Activité : Carrés parfaits, racines carrées

<u>Matériel</u> :
Puzzles en PVC (petits formats pour 25 élèves et grand format aimanté pour le professeur).
NB : - Matériel disponible au centre de matériel pédagogique, IREM, bâtiment M1.
- Pour un emprunt, contacter le secrétariat de l'IREM de Lille.
OU Photocopies des 2 puzzles (disponibles à la fin de cette fiche) et diaporama.

Objectifs

Extrait des programmes :
L'introduction de nouveaux nombres (nombres rationnels, racine carrée) peut utilement s'appuyer sur un travail des grandeurs et mesures ou de la géométrie.
A l'occasion d'activités de recherche, les élèves peuvent rencontrer la notion de nombres irrationnels, par exemple lors d'un travail sur les racines carrées.
Connaissances et compétences associées :

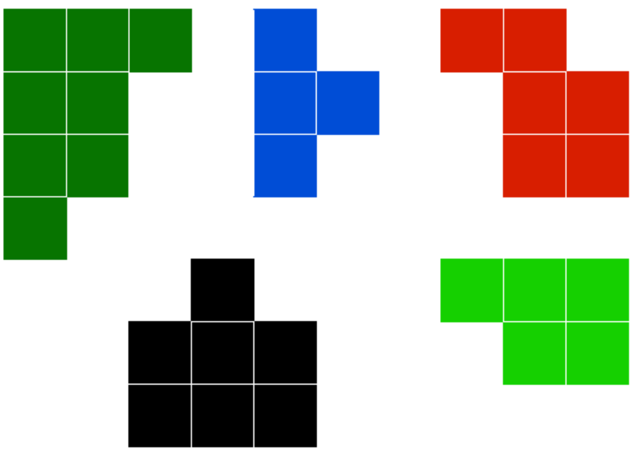
- Réinvestir les carrés parfaits
- Introduire, définir ou réinvestir les racines carrées.
- Associer la racine carrée à une représentation visuelle faisant le lien avec la mesure d'aire : elle est le côté d'un carré d'aire connue.
- Faire prendre conscience que certains nombres ne sont pas rationnels.
- Donner aux racines carrées leur statut de nombres en mettant en évidence quelques égalités.

Parcours : Cette activité permet d'enrichir le parcours d'éducation artistique et culturel de l'élève en replaçant la racine carrée dans l'histoire des mathématiques. Il serait en effet dommage d'aborder cette activité sans faire mention de la tablette d'argile babylonienne ou de l'évolution de la notation des racines carrées jusqu'au symbole que l'on connaît.
Compétences travaillées : **Chercher**, modéliser, représenter, **raisonner, calculer**, communiquer.
Toutes interviennent à des degrés divers selon la manière de présenter l'activité.

Déroulement de l'activité

Il s'agit de proposer les deux puzzles, durant la même séance ou espacés dans le temps, afin de pouvoir s'appuyer, pour la résolution du puzzle 2, des remarques ou de notions mentionnées lors de la réalisation du puzzle 1.

PUZZLE 1 :



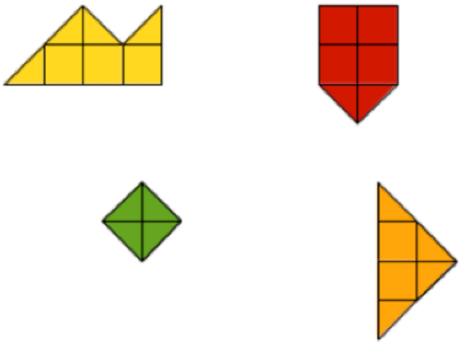
Distribuer les 5 pièces du puzzle 1 à chaque élève.
Bien insister sur la consigne : « On peut réaliser un carré en utilisant 4 des 5 pièces que vous avez devant vous, quelle pièce devez-vous écarter ? ».

Que les pièces soient déjà découpées ou simplement photocopiées, la majorité des élèves entrent dans l'activité en tentant de réaliser le carré. Cependant, ils sont dans l'action brute : découpage ou manipulation et dans un cas comme dans l'autre, ils n'ont pas recours à la réflexion. Il est très rare que la solution soit rapidement trouvée à cause de la pièce surnuméraire. Si c'est le cas, l'enseignant pourra demander s'il y avait un autre moyen que la résolution du puzzle pour écarter la pièce laissée de côté.

Lors de la mise en commun, on insistera sur le raisonnement : *la totalité des pièces possède une aire de 30 carreaux. 30 est encadré par les carrés parfaits 25 et 36. On cherche donc à ôter une pièce de 5 carreaux*.
Le puzzle 1 permet de rappeler le lien entre les carrés et les aires. (Utile pour le puzzle 2), il permet de réinvestir les carrés parfaits (tout entier positif est compris entre deux carrés parfaits) mais aussi d'introduire un raisonnement dans la réalisation du puzzle : il est en effet plus simple de réaliser le puzzle, une fois la pièce surnuméraire écartée.
Le grand format aimanté peut être utilisé pour la mise en commun en classe complète.
On peut aussi utiliser le diaporama de correction.

<u>Remarque :</u> le puzzle 1 ou des puzzles analogues peuvent être proposés dès le cycle 3 à l'occasion par exemple d'un travail sur les aires, ou sous forme d'ateliers minis défis mathématiques.

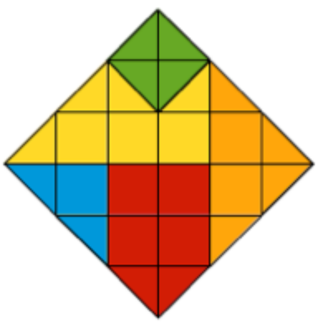
PUZZLE 2 :



Distribuer les pièces du puzzle 2 à chaque élève.
Insister sur la consigne : « Cette fois, on veut réaliser un carré avec toutes les pièces ».

Naturellement, les élèves vont tenter de former un carré en utilisant « comme bords » les côtés de carreaux. Un puzzle d'aire 16 carreaux est donc en général trouvé assez vite par plusieurs élèves.
Ce qui amène à la situation suivante :

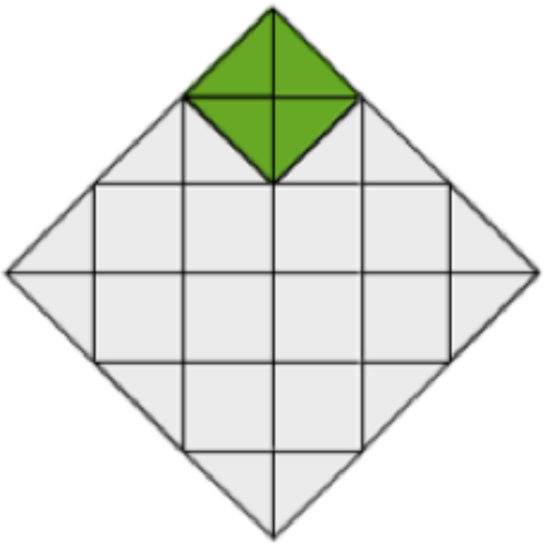
Cette situation permet d'exploiter le raisonnement par essai erreur. Au lieu de rejeter cette fausse piste, il est intéressant de montrer aux élèves, qu'au contraire, il faut l'exploiter, en remontant son raisonnement jusqu'au moment où « ça coince ». La recherche de l'aire du petit carré vert, ainsi qu'un rappel sur l'additivité des aires ne sont pas inutiles, en particulier pour des élèves chez qui la notion d'aire est encore fragile.
A ce moment de la mise en commun, rebondir sur cette situation et faire appel aux remarques faites lors de la réalisation du puzzle 1 prouvera l'impossibilité d'exhiber un carré dont les côtés auront un nombre entier de côtés de carreaux.
En effet, 18 n'est pas un carré parfait.
L'observation des pièces montrera une différence majeure entre le puzzle 1 et le puzzle 2 : le découpage des pièces du puzzle 1 ne se fait que sur des lignes de quadrillage, celui du puzzle 2 emprunte des diagonales de carreaux.



On pourra ensuite repartir de la définition du carré (du point de vue figure géométrique), avec la nécessité d'avoir 4 angles droits et 4 côtés de la même longueur pour réussir le puzzle.

L'équipe enseignante jugera du moment opportun pour introduire la définition de la racine carrée.

La réalisation du puzzle permet également d'aboutir à l'égalité illustrée ci-dessous, ce qui va conférer un véritable statut de nombre aux racines carrées, tout en soulignant les différentes écritures possibles de ces nombres.



En prenant comme unité de longueur (u.l.), la longueur d'un côté de carreau et comme unité d'aire (u.a.), le carreau :

- L'aire du carré vert est de 2 u.a.
  Son côté mesure donc $\sqrt{2}$ u.l.

- L'aire du grand carré est de 18 u.a
  Son côté mesure donc $\sqrt{18}$. u.l.

Ce qui semble donc illustrer que :

$$\sqrt{18} = 3 \times \sqrt{2}$$

Mais il faudra le démontrer à un moment de la scolarité.

Au cycle 4, cette activité permettra d'expliquer les affichages des calculatrices, lors d'exercices sur le théorème de Pythagore. Elle pourra aussi se prolonger pas une recherche de valeurs approchées de $\sqrt{18}$., à la calculatrice, par dichotomie, en utilisant des logiciels de programmations comme Scratch….

En seconde, une démonstration, s'appuyant sur la définition des racines carrées complètera cette observation.

Par définition, $\sqrt{2}$ est positive, donc 3 $\sqrt{2}$ également.

Or (3 $\sqrt{2}$)^2 = 3 $\sqrt{2}$ x 3 $\sqrt{2}$
= 3 x 3 x $\sqrt{2}$ x $\sqrt{2}$ (par commutativité de la multiplication)
= 9 x 2 (définition de $\sqrt{2}$)
= 18

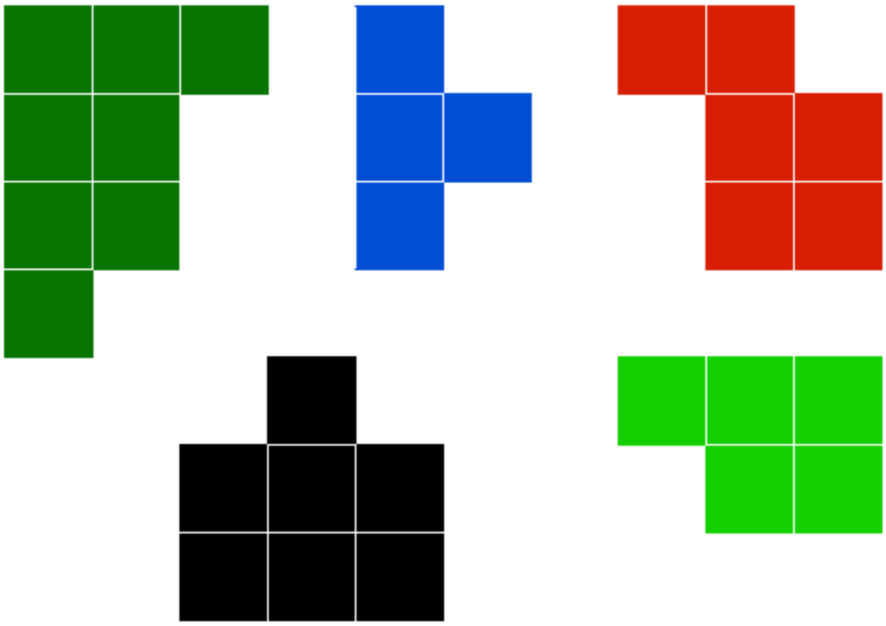
Donc 3 $\sqrt{2}$ est le nombre positif dont le carré vaut 18 donc c'est $\sqrt{18}$.

Une activité de recherche pourra venir compléter cette activité en montrant l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Enfin, il est intéressant de laisser une trace écrite des activités, afin qu'elles ne soient pas réduites à de simples manipulations ou pire, à de simples « occupations ». Il semble essentiel d'y faire figurer les points qui ont amené à une réflexion. Un exemple, qui ne se veut en rien modélisant, et qui doit être adapté à chaque classe, est fourni à la fin du document.

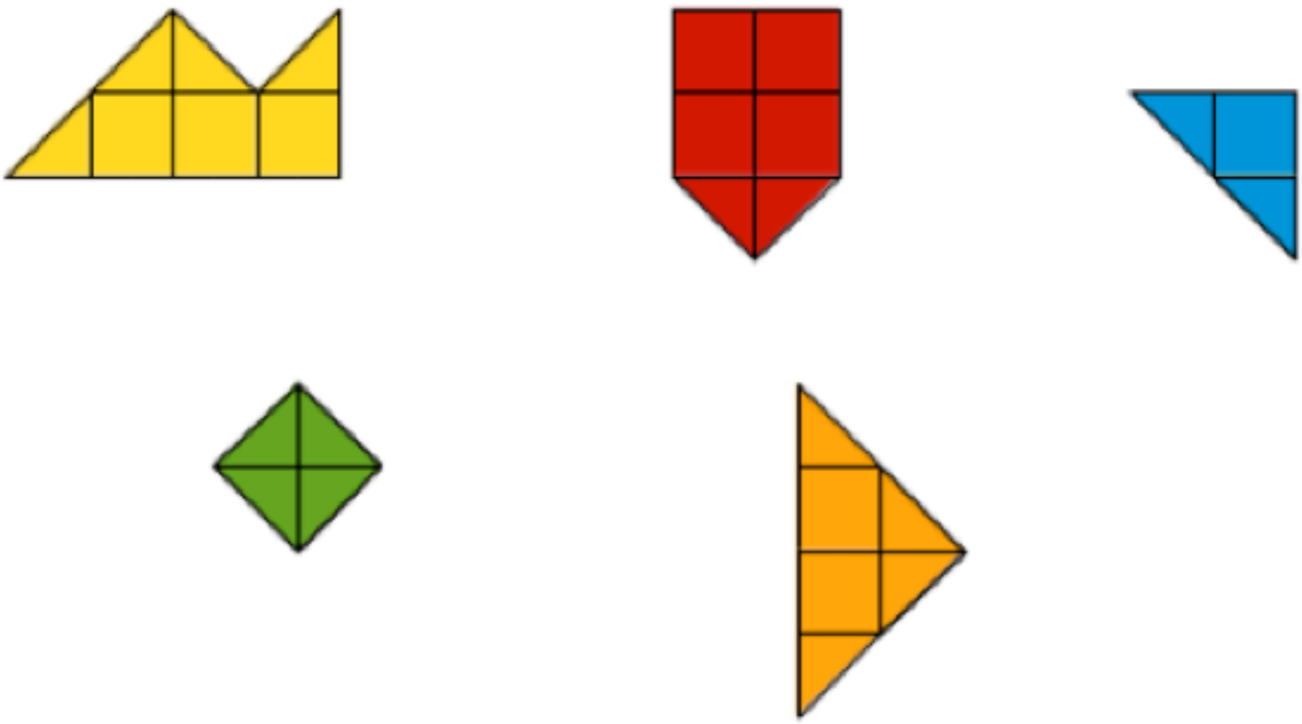
PREMIER PUZZLE

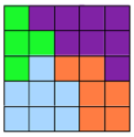
Consigne : On peut réaliser un carré en assemblant 4 des 5 pièces ci-dessous.
Quelle pièce ne sera pas utilisée ?



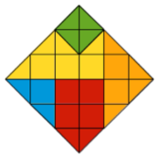
DEUXIEME PUZZLE

Consigne : Forme un carré en assemblant les 5 pièces ci-dessous.
ATTENTION : Cette fois, on doit utiliser toutes les pièces !





Synthèse de l'activité « puzzles »
Racine carrée



- La racine carrée d'un carré parfait est évidemment un nombre entier.

  Exemple : la racine carrée de 25 est 5 car $5^2 = 25$

  Remarque : $(-5)^2$ vaut également 25 mais <u>pour la racine carrée on choisit un positif</u>.

- La racine carrée des autres nombres n'est pas entière et souvent même pas décimale.

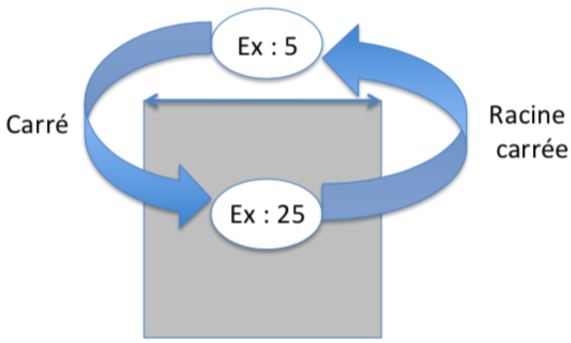
  Notation : la racine carrée de 18 s'écrit alors $\sqrt{18}$., et on a $(\sqrt{18}.)^2 = 18$

  Encadrements : on peut obtenir des valeurs approchées de plus en plus précises de $\sqrt{18}$.

  $16<18<25$ donc $4<\sqrt{18}. < 5$ or $4,5 = 20,25$ donc $4<\sqrt{18} < 4,5$ etc…

Calculatrice : lorsque l'on entre $\sqrt{18}$. sur la calculatrice, elle affiche $3\sqrt{2}$.
On peut obtenir une valeur approchée grâce à la touche S<>D : 4,24264068…

<u>A RETENIR</u>



A ne pas confondre avec :