Courbes osculatrices, mais pas que ....
Éléments de correction

Jean-Marc Duquesnoy
Professeur de Mathématiques au lycée André Malraux de Béthune
Fabrice Eudes
Professeur de Mathématiques au collège de Marcq en Barœul

Groupe *ArCSiN*
jean-marc.duquesnoy@ac-lille.fr
fabrice.eudes@ac-lille.fr

Version 0,577 215 664 901 514 du document

Dernière mise à jour : 2 juillet 2022

Nous devons utiliser le temps à bon e

de faire le bien.

Nelson Mandela

Communiquer, c'e

constitue.

Albert Jacquard

Je suis ambitieuse pour l'humanité ; moi je voudrais que tout le monde fût artiste, assez poète pour que la vanité humaine disparût.

Louise Michel

Table des matières

2 Activités

2.1 Première Partie : Polynôme, degré et valuation

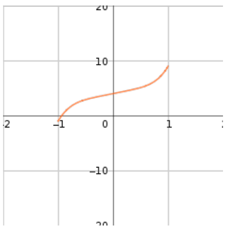
Séance 1

1. $f_0(x) = 4 + 2x + 3x^5$.
   $\deg(f_0) = 5$ et $\mathrm{val}(f_0) = 0$.
2. $f_1(x) = 2x + 3x^5$.
   $\deg(f_1) = 5$ et $\mathrm{val}(f_1) = 1$.
3. $f_2(x) = 25x^7 + x^4 + 2x^3$.
   $\deg(f_2) = 7$ et $\mathrm{val}(f_2) = 3$.
4. $f_3(x) = -6x^7$.
   $\deg(f_3) = 7$ et $\mathrm{val}(f_3) = 7$.
5. $f_4(x) = 8$.
   $\deg(f_4) = 0$ et $\mathrm{val}(f_4) = 0$.
6. $f_5(x) = 2x^2 + x^7$.
   $\deg(f_5) = 7$ et $\mathrm{val}(f_5) = 2$.
7. $f_6(x) = -6x^4 + 1$.
   $\deg(f_6) = 4$ et $\mathrm{val}(f_6) = 0$.
8. $f_7(x) = -12$.
   $\deg(f_7) = 0$ et $\mathrm{val}(f_7) = 0$.

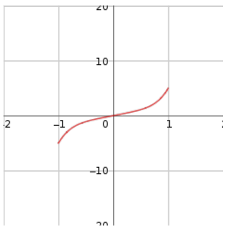
2.2 Deuxième Partie : Parité de la valuation et position du graphe

Séance 2

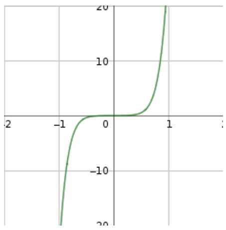
1. (a) Attention : le repère est orthogonal mais non orthonormé.



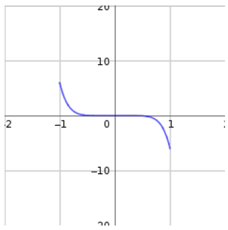
f_0



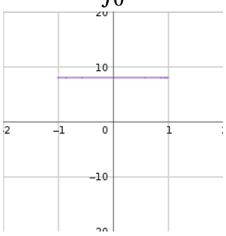
f_1



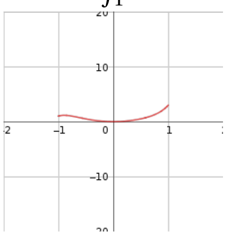
f_2



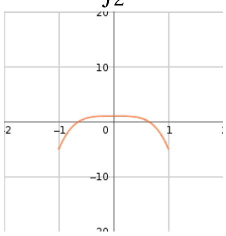
f_3



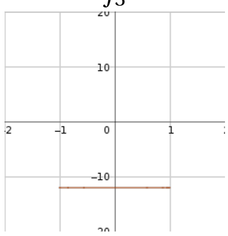
f_4



f_5



f_6



f_7

   (b) Les courbes représentatives des fonctions f_0, f_4, f_5, f_6 et f_7 restent d'un même côté de l'axe des abscisses (sur l'intervalle $[-1; 1]$ ou un intervalle plus petit contenant zéro pour f_6). Elles ont une valuation égale à 0 ou 2 qui sont des nombres pairs.
   Les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2 et f_3 traversent l'axe des abscisses. Elles ont une valuation égale à 1, 3 ou 7 qui sont des nombres impairs.
   Conjecture : si $\mathrm{val}(f)$ est impaire alors la courbe représentative de f traverse l'axe des abscisses, sinon elle reste d'un même côté de cet axe (au voisinage de 0).

