IREM Lille AMECMI

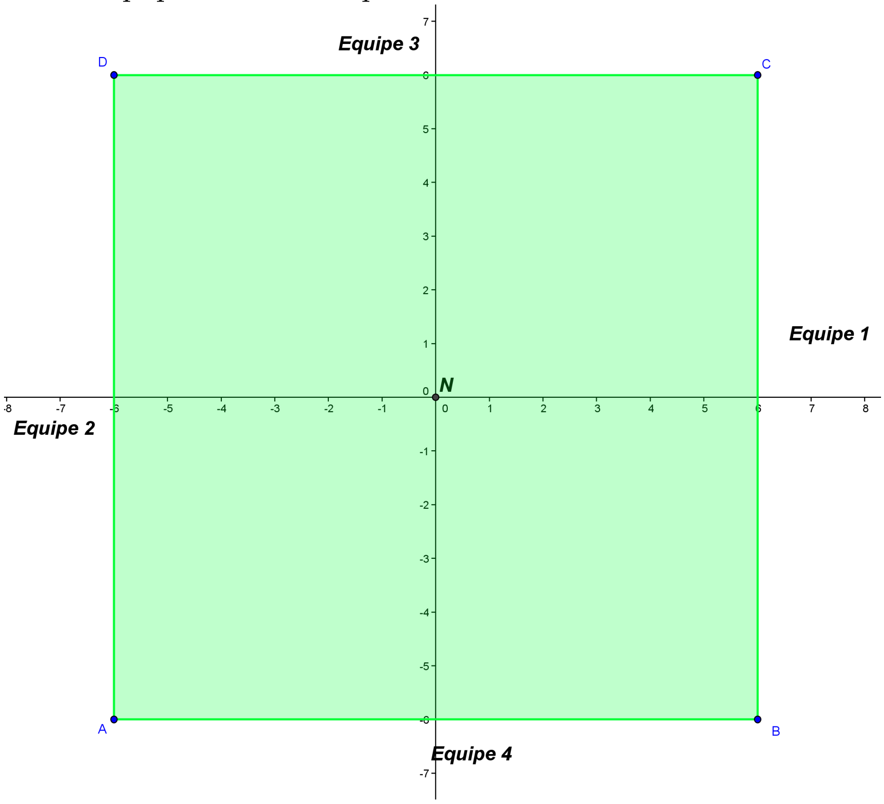
Marche aléatoire dans le plan
Simulation d'un jeu

TS

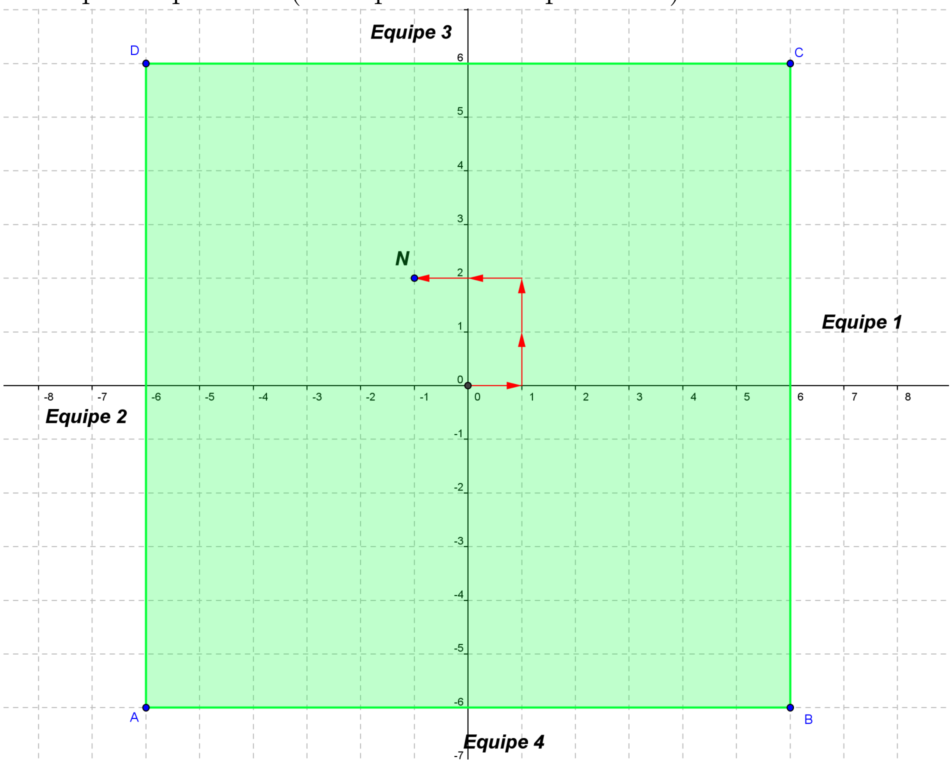
Fiche élève

Auteur : Jean-Marc Duquesnoy & Raymond Moché

La classe est partagée en 4 équipes. Elles sont placées autour d'un carré de la manière suivante :



Au début du jeu, le point N a pour coordonnées $(0\,;0)$ et se trouve donc au centre du carré.
Une question est posée à la classe. L'équipe qui répond correctement la première à cette question attire vers son côté le point N d'une unité.
Ensuite, on recommence : on pose une nouvelle question à la classe et ainsi de suite. La figure qui suit représente un début de partie possible (5 coups ont été représentés) :



On voit que c'est l'équipe 1 qui a répondu à la première question, puis ce fut le cas de l'équipe 3, deux fois de suite et enfin le tour de l'équipe 2 également deux fois de suite. Les coordonnées du point N ont été égales successivement à $(0\,;0)$, $(1\,;0)$, $(1\,;1)$, $(1\,;2)$, $(0\,;2)$ puis $(-1\,;2)$.

> Le jeu s'arrête dès que le point N touche le pourtour ABCDA du carré. C'est l'équipe qui a attiré N sur son bord qui a gagné (on remarquera que le pourtour ne peut pas être atteint en un des sommets A, B, C ou D). Le but de l'activité est de simuler ce jeu à l'aide d'un algorithme.

Pour cela, on admettra que les quatre équipes sont de même force, ce que l'on traduira en admettant qu'elles ont, à chaque question, la même probabilité fournir la réponse correcte ; on admettra aussi que cette probabilité est $\frac{1}{4}$ (c'est à dire que toute question finit par recevoir une réponse correcte).

> Le lecteur pourra remarquer que du point de vue du Calcul des probabilités, le jeu est entièrement décrit.

À partir de là, on peut démontrer qu'il y a toujours une équipe qui gagne, ce que nous admettrons.

Première partie

Le calcul des probabilités ne permet pas de déterminer le nombre de questions Q qu'il faudra poser au cours d'un jeu, parce que c'est un nombre aléatoire.

1 - Quelle est la plus petite valeur que Q peut prendre ? Avec quelle probabilité cette valeur peut-elle être prise ?

2 - Démonter que Q n'est pas bornée, c'est à dire que Q peut prendre des valeurs aussi grandes qu'on peut l'imaginer.

3 - On peut interpréter le jeu comme une marche aléatoire. Au début de la marche, N est à l'origine du plan. Puis chaque question revient à choisir au hasard une direction (N,S,E,O) et à déplacer le point N d'une unité dans cette direction. On continue les questions tant que le pourtour du carré n'est pas atteint. Traduire cette marche aléatoire par un algorithme exécutable pas « scilab pour les lycées ». Cet algorithme devra donner en sortie le nombre Q de questions posées et le numéro de l'équipe gagnante.

Deuxième partie

4 - On se demande maintenant comment se répartissent les victoires de chaque équipe quand on répète ce jeu n fois. Écrire un algorithme exécutable par « scilab pour les lycées » qui simule n répétitions de ce jeu et sorte les fréquences de victoire des 4 équipes.

5 - Donner à n la valeur 1000. Que constate-t-on ?

6 - Démontrer que la probabilité de victoire de chaque équipe lors d'un jeu est égale à $\frac{1}{4}$.

7 - Représenter graphiquement l'évolution des fréquences de victoires des 4 équipes au cours des 1000 simulations du jeu.

Troisième partie

On a vu que Q, nombre aléatoire des questions posées au cours d'un jeu, prend des valeurs au moins supérieures ou égales à 6 et qui peuvent être aussi grandes qu'on peut l'imaginer. On voudrait estimer sa valeur moyenne à l'aide de simulations.

8 - Représenter sur un graphique l'évolution de la valeur moyenne de Q au cours de 1000 simulations du jeu. Que peut-on remarquer ? Est-ce que cela contredit le fait (démontré) que Q peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut ?