Courbes osculatrices, mais pas que ....

Jean-Marc Duquesnoy
Professeur de Mathématiques au
lycée André Malraux de Béthune
Fabrice Eudes
Professeur de Mathématiques au collège de Marcq en Barœul

Groupe *ArCSiN*
jean-marc.duquesnoy@ac-lille.fr
fabrice.eudes@ac-lille.fr
Version 0,577 215 664 901 514 du document

Dernière mise à jour : 13 juin 2022

Nous devons utiliser le temps à bon e

de faire le bien.

Nelson Mandela

Communiquer, c'e

constitue.

Albert Jacquard

Je suis ambitieuse pour l'humanité ; moi je voudrais que tout le monde fût artiste, assez poète pour que la vanité humaine disparût.

Louise Michel

Avant-propos :

- Le document présent a été réalisé à l'aide de logiciels libres ou gratuits.
- Le package *pythontex.sty* a permis de compiler du code PYTHON (version 3.x) dans le source LaTeX.
- Nous inspirant très humblement de collègues ayant eux-mêmes suivi l'exemple de Donald Knuth, l'inventeur du logiciel de composition TeX, nous avons enregistré le numéro de la i-ème version de ce document égal au nombre de décimales de la valeur approchée par défaut d'une constante célèbre, mais laquelle ?
- L'Annexe 3 répondra à la question et pourra faire l'objet d'un thème d'étude programmé sur l'année et permettant de consolider des compétences attendues en fin de cycle Terminale.
- Il apparaîtra clairement aux lecteurs de ce document que les deux parties présentées sont indépendantes l'une de l'autre, et que l'Annexe doit son existence au choix qui a été fait pour numéroter les différentes versions du document, document qui a évolué fortement depuis le début de sa conception, jusqu'à la version présentée.
- Nous remercions très sincèrement les membres du groupe *ArCSiN*, en particulier Laurence Le Foll, pour leurs nombreuses relectures ayant permis de proposer ce document, ainsi que celui contenant les corrigés des différents TP et séances qui vont suivre.

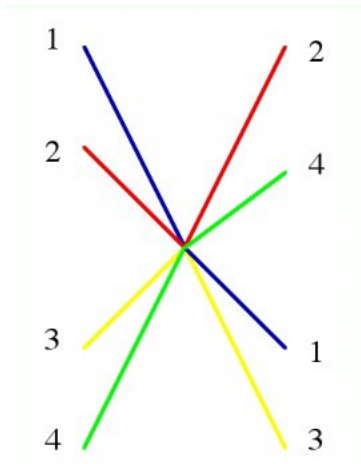
Table des matières

1 Quel est le problème ? Comment le proposer à des élèves de Terminale, et dans quel cadre ?

1.1 Problème

Lors d'une conférence, donnée en juin 2019 à l'occasion de la tenue des oraux de l'agrégation de mathématiques qui se sont déroulés au lycée Pasteur de Lille et visible à cette adresse https://webtv.univ-lille.fr/video/10428/un-ou-deux-theoremes-sur-les-polynomes-d%E2%80%99une-variable-reelle, Étienne Ghys, que l'on peut (re)découvrir ici http://perso.ens-lyon.fr/ghys/accueil/, a énoncé la question suivante :

Énoncé du Problème
Considérons quatre fonctions dont les graphes passent par un même point $A(a;b)$.
Est-il possible d'avoir cette configuration graphique ?



1.2 Comment ?

Nous allons nous placer dans le cas où la recherche va s'effectuer sur l'ensemble des fonctions polynômes[1] dont les graphes passent par l'origine[2].
Dans la suite du document on notera $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions polynômes f non nulles vérifiant $f(0) = 0$.

Définitions
Une fonction f d'une variable réelle x est une **fonction polynôme** si elle s'écrit sous la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

où les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels avec $a_n \neq 0$.
On dit que f est une fonction polynôme de **degré** n.
Pour toute fonction polynôme f non égale à la fonction nulle[a], la **valuation** de f, notée $\text{val}(f)$, est le plus petit entier k tel que $a_k \neq 0$

a. Pour la fonction nulle, $\text{val}(f)$ n'est pas définie, et c'est pour cette raison que l'on exclut cette fonction polynôme constante, qui, elle, existe.

1. On soumet le problème à des élèves de Terminale. Un lecteur averti prolongera la recherche s'il en a les moyens et pourra trouver la lumière en consultant la page qui se trouve derrière l'ampoule .
2. Des transformations adaptées, en l'occurrence des translations, feront le travail.

1.3 Mise en place du projet

Le projet se déroulera sur l'année de Terminale par le biais de plusieurs activités proposées, peut-être sur la base du volontariat, et suffisamment espacées dans le temps pour que les élèves participants puissent « digérer » les nouvelles notions abordées à chaque séance.
Chacune des activités sera l'occasion de consolider ou de découvrir des notions faisant partie des programmes de la spécialité Mathématiques, consultables à cette adresse
https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf,
et de l'option Mathématiques Expertes, programmes que l'on peut consulter en suivant ce lien
https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/82/5/spe264_annexe_1158825.pdf.
On pourra aussi consulter la page visible à cette adresse
http://images.math.cnrs.fr/+Que-devient-l-enseignement-des-mathematiques+.html.

Avertissement : Conscients que plusieurs méthodes employées dans quelques parties du document paraîtront hors de portée d'une grande majorité d'élèves de Terminale, nous pensons que la différenciation devient incontournable si l'on envisage la mise en place de ce projet sur une année scolaire.

2 Activités

2.1 Première Partie : Polynôme, degré et valuation

Séance 1

Pour chacune des fonctions polynômes suivantes, déterminer le degré et la valuation :

- $f_0(x) = 4 + 2x + 3x^5$.
- $f_1(x) = 2x + 3x^5$.
- $f_2(x) = 25x^7 + x^4 + 2x^3$.
- $f_3(x) = -6x^7$.
- $f_4(x) = 8$.
- $f_5(x) = 2x^2 + x^7$.
- $f_6(x) = -6x^4 + 1$.
- $f_7(x) = -12$.

2.2 Deuxième Partie : Parité de la valuation et position du graphe

Séance 2

1. (a) Tracer à l'aide de la calculatrice ou du logiciel *GeoGebra*, que l'on peut utiliser en ligne à cette adresse https://www.geogebra.org/graphing, les représentations graphiques sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$ des huit fonctions définies dans la **Séance 1** précédente.

   (b) Conjecturer à l'aide de ce qui précède, une règle donnant la position, en fonction de la parité de $\text{val}(f)$, de la courbe représentative de la fonction polynôme f par rapport à l'axe des abscisses au voisinage de 0.

2. Soit f une fonction définie [a] sur $\mathbb{R}$, telle que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

   (a) Justifier qu'il existe un intervalle $]-a; a[$ tel que, pour tout $x \in]-a; a[$, $\dfrac{1}{2} < f(x) < \dfrac{3}{2}$

   (b) Déduire de ce qui précède le signe de $f(x)$ pour les valeurs de x appartenant à l'intervalle $]-a\,;\,a[$.

3. Soit P une fonction polynôme de valuation k et de degré n, appartenant à $\mathscr{P}$.

   (a) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = a_k x^k \times f(x)$
   f étant une fonction polynôme vérifiant $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

(b) Déduire de ce qui précède une règle donnant la position, en fonction du signe de a_k et de la parité de $\text{val}(f)$, de la courbe représentative de la fonction P par rapport à l'axe des abscisses au voisinage de 0 [b].

---

a. Nous manipulons des fonctions polynômes, on peut donc supposer que la fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Une petite gymnastique sur le réel a sera nécessaire si la fonction f est définie sur un intervalle I strictement inclus dans $\mathbb{R}$.

b. Il est évident qu'il faudra préciser la notion de voisinage, en lien avec la question 1b.

2.3 Troisième Partie : Positions relatives des représentations graphiques de deux fonctions polynômes, de trois fonctions polynômes

Séance 3

1. Soient P_1 et P_2 deux fonctions polynômes appartenant à $\mathscr{P}$.

   Dans les deux cas qui suivent, donner la position relative au voisinage de 0 des représentations graphiques, dans un repère donné, des fonctions polynômes P_1 et P_2 en fonction de la parité de $\text{val}(P_1 - P_2)$.

   (a) $P_1(x) = x^2 + 2x^3 + x^4$ et $P_2(x) = x - 2x^3 - x^4$

   (b) $P_1(x) = 2x^3 + x^4$ et $P_2(x) = x^2 - 2x^3$

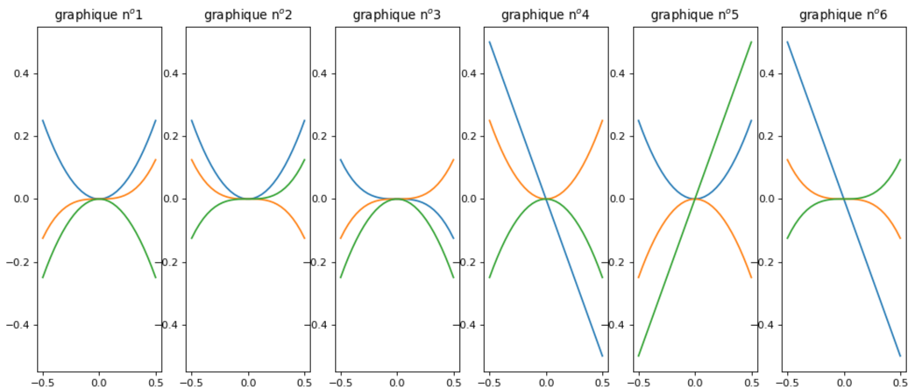
   (c) Énoncer une propriété qui donne la position relative des représentations graphiques de deux fonctions polynômes P_1 et P_2 appartenant à $\mathscr{P}$ en fonction de la parité de $\text{val}(P_1 - P_2)$.

2. Soient P_1, P_2 et P_3 trois fonctions polynômes appartenant à $\mathscr{P}$.

   (a) Soient les fonctions polynômes appartenant à $\mathscr{P}$ définies respectivement par :

   $P_1(x) = x$; $P_2(x) = x^2$; $P_3(x) = x^3$

   En observant les graphiques qui suivent, justifier que le nombre de positions relatives de trois représentations graphiques respectives de trois fonctions polynômes au voisinage de 0 est égal au nombre de permutations d'un ensemble à trois éléments.



   (b) Soit σ, une permutation de l'ensemble $E_n = \{1; 2; 3; \ldots; n\}$, n étant un entier naturel non nul.

   On peut noter :

   $$\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & \text{n} \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

   Démontrer par récurrence que le nombre de permutations de l'ensemble E_n, $n \geqslant 1$, est égal à $n!$

   (c) Généraliser le nombre de positions relatives envisageables de n représentations graphiques respectives de n fonctions polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_n$ appartenant à $\mathscr{P}$ au voisinage de 0.

2.4 Quatrième Partie : Épilogue du projet

Question
Est-il possible de trouver P_1, P_2, P_3 et P_4 quatre fonctions polynômes appartenant à $\mathscr{P}$ vérifiant :

(1) Pour x strictement négatif suffisamment petit,

$$P_1(x) > P_2(x) > P_3(x) > P_4(x)$$

(2) Pour x strictement positif suffisamment petit,

$$P_2(x) > P_4(x) > P_1(x) > P_3(x)$$

Séance 4
Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 quatre fonctions polynômes vérifiant (1) et (2).

1. Déterminer les parités de $\text{val}(f_2 - f_1)$, $\text{val}(f_3 - f_1)$ et $\text{val}(f_4 - f_1)$ notées respectivement v_{21}, v_{31} et v_{41} .
2. Après avoir déterminé la parité de $v_{32} = \text{val}(f_3 - f_2)$ et remarqué que $f_3 - f_2 = (f_3 - f_1) - (f_2 - f_1)$, démontrer que $v_{21} > v_{31}$.
3. En procédant de la même manière que dans la question précédente, justifier que $v_{41} < v_{31}$.
4. Déterminer dans quel cas la valuation de la différence de deux fonctions polynômes de l'ensemble $\mathscr{P}$ de valuations respectives impaires peut être paire.
5. En remarquant que $f_4 - f_2 = (f_4 - f_1) - (f_2 - f_1)$, démontrer que $v_{21} = v_{41}$.
6. Conclure quant à l'existence possible de quatre fonctions polynômes de $\mathscr{P}$ vérifiant (1) et (2).

2.5 Cinquième Partie : Prolongement possible

Séance 5
Dans le paragraphe 2.4 précédent, on a démontré que l'existence de quatre fonctions polynômes appartenant à $\mathscr{P}$ vérifiant (1) et (2) est impossible. Cela correspond à la configuration graphique associée à la permutation σ définie par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

En s'inspirant de la démonstration de la partie précédente, démontrer que la configuration graphique associée à la permutation σ définie par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

n'est pas possible non plus.

3 Annexe : la constante d'Euler

Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

Dans ce qui va suivre 3.4, nous allons démontrer que la suite (u_n) est convergente, et noterons γ sa limite, appelée *constante d'Euler*.

Il est clair que $\lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$[3].

Et, d'autre part, nous montrerons dans la prochaine section 3.1, que $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, où, pour tout n entier naturel non nul, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, (S_n) étant appelée *série harmonique*.

Ce qui précède constituera donc un exemple non trivial qui donne une forme indéterminée pour le calcul de la limite de la différence de deux suites.

La convergence de la suite (u_n) montrera que les deux suites (S_n) et $(\ln n)$ sont asymptotiquement liées.

3.1 Divergence de la série harmonique $(\mathbf{S_n})$

TP1

Raisonnons par l'absurde.

Supposons que $\lim_{n\to+\infty} S_n = l$, autrement dit, supposons que la suite (S_n) est convergente.

1. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_{2n}$.
2. Déduire de ce qui précède $\lim_{n\to+\infty} (S_{2n} - S_n)$.
3. En remarquant que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k compris entre $n+1$ et $2n$, on peut écrire :
$$\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}$$
justifier qu'alors, pour tout entier naturel n non nul :
$$S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$$
4. Conclure quant à l'hypothèse faîte sur la convergence de la suite (S_n).
La suite (S_n) est divergente, mais a-t-elle pour limite $+\infty$? N'a t-elle pas de limite ?
Ce qui suit va apporter une réponse à ces questions.
5. Démontrer que toute suite croissante non majorée est divergente vers $+\infty$.
6. Démontrer que la suite (S_n) est croissante.
7. Justifier, en utilisant les résultats des questions précédentes, que $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

3.2 Monotonie de la suite $(\mathbf{u_n})$

TP2

1. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

3. Il pourra être intéressant de demander aux élèves de (re)démontrer le résultat, dans le cadre du programme de la spécialité Mathématique.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

(a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(b) Justifier que, pour tout réel $x \geqslant 1$:

$$f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$$

(c) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, puis en déduire le signe de $f(x)$ pour tout réel $x \in [1\ ;\ +\infty[$.

3. De ce qui précède, déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

3.3 Minorant de la suite $(\mathbf{u_n})$

TP3

1. Justifier que, pour tout entier naturel k non nul :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$$

2. Déduire de ce qui précède que, pour tout entier naturel k non nul :

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

On notera I_k cette inégalité.

3. Pour tout entier naturel n non nul, en appliquant l'inégalité I_k pour k variant successivement de 1 à n, justifier que $u_n \geqslant 0$.

3.4 Convergence de la suite $(\mathbf{u_n})$

TP4

Des deux sections précédentes, justifier que la suite (u_n) est convergente. On notera γ sa limite, et on l'appellera *constante d'Euler*.

3.5 Valeurs approchées de γ

Remarque en direction des collègues qui décideraient de travailler le sujet avec des élèves

La section 3.5.1 qui suit peut constituer un travail proposé aux élèves en classe ou sous la forme d'un devoir à la maison.

Par contre, la section 3.5.2 s'adresse à des lecteurs avertis, et ne pourra être proposée à des élèves qu'à titre d'information [a].

a. Un travail algorithmique pourra néanmoins être envisagé concernant le calcul des coefficients binomiaux et des nombres de Bernoulli.

3.5.1 Premier algorithme : pas terrible

Le calcul au moyen de la suite $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ est extrêmement lent et imprécis. Il présente néanmoins un intérêt pédagogique pour se sensibiliser aux problèmes de propagation d'erreurs d'arrondi. En simple précision, pour 100 000 termes, en sommant dans l'ordre naturel, il y a une erreur après la 4^{e} décimale.
Le script PYTHON qui suit permet de calculer une valeur approchée de γ :

```
from math import *
somme=0
n=100000
for i in range(1,n+1):
    somme+=1/i
a=somme-log(n)
```

3.5.2 Deuxième algorithme : un peu mieux

Des méthodes plus efficaces doivent être mises en œuvre pour obtenir une précision suffisante.
Il n'est pas question dans le présent document d'étudier des méthodes d'approximation plus rapides, le programme de Terminale ne le permettant pas.
Ci-après se trouve néanmoins une copie d'écran d'une partie d'un document beaucoup plus complet, que l'on peut consulter à cette adresse http://numbers.computation.free.fr/Constants/Gamma/gamma.pdf

> The Euler-Maclaurin summation can be used to have a complete asymptotic expansion of the harmonic numbers. We have (see the essay on Bernoulli's numbers)
>
> $$H_n - \log(n) \approx \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{k\geq 1} \frac{B_{2k}}{2k}\frac{1}{n^{2k}}, \qquad (3)$$
>
> where the B_{2k} are the Bernoulli numbers. Since B_{2k} grows like $2(2k)!/(2\pi)^{2k}$, the asymptotic expansion should be stopped at a given k. For example, the first terms are given by
>
> $$\gamma = H_n - \log(n) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{120n^4} + \frac{1}{252n^6} - \frac{1}{240n^8} + \frac{1}{132n^{10}} - \frac{691}{32760n^{12}} + \frac{1}{12n^{14}}.$$
>
> This technique, *directly* inherited from the definition, can be employed to compute γ at a high precision but suffers from two major drawbacks :
>
> - It requires the computation of the B_{2k}, which is not so easy ;
> - the rate of convergence is not so good compared to other formulas with γ.

Ce qui précède met en scène la propriété suivante :
Formule d'Euler Mac-Laurin
Soit f une fonction de classe $C^{\infty}[a;b]$, alors

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) \sim \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j}}{(2j)!}\left(f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)\right)$$

Les coefficients B_{2j} sont les nombres de Bernoulli, que l'on définira et calculera dans la section 3.5.4.
On propose un script PYTHON qui permet de calculer une valeur approchée de γ à moindre coût :

```
from bernoulli2 import *
def constanteeuler(n):
    c=0
    for i in range(1,n+1):
        c=c+1/i
```

```
    c=c-log(n)-1/(2*n)
    for i in range(1,n):
        c=c+bernoulli(2*i)/(2*i*n**(2*i))
    return(c)
```

Ce qui donne, si l'on saisit la commande **constanteeuler(80)** en console :
Une valeur approchée de γ à 10^{-15} près est 0,577 215 664 901 533 4

3.5.3 Comparaison des méthodes d'approximation

Le tableau qui suit donne un aperçu des vitesses de convergence respectives des deux algorithmes précédents [4] en comparant les valeurs renvoyées par les deux algorithmes aux trente cinq premières décimales exactes que le logiciel *wxMaxima* peut afficher [5].

Valeurs approchées de γ

γ à 10^{-35} près (consulter 3.5.5)	$\gamma \approx 0{,}577\,215\,664\,901\,532\,860\,606\,512\,090\,082\,402\,43$
γ et le premier algo$(n = 100\,000)$	$\gamma \approx 0{,}577\,220\,664\,893\,106\,4$
γ et le deuxième algo$(n = 80)$	$\gamma \approx 0{,}577\,215\,664\,901\,533\,4$

3.5.4 Les nombres de Bernoulli

On pourra consulter la page qui se trouve derrière ce lien :
https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_Bernoulli#Lien_avec_les_polyn%C3%B4mes_de_Bernoulli.
Définition des nombres de Bernoulli
Les polynômes de Bernoulli $B_m(X)$ sont reliés aux nombres de Bernoulli B_k par :

$$B_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_k\, x^{m-k}$$

Ils vérifient les relations :

- $B_0(X) = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad B'_{n+1}(X) = (n+1)B_n(X)$
- $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \displaystyle\int_0^1 B_n(x)\mathrm{d}x = 0$
- $B_m(0) = B_m$ (le terme constant du polynôme de Bernoulli est égal au nombre de Bernoulli de même indice)

Calcul des nombres de Bernoulli par récurrence (admis) :
Pour tout entier $i \geqslant 1$

$$B_i = -\frac{1}{i+1}\sum_{k=0}^{i-1}\binom{i+1}{k}B_k = -\sum_{k=0}^{i-1}\frac{i!}{(i+1-k)!k!}B_k.$$

TP5

1. Proposer un algorithme, codé en langage PYTHON, qui déclare une fonction, nommée *binom(n,p)*, ayant pour arguments les entiers naturels n et p, avec $p \leqslant n$, et qui renvoie le coefficient binomial $\displaystyle\binom{n}{p}$.
2. En utilisant la relation de récurrence 3.5.4, proposer un algorithme qui déclare une fonction nommée

4. Lorenzo Mascheroni proposa 32 décimales en 1 790, mais avec une erreur à partir de la 20ᵉ, erreur corrigée en 1 809 par Johann Georg von Soldner. Donald Knuth donne 1 271 décimales en 1 962, Thomas Papanikolaou donne un million de décimales en 1 997, P. Dechimel et X. Gourdon en donnent cent millions deux ans plus tard. En 2 017, le record vérifié semble être détenu par Ron Watkins avec plus de 400 milliards de décimales (477 511 832 674 pour être précis) en utilisant y-cruncher1.

On ignore toujours si la constante d'Euler-Mascheroni est ou non un nombre rationnel. Cependant, l'analyse en fraction continue de la constante indique que si elle est rationnelle, le dénominateur de sa fraction irréductible possède plus de 242 080 chiffres (Havil 2 003, p. 97). « *Source WIKIPEDIA* »

5. Le logiciel permet d'afficher 95 décimales exactes.

| *bernoulli(n)*, ayant pour argument l'entier naturel n, et qui renvoie le nombre de Bernoulli B_n. |

Voici un script PYTHON qui répond aux deux questions précédentes et qui décrit ce qui se trouve 3.5.2 dans la librairie ***bernoulli2*** permettant de déclarer la fonction ***constanteeuler(n)***.

```
from math import *
def binom(n,p):
    return(int(factorial(n)/(factorial(p)*factorial(n-p))))
def bernoulli(n):
    B = [1]
    for m in range(1,n+1):
        if m>1 and m%2!=0:
            B.append(0)
        else:
            c = 0
            for k in range(0,m):
                c += binom(m+1,k)*B[k]
            B.append(-c/binom(m+1,m))
            #ou B.append(-c/m+1)
    return(B[n])
```

Si on veut afficher les vingt premières valeurs approchées, à 10^{-17} près, des nombres de Bernoulli, il suffit de compiler le script suivant :

```
for n in range(20):
    print("si n=",n," alors B(",n,")=",bernoulli(n),'\n')
```

qui affiche
si n= 0 alors B(0)= 1
si n= 1 alors B(1)= -0.5
si n= 2 alors B(2)= 0.16666666666666666
si n= 3 alors B(3)= 0
si n= 4 alors B(4)= -0.033333333333333305
si n= 5 alors B(5)= 0
si n= 6 alors B(6)= 0.023809523809523662
si n= 7 alors B(7)= 0
si n= 8 alors B(8)= -0.03333333333333233
si n= 9 alors B(9)= 0
si n= 10 alors B(10)= 0.07575757575756605
si n= 11 alors B(11)= 0
si n= 12 alors B(12)= -0.25311355311342115
si n= 13 alors B(13)= 0
si n= 14 alors B(14)= 1.1666666666642225
si n= 15 alors B(15)= 0
si n= 16 alors B(16)= -7.092156862685596
si n= 17 alors B(17)= 0
si n= 18 alors B(18)= 54.971177943016926
si n= 19 alors B(19)= 0

3.5.5 Autre méthode permettant de calculer γ : une définition intégrale et *wxMaxima*

On peut démontrer, mais cela dépasse le cadre de ce document, que :

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t$$

wxMaxima peut-il nous aider ?

Version Fabrice

Fixons la précision à 35 décimales. :

```
-->     fpprec :35;
```

$$35 \tag{\% o1}$$

Demandons à *wxMaxima* de calculer $-\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t$

```
-->     a :-'integrate(exp(-t)*log(t),t,0,inf)=-integrate(exp(-t)*log(t),t,0,inf );
```

$$-\text{'integrate}\left(\%e^{-t}\log(t), t, 0, \infty\right) = \gamma \tag{\% o2}$$

Affichons la valeur approchée de γ avec la précision fixée au départ :

```
-->     bfloat(-integrate(exp(-t)*log(t),t,0,inf));
```

$$5.7721566490153286060651209008240243b-1 \tag{\% o3}$$

? Quelle est la méthode choisie par les développeurs de *wxMaxima* permettant d'obtenir autant de précision dans le calcul de la constante γ ?

Version JMD

Fixons la précision à 35 décimales. :

```
(%i1)   fpprec :35;
```

$$35 \tag{fpprec}$$

Demandons à *wxMaxima* de calculer $-\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t$

```
(%i2)   a :-'integrate(exp(-t)*log(t),t,0,inf)=-integrate(exp(-t)*log(t),t,0,inf);
```

$$-\int_0^{\infty} \%e^{-t}\log(t)dt = \gamma \tag{a}$$

Affichons la valeur approchée de γ avec la précision fixée au départ :

```
(%i3)   bfloat(-integrate(exp(-t)*log(t),t,0,inf));
```

$$5.7721566490153286060651209008240243b-1 \tag{\% o3}$$

? Quelle est la méthode choisie par les développeurs de *wxMaxima* permettant d'obtenir autant de précision dans le calcul de la constante γ ?