2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, donc elle est définie sur un intervalle $[-\eta\,;\,\eta]$, où $\eta > 0$, intervalle que l'on appellera voisinage de zéro.

   (a) Par définition de $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, pour tout intervalle $]1-\epsilon\,;1+\epsilon[$, $\epsilon > 0$, il existe un intervalle centré en 0, $]-a_\epsilon\,;\,a_\epsilon[$, vérifiant :

   pour tout réel $x \in]-a_\epsilon\,;\,a_\epsilon[$, $f(x) \in]1-\epsilon\,;1+\epsilon[$.

   Fixons $\epsilon = \dfrac{1}{2}$. On obtient :

   pour tout réel $x \in]-a_\epsilon\,;\,a_\epsilon[$, $f(x) \in \left]1-\dfrac{1}{2}\,;1+\dfrac{1}{2}\right[$.

   Autrement dit, en posant $a = a_\epsilon$, pour tout réel $x \in]-a\,;a[$, $\dfrac{1}{2} < f(x) < \dfrac{3}{2}$.

   (b) Pour tout $x \in]-a;a[$, on a $f(x) > \dfrac{1}{2} > 0$ donc f est (strictement) positive sur cet intervalle.

3. Soit $P \in \mathscr{P}$ telle que $\mathrm{val}(P) = k$ et $\deg(P) = n$.

   (a) Par définition du degré et de la valuation d'une fonction polynôme, on a $k \leqslant n$ et l'existence de réels $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$ vérifiant $a_k \neq 0$, $a_n \neq 0$ tels que :
   pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = a_k x^k + a_{k+1}x^{k+1} + \ldots + a_n x^n$.
   On factorise par $a_k x^k$ et on obtient :
   pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = a_k x^k \left(1 + \dfrac{a_{k+1}}{a_k}x + \ldots + \dfrac{a_n}{a_k}x^{n-k}\right)$.
   En nommant f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + \dfrac{a_{k+1}}{a_k}x + \ldots + \dfrac{a_n}{a_k}x^{n-k}$, on a l'égalité demandée $P(x) = a_k x^k \times f(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

   (b) Premier cas : $\mathrm{val}(f) = k$ est paire. On note $k = 2\ell$, avec $\ell \in \mathbb{N}$.
   D'après 2b, il existe un intervalle $]-a;\,a[$ où f est positive.
   Pour tout x dans cet intervalle, $a_k x^k = a_k x^{2\ell} = a_k\left(x^\ell\right)^2$.
   Donc, sur cet intervalle, $a_k x^k$ est du signe de a_k et P également. On en déduit :
   — si $a_k > 0$, la courbe représentative de P reste au-dessus de l'axe des abscisses ;
   — si $a_k < 0$, la courbe représentative de P reste au-dessous de l'axe des abscisses.
   Deuxième cas : $\mathrm{val}(f) = k$ est impaire. On note $k = 2\ell + 1$, avec $\ell \in \mathbb{N}$.
   D'après 2b, il existe un intervalle $]-a;\,a[$ où f est positive.
   Pour tout x dans cet intervalle, $a_k x^k = a_k x^{2\ell+1} = a_k x\left(x^\ell\right)^2$.
   Si $x > 0$, c'est à dire $x \in [0;a[$, alors $a_k x^k$ est du signe de a_k et P également. Et si $x < 0$, c'est à dire $x \in]-a;0]$, alors $a_k x^k$ est du signe de $-a_k$ et P également.
   En résumé, le signe de P est différent à gauche et à droite de zéro. On en déduit :
   — si $a_k > 0$, la courbe représentative de P passe de au-dessous à au-dessus de l'axe des abscisses ;
   — si $a_k < 0$, la courbe représentative de P passe de au-dessus à au-dessous de l'axe des abscisses.
   On peut regrouper ces différentes situations dans un tableau (k est la valuation de P et C_P sa courbe représentative) :

	k pair	k impair
$a_k > 0$	C_P au-dessus de (Ox)	C_P au-dessous puis au-dessus
$a_k < 0$	C_P au-dessous de (Ox)	C_P au-dessus puis au-dessous

2.3 Troisième Partie : Positions relatives de deux fonctions polynômes, de trois fonctions polynômes

Séance 3

1. Dans les questions 1a et 1b ci-dessous, les fonctions polynômes P_1 et P_2 vérifient $P_1(0) = P_2(0) = 0$ donc leurs représentations graphiques passent par l'origine du repère.

   (a) la fonction $P_1 - P_2$, différence des fonctions polynômes P_1 et P_2, est aussi une fonction polynôme. Pour tout x réel, on a :

   $$(P_1 - P_2)(x) = x^2 + 2x^3 + x^4 - \left(x - 2x^3 - x^4\right) = x^2 + 2x^3 + x^4 - x + 2x^3 + x^4 = -x + x^2 + 4x^3 + 2x^4$$

   $\text{val}(P_1 - P_2) = 1$ est impair et $a_1 = -1$ est négatif. Sur un voisinage $]-a\,;a[$ de zéro, la courbe représentative de $P_1 - P_2$ passe de au-dessus à au-dessous de l'axe des abscisses,

   — Pour tout $x \in]-a\,;0[$, on a $P_1(x) - P_2(x) = (P_1 - P_2)(x) > 0$ donc $P_1(x) > P_2(x)$. La courbe représentative C_1 de P_1 est au-dessus de la courbe représentative C_2 de P_2.

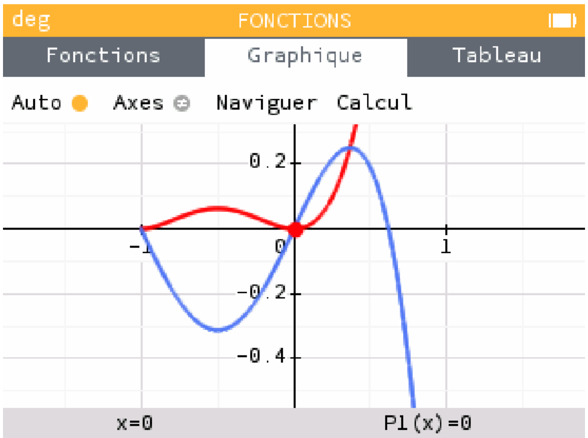
   — Pour tout $x \in]0\,;a[$, on a $P_1(x) - P_2(x) = (P_1 - P_2)(x) < 0$ donc $P_1(x) < P_2(x)$. La courbe représentative C_1 de P_1 est au-dessous de la courbe représentative C_2 de P_2.

   On peut affiner cette conclusion en considérant P_1 et P_2.
   $\text{val}(P_1) = 2$ est paire et le coefficient de x^2 dans P_1 est 1, positif. Donc C_1 reste au-dessus de l'axe des abscisses.
   $\text{val}(P_2) = 1$ est impaire et le coefficient de x dans P_2 est 1, positif. Donc C_2 passe d'au-dessous à au-dessus de l'axe des abscisses.

   — Pour tout $x \in]-a\,;0[$, on a C_1 dans le deuxième quadrant et C_2 dans le quatrième quadrant.

   — Pour tout $x \in]0\,;a[$, on a C_1 dans le premier quadrant, C_2 dans le premier quadrant, avec C_2 au-dessus de C_1.

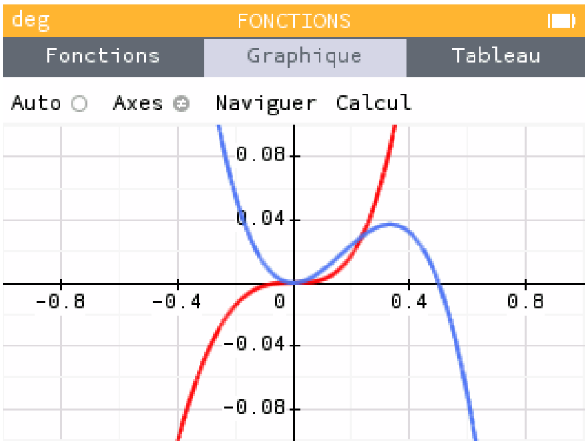
   Exemple de graphique obtenu avec la calculatrice numworks :



   (b) On procède de même avec $P_1(x) = 2x^3 + x^4$ et $P_2(x) = x^2 - 2x^3$
   Pour tout x réel, on a :

   $$(P_1 - P_2)(x) = 2x^3 + x^4 - \left(x^2 - 2x^3\right) = 2x^3 + x^4 - x^2 + 2x^3 = -x^2 + 4x^3 + x^4$$

   $\text{val}(P_1 - P_2) = 2$ est paire et $a_1 = -1$ est négatif. Sur un voisinage $]-a\,;a[$ de zéro, la courbe représentative de $P_1 - P_2$ reste au-dessous de l'axe des abscisses,
   Pour tout $x \in]-a\,;a[$, on a $P_1(x) - P_2(x) = (P_1 - P_2)(x) < 0$ donc $P_1(x) < P_2(x)$. La courbe représentative C_1 de P_1 est au-dessous de la courbe représentative C_2 de P_2.
   Exemple de graphique obtenu avec la calculatrice numworks :



(c) En substituant $P_1 - P_2$ à P dans la tableau de la question 3b, on obtient, sur un voisinage de zéro, les positions relatives suivantes :

— Si $k = \text{val}(P_1 - P_2)$ est paire et $a_k > 0$, alors C_1 reste au-dessus de C_2.

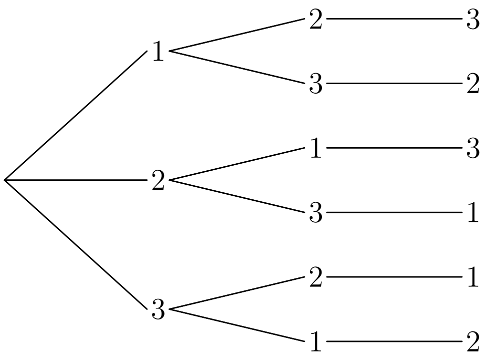
— Si $k = \text{val}(P_1 - P_2)$ est paire et $a_k < 0$, alors C_1 reste au-dessous de C_2.

— Si $k = \text{val}(P_1 - P_2)$ est impaire et $a_k > 0$, alors C_1 passe d'au-dessous à au-dessus de C_2.

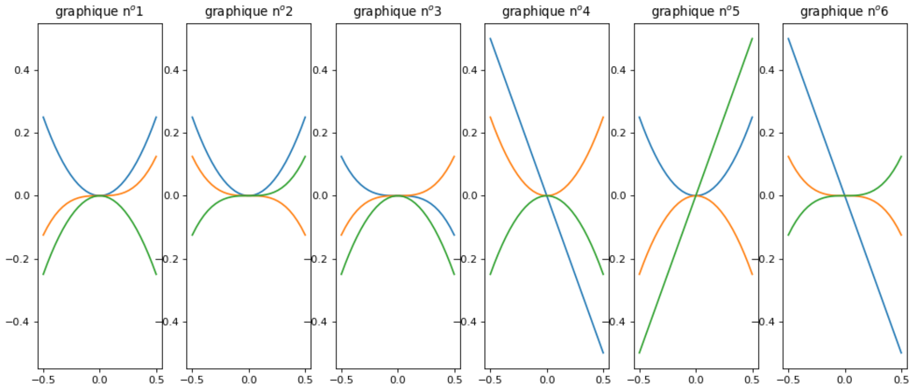
— Si $k = \text{val}(P_1 - P_2)$ est impaire et $a_k < 0$, alors C_1 passe d'au-dessus à au-dessous de C_2.

2. Soient P_1, P_2 et P_3 trois fonctions polynômes (distinctes) appartenant à $\mathscr{P}$.

(a) On numérote 1, 2 et 3 les trois éléments de l'ensemble. Il y a trois positions possibles pour placer le premier élément, il reste deux positