir question 3.1 pour la def de g).dont on devine qu'il est négatif pour n assez grand. Comme l'infini est loin, on va montrer que c'est vrai pour $n\geq 2$. Cela revient à prouver que

$$n<\left(2-\frac{1}{n}\right)^n \Longleftrightarrow n^{\frac{1}{n}}<2-\frac{1}{n}\Longleftrightarrow \frac{\ln n}{n}<\ln\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

Une étude rapide de $x\to\dfrac{\ln x}{x}$ permet d'établir que

$$\forall x\geq 2,\ \frac{\ln x}{x}\leq\frac{1}{e}$$

puisque $x\to\ln\left(2-\dfrac{1}{x}\right)$ est décroissante, on a

$$\forall n\geq 2,\ \ln\frac{3}{2}=\ln\left(2-\frac{1}{2}\right)\leq\ln\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

il suffit de constater que

$$\frac{1}{e}<\ln\frac{3}{2}$$

pour conclure que

$$g\left(2-\frac{1}{n}\right)\leq 0\Longrightarrow 2-\frac{1}{n}\leq\alpha_n$$

On en déduit que

$$\alpha_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}2$$

Avant de chercher un minorant plus fin de α_n, on va déterminer un équivalent de β_n si $\alpha_n=2-\beta_n$.

6 A la recherche d'un équivalent de $\beta_n=2-\alpha_n$

On pose $\alpha_n=2-\beta_n$, on sait que α_n vérifie $g(\alpha_n)$ i.e.

$$\beta_n=2-\alpha_n=\frac{1}{\alpha_n^n}$$

puisque

$$\alpha_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}2$$

On devine que $\alpha_n^n\sim 2^n$, mais cela n'est malheureusement pas évident[2].
On doit donc prouver que

$$\frac{\alpha_n^2}{2^n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$$

Or on sait que

$$2-\frac{1}{n}\leq\alpha_n\leq 2-\frac{1}{2^n}\Longrightarrow\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n\leq\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)^n\leq\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)^n$$

[2]Par exemple si $u_n=2+\dfrac{1}{n}$, on a $u_n\sim 2$ mais $\dfrac{u_n^n}{2^n}=\exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\sqrt{e}$ car $n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{1}{2}$.

Si le terme $\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)^n$ converge bien vers 1, en revanche $\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. L'estimation inférieure de α_n est insuffisante. On va donc l'améliorer. Pour s'en sortir, il suffit de remplacer le $\dfrac{1}{n}$ par $\dfrac{1}{n^2}$ ou par toute puissance de $\dfrac{1}{n}$ supérieure à 1. On considère donc $g\left(2-\dfrac{1}{n^2}\right)$ dont on veut montrer qu'il est négatif. Cela revient à prouver que, pour n assez grand

$$\frac{2\ln n}{n} < \ln\left(2-\frac{1}{n^2}\right)$$

ce qui est une évidence (regarder le comportement à l'infini, ou bien prouver que c'est vrai pour $n \geq 5$). On a donc pour n assez grand

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \leq \left(\frac{\alpha_n}{2}\right)^n \leq \left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)^n$$

le théorème de gendarmes permet d'affirmer que

$$\alpha_n^n \sim 2^n$$

puis

$$\beta_n = \frac{1}{\alpha_n^n} \sim \frac{1}{2^n}$$

7 Un minorant fin de α_n

7.1 Première méthode

On va estimer $P_n\left(2-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$ dont le signe est celui de $\left(2-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)^n \times \left(-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)+1 = 1-2\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)^n$. On va montrer que cette quantité est négative, cela revient à prouver que

$$\forall n \geq 2,\ \frac{1}{2} \leq \left(1-\frac{1}{2^n}\right)^n$$

Pour cela, on va utiliser le binôme de Newton (sacré Newton !). On a, pour $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^n &= 1-\frac{n}{2^n}+\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\frac{\binom{n}{k}}{2^{nk}} \geq 1-\frac{n}{2^n}-\sum_{k=2}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{2^{nk}} \\
&\geq 1-\frac{n}{2^n}-\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k} \\
&\geq 1-\frac{n}{2^n}-\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 1-\frac{n+1}{2^n} \text{ car } \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver que

$$1-\frac{n+1}{2^n} \geq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{n+1}{2^{n-1}} < 1$$

Cette inégalité se prouve par récurrence pour $n \geq 3$ (elle est fausse pour $n = 2$).
On a donc, pour $n \geq 3$ (en fait c'est encore vrai pour $n = 2$)

$$\alpha_{n-1} \leq 2-\frac{1}{2^{n-1}} \leq \alpha_n \leq 2-\frac{1}{2^n}$$

En conclusion, $2-\dfrac{1}{2^n}$ est une valeur approchée de α_n à $\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}$. En fait puisque $2-\dfrac{1}{2^{n-1}} \leq \alpha_n \leq 2-\dfrac{1}{2^n}$, une meilleure approximation est

$$\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2^n}+2-\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2-\frac{3}{2^{n+1}}$$

l'erreur commise est alors au plus de $\dfrac{1}{2^{n+1}}$. Par exemple pour $n = 2$, $\alpha_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339\cdots$ et $2 - \dfrac{3}{2^3} = 1,625$. L'erreur commise est de $0,006966\cdots$ ce qui est vraiment peu. Pour $n = 5$, Maple donne $\alpha_5 = 1,9659482\cdots$ et $2 - \dfrac{3}{2^{5+1}} = 1,953125$, l'erreur commise est de $0,12823\cdots$ alors que $\dfrac{1}{2^6} = .0,15625$.

7.2 Seconde méthode

On utilise le fait que α_n est l'unique racine positive de $1 = \dfrac{1}{x} + \cdots + \dfrac{1}{x^n}$, en posant $y = \dfrac{1}{x}$ on est ramené à considérer l'équation $R_n(y) = y + y^2 + \cdots + y^n - 1 = 0$ dont l'unique racine positive est alors $\dfrac{1}{\alpha_n}$. On va calculer alors $R_n\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^n}\right)$ et prouver sa positivité (car $R_n\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$ et $R_n(1) > 0$), cela prouvera que $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^n} \geq \dfrac{1}{\alpha_n}$.
On va utiliser le binôme de Newton, en effet

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right)^n > \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

On a donc

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{\alpha_n} \Longleftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}} \leq \alpha_n$$

Or $\dfrac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}} = 2 - \dfrac{2}{2^{n-1} - 1}$ d'où la minoration

$$2 - \frac{2}{2^{n-1} - 1} \leq \alpha_n$$

La dernière minoration est un peu moins fine.

8 Synthèse des résultats

On peut simplifier la démarche présentée et procéder ainsi pour l'étude des nombres de métal.
Après avoir prouvé l'unicité de la récine $\alpha_n \leq 2$, on montre que $2 - \dfrac{2}{2^{n-1} - 1} \leq \alpha_n$ comme on vient de le faire. On en déduit que $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$, puis que $\dfrac{\alpha_n^n}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Ces résultats donnent la convergence vers 2 et l'équivalent $2 - \alpha_n \sim \dfrac{1}{2^n}$.

9 Vers le développement asymptotique de α_n

Si l'on reprend un peu notre étude, on réalise que l'on a également une meilleure approximation de α_n, à savoir $\alpha_n \approx 2 - \dfrac{1}{2^n - \frac{n}{2}}$ (cf 3.3).

9.1 Etude numérique

Observons numériquement, cela donne pour $n = 5$, $2 - \dfrac{1}{2^{10} - \frac{5}{2}} = 1.966101\cdots$ alors que $\alpha_5 = 1,9659482$. L'erreur est alors de l'ordre de $0,0001534\cdots$.

Numériquement, $2-\dfrac{1}{2^n-\dfrac{n}{2}}$ semble être une excellente approximation. Si on en fait un développement asymptotique, on obtient

$$\begin{aligned}2-\frac{1}{2^n-\dfrac{n}{2}} &= 2-\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{1-\dfrac{n}{2^{n+1}}}\right)\\ &= 2-\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{n}{2^{n+1}}+o\left(\frac{n}{2^{n+1}}\right)\right)\\ &= 2-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{2n+1}}+o\left(\frac{n}{2^{2n+1}}\right)\end{aligned}$$

ce qui incite à considérer l'approximation suivante

$$\alpha_n \approx 2-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{2n+1}}$$

On va maintenant prouver que l'on obtient bien les premiers termes deu développement asymptotique de α_n (preuve que la méthode de Newton est réellement fabuleuse...)

9.2 Etude théorique

On sait que α_n est solution de l'équation $\dfrac{1}{x^n}=2-x$, puisque $\alpha_n\neq 2$, c'est aussi une solution de

$$x=(2-x)^{-\frac{1}{n}}$$

Posons

$$\alpha_n=2-\frac{1}{2^n}-\frac{\gamma_n}{2^n} \text{ avec } \gamma_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

alors

$$\alpha_n=(2-\alpha_n)^{-\frac{1}{n}}=\left(\frac{1}{2^n}(1+\gamma_n)\right)^{-\frac{1}{n}}=2(1+\gamma_n)^{-\frac{1}{n}}$$

d'où

$$\ln\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)=-\frac{1}{n}\ln(1+\gamma_n)$$

or $\dfrac{\alpha_n}{2}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\ln\left(\dfrac{\alpha_n}{2}\right)\sim\dfrac{\alpha_n}{2}-1=-\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{\gamma_n}{2^{n+1}}\sim-\dfrac{1}{2^{n+1}}$ et $-\dfrac{1}{n}\ln(1+\gamma_n)\sim-\dfrac{\gamma_n}{n}$. En conclusion

$$-\frac{1}{2^{n+1}}\sim-\frac{\gamma_n}{n}$$

soit

$$\gamma_n\sim\frac{n}{2^{n+1}}$$

et

$$\alpha_n=2-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{2n+1}}+o\left(\frac{n}{2^{2n+1}}\right)$$

9.3 Pour un terme de plus

Posons $\alpha_n=2-\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{n}{2^{2n+1}}-\dfrac{\varepsilon_n}{2^{2n+1}}$ avec $\varepsilon_n\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors

$$\ln\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{n}{2^{2n+2}}-\frac{\varepsilon_n}{2^{2n+2}}\right)=\ln\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)=-\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{n}{2^{n+1}}+\frac{\varepsilon_n}{2^{n+1}}\right)$$

or

$$\begin{aligned}
\ln\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{n}{2^{2n+2}}-\frac{\varepsilon_n}{2^{2n+2}}\right) &= \left(-\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{n}{2^{2n+2}}\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{2^{2n+2}}+o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\\
&= -\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{2n+1}{2^{2n+3}}+o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{n}{2^{n+1}}+\frac{\varepsilon_n}{2^{n+1}}\right) &= -\frac{1}{n}\left(\left(\frac{n}{2^{n+1}}+\frac{\varepsilon_n}{2^{n+1}}\right)-\frac{1}{2}\frac{n^2}{2^{2n+2}}\right)+o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\\
&= -\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{\varepsilon_n}{n2^{n+1}}+\frac{n}{2^{2n+3}}+o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)
\end{aligned}$$

on en déduit que

$$\varepsilon_n \sim \frac{n\left(3n+1\right)}{2^{n+2}} \sim \frac{3n^2}{2^{n+2}}$$

et enfin

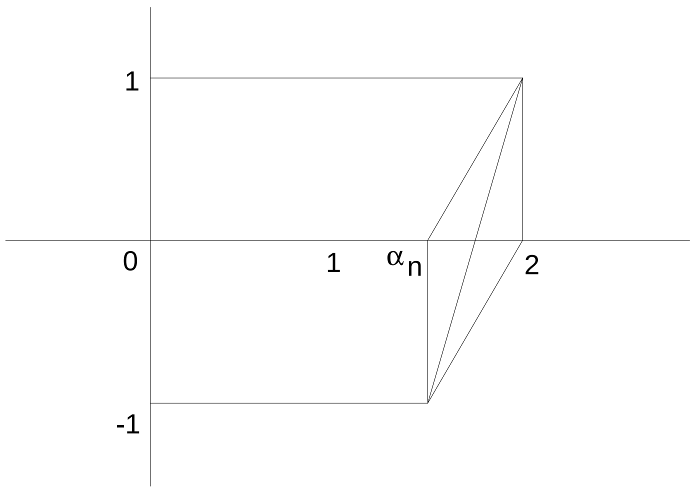
$$\alpha_n = 2-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2}\frac{n}{2^{2n}}-\frac{3}{8}\frac{n^2}{2^{3n}}+o\left(\frac{1}{2^{3n}}\right)$$

10 Mise en oeuvre de la méthode de Newton

On a vu que $P_{n+1}\left(\alpha_n\right)=-1$, ainsi

$$\begin{aligned}
P_{n+1}\left(\alpha_n\right) &= -1,\ P_{n+1}\left(2\right)=1\\
\alpha_n &\leq \alpha_{n+1}\leq 2
\end{aligned}$$

Si on applique la méthode de la fausse position entre α_n et 2, on obtient comme approximation de $\alpha_{n+1}\approx\dfrac{2+\alpha_n}{2}$ (voir le parallélogramme). Par convexité cette approximation est par défaut.



En pratique on calcule les $\left(\alpha_n\right)_n$ de proche en proche en opérant de la manière suivante. Ayant calculé α_n, on applique la méthode de Newton à la fonction $\varphi\left(x\right)=x^n\left(x-2\right)+1$ en partant de la valeur $1+\dfrac{\alpha_n}{2}$, on en déduit alors α_{n+1}.