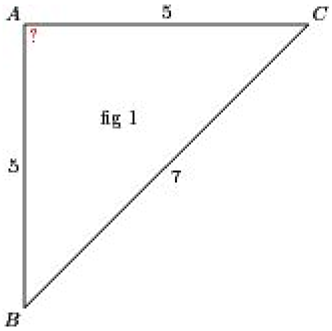
Commentaires sur les trois visages de Pythagore

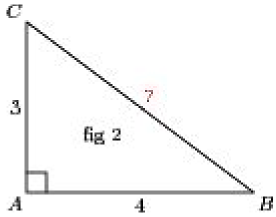
Introduction

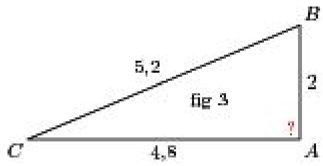
Voici un petit exercice que je vous invite à effectuer. Il peut vous aider à mesurer les difficultés qu'ont les élèves à distinguer théorème direct, réciproque et contraposée.

On donne les trois figures et les quatre démonstrations ci-dessous.

1) Quelles sont les trois questions que posent les figures ?
2) Trouver les démonstrations répondant aux questions (plusieurs choix sont possibles).







A) (Avec le théorème de Pythagore)
Le triangle ABC est rectangle en A, donc $BC^2=AC^2+AB^2$.
Par conséquent, $BC^2=3^2+4^2=9+16=25$, d'où $BC=5$.
B) (Avec un raisonnement par l'absurde)
Si le triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2=AC^2+AB^2$. Or, d'une part $BC^2=49$ et d'autre part $AC^2+AB^2=52+52=25+25=50$.
Le triangle ABC nest donc pas un triangle rectangle.
C) (Avec la réciproque du théorème de Pythagore)
On sait que $BC2=5,22=27,04$ et que $AC^2+AB^2=4,82+22=23,04+4=27,04$.
Par conséquent, le triangle ABC est rectangle en A.
D) (Avec la contraposée du théorème de Pythagore)
$BC^2=7^2=49$ et $AC^2+AB^2=5^2+5^2=25+25=50$. Donc $BC^2=AC^2+AB^2$.
Par conséquent, le triangle ABC n'est pas un triangle rectangle.

Les trois problèmes et leur solution rédigée

Je commente devant les élèves les trois énoncés et leur solution rédigée. J'insiste sur les points suivants :

- la nécessité d'analyser les données et de s'en faire une représentation mentale. Qu'est-ce que je connais, qu'est-ce que je recherche ?
- la nécessité de choisir, en fonction de cette analyse, la forme du théorème qui va permettre de trouver la solution.
- la nécessité d'écrire toutes les étapes du raisonnement, sans oublier d'indiquer le théorème que l'on utilise. J'indique que d'autres rédactions que celles adoptées sur le document sont possibles, mais il faut y retrouver toutes les étapes.

Après cette partie "cours magistral", plusieurs formes d'exercices sont possibles, entre autre:
- *fournir aux élèves des énoncés, à eux d'en donner la solution rédigée ;*
- *fournir aux élèves des solutions rédigées, à eux de reconstituer l'énoncé ;*
- *fournir aux élèves des énoncés accompagnés de solutions dans lesquelles manquent une ou deux étapes, à eux de compléter.*

Le travail par groupe de deux est ici recommandé, surtout si chaque partenaire peut alternativement résoudre un exercice et corriger celui de son camarade.

Un beau problème

Pour terminer, je donne ce problème particulièrement riche, qui recquiert l'utilisation de plusieurs versions du théorème de Pythagore : « Soit le carré $ABCD$ ... »