La Versiera d'Agnesi

Énoncé[1]

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit a un réel non nul.
On nomme A le point de coordonnées $(0,a)$, $\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre $[OA]$, son centre est I.
(T) est la tangente en A à $\mathscr{C}$.
Pour t appartenant à $\mathbf{R}-\{0\}$, on note (D_t) la droite d'équation $y=tx$. (D_t) recoupe $\mathscr{C}$ en H et coupe (T) en K.
(x_h,y_h) et (x_k,y_k) sont les coordonnées respectives de H et K.
M est le point de coordonnées (x_k,y_h).
L'objectif est d'étudier le lieu de M lorsque t décrit $\mathbf{R}-\{0\}$ et d'établir une propriété de la courbe obtenue.
Dans les questions 1., 2. et 3. on prendra $a=2$.

1. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, réaliser une figure correspondant à la situation décrite. Faire apparaître le lieu de M.

   Appeler l'examinateur pour vérification de la figure construite.

2. Exprimer les coordonnées de M en fonction de t.
3. Montrer que M est situé sur la courbe d'équation $y=\dfrac{8}{x^2+4}$.

   Appeler l'examinateur pour vérification.

4. Plus généralement, on démontre que le lieu de M est la courbe d'équation $y=\dfrac{a^3}{x^2+a^2}$ appelée « Versiera d'Agnesi » ou « sorcière d'Agnesi ».
   On considère alors la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x)=\dfrac{a^3}{x^2+a^2}$.
   La fonction f étant continue sur $\mathbf{R}$, elle y admet des primitives, parmi lesquelles on nomme F celle qui s'annule pour 0.
   a. En calculant la dérivée de la fonction φ définie sur $\mathbf{R}$ par $\varphi(x)=F(x)+F(-x)$, montrer que F est une fonction impaire.
   b. En calculant la dérivée de la fonction ψ définie sur $]0,+\infty[$ par $\psi(x)=F(x)+F(\frac{a^2}{x})$, montrer que F admet une limite en $+\infty$ et que cette limite est égale à $\psi(a)=2F(a)$.
   c. On considère la fonction G définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par : $G(u)=F(a\tan u)$.
   En calculant la dérivée de la fonction G, trouver une expression simple de $G(u)$.
   d. En déduire $F(a)$. On admet que l'aire du domaine limité par la « sorcière d'Agnesi » et l'axe des abscisses est obtenue par $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x}f(v)\mathrm{d}v$ en U.A.
   Vérifier que cette aire est égale à 4 fois l'aire du disque de diamètre $[OA]$.

IREM Lille AMECMI

[1] Pierre Lapôtre. Lycée S.Berthelot.Calais.