Programmer l'algorithme d'Euclide

2e

Fiche élève

Auteurs : Raymond Moché et Jean-Marc Duquesnoy

Imaginons que l'on veuille calculer le **pgcd** de deux entiers a et b supérieurs ou égaux à 1 (entiers naturels).

1 Première partie

1. On peut utiliser une calculatrice, une **TI** par exemple.
   On tape sur la touche MATH, puis dans le menu num sur gcd(et on peut alors entrer les deux entiers a et b comme ceci : $gcd(a,b)$.
   Exemple : démontrer que 902 139 et 576 932 200 sont premiers.
2. On peut aussi utiliser la commande *pgcd* de *Scilab pour les lycées*.
   Exemple : calculer le pgcd de 123 456 789 et 987 654 321.
   On remarquera que le résultat ne s'affiche pas immédiatement parce que derrière ce programme se cachent énormément de calculs, que nous allons détailler.

2 Deuxième partie

Ci-dessus, nous avons utilisé une fonction (*gcd* ou *pgcd*) pré-programmée comme suit en langage naturel :

Algorithme 1 : Calcul du pgcd de deux entiers a et b

Entrées :
a : entier naturel
b : entier naturel
Sorties :
pgcd de a et b
début
  $r \leftarrow$ reste de la division euclidienne de a par b
  tant que $r \neq 0$ **faire**
    $a \leftarrow b$
    $b \leftarrow r$
    $r \leftarrow$ reste de la division euclidienne de a par b
  fin
  Afficher : "le pgcd de a et b vaut b"
fin

Voici l'algorithme 1 sous une forme exécutable par *Scilab pour les lycées* :

```
a=input("a=")
b=input("b=")
r=reste(a,b) ;
  while r<>0
    a=b ;
    b=r ;
    r=reste(a,b) ;
  end
PGCD=b
```

Application : Tester ce programme (fichier "Euclide.sci") en démontrant que tout nombre qui divise 76 641 678 et 2 985 350 841 divise aussi 795 288 645.

2.1 Calcul du reste de la division euclidienne

Le programme scilab précédent fait appel au calcul du reste de la division euclidienne. Ce calcul se fait selon l'algorithme suivant, en langage naturel :

Algorithme 2 : Calcul du reste de la division euclidienne de a par b

Entrées :
a : entier naturel
b : entier naturel
Sorties :
Reste de la division euclidienne de a par b
début
  $q \leftarrow$ partie entière de a/b
  $r \leftarrow a - b * q$
  Afficher : "le reste de la division euclidienne de a par b est r"
fin

Programmer cet algorithme sous une forme exécutable par *Scilab pour les lycées*. On constate qu'on a utilisé la notion de partie entière ("floor") dont on va programmer le calcul.

2.2 Calcul de la partie entière d'un réel x strictement positif

Voici l'algorithme en langage naturel :

Algorithme 3 : Calcul de la partie entière d'un réel strictement positif

Entrées :
x : nombre réel strictement positif
Sorties :
partie entière de x
début
  $E \leftarrow 0$
  tant que $E \leq x$ **faire**
    $E = E + 1$
  fin
  Afficher : "la partie entière de x vaut $E - 1$"
fin

Programmer cet algorithme sous une forme exécutable par *Scilab pour les lycées*.
Application : Calculer les parties entières de π (% pi), e (% e) et $\pi \cdot e$.

3 Troisième partie

Finalement, voici une version exécutable par *Scilab pour les lycées* de l'algorithme d'Euclide qui utilise seulement des nombres entiers ainsi que des additions, des multiplications et des boucles, qui sont des instructions "élémentaires" :

```
// Programmer l'algorithme d'Euclide : calcul de PGCD(a,b)
a=input('a=');
b=input('b=');
r=1;
  while r>0
    E=1;
      while b*E<=a
        E=E+1;
      end
    r=a-b*(E-1);
    a=b;
    b=r;
  end
PGCD=a
```

Vérifier ce programme (fichier "EuclideComplet.sci"), le commenter (en le complétant par des lignes de texte commençant par //, comme la première ligne qui est un commentaire).
Application : Démontrer que 1 111 divise 11 111 111.