

La Versiera d'Agnesi

Énoncé¹

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit a un réel non nul. On nomme A le point de coordonnées $(0, a)$, \mathcal{C} est le cercle de diamètre $[OA]$, son centre est I .

(T) est la tangente en A à \mathcal{C} .

Pour t appartenant à $\mathbf{R} - \{0\}$, on note (D_t) la droite d'équation $y = tx$. (D_t) recoupe \mathcal{C} en H et coupe (T) en K .

(x_h, y_h) et (x_k, y_k) sont les coordonnées respectives de H et K .

M est le point de coordonnées (x_k, y_h) .

L'objectif est d'étudier le lieu de M lorsque t décrit $\mathbf{R} - \{0\}$ et d'établir une propriété de la courbe obtenue.

Dans les questions 1., 2. et 3. on prendra $a = 2$.

1. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, réaliser une figure correspondant à la situation décrite. Faire apparaître le lieu de M .

Appeler l'examineur pour vérification de la figure construite.

2. Exprimer les coordonnées de M en fonction de t .
3. Montrer que M est situé sur la courbe d'équation $y = \frac{8}{x^2 + 4}$.

Appeler l'examineur pour vérification.

4. Plus généralement, on démontre que le lieu de M est la courbe d'équation

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2} \text{ appelée « Versiera d'Agnesi » ou « sorcière d'Agnesi ».}$$

On considère alors la fonction f définie sur \mathbf{R} par : $f(x) = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$.

La fonction f étant continue sur \mathbf{R} , elle y admet des primitives, parmi lesquelles on nomme F celle qui s'annule pour 0.

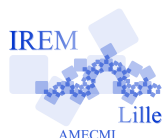
a. En calculant la dérivée de la fonction φ définie sur \mathbf{R} par $\varphi(x) = F(x) + F(-x)$, montrer que F est une fonction impaire.

b. En calculant la dérivée de la fonction ψ définie sur $]0, +\infty[$ par $\psi(x) = F(x) + F(\frac{a^2}{x})$, montrer que F admet une limite en $+\infty$ et que cette limite est égale à $\psi(a) = 2F(a)$.

c. On considère la fonction G définie sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par : $G(u) = F(a \tan u)$.
En calculant la dérivée de la fonction G , trouver une expression simple de $G(u)$.

d. En déduire $F(a)$. On admet que l'aire du domaine limité par la « sorcière d'Agnesi » et l'axe des abscisses est obtenue par $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x f(v) dv$ en U.A.

Vérifier que cette aire est égale à 4 fois l'aire du disque de diamètre $[OA]$.



¹Pierre Lapôte. Lycée S.Berthelot.Calais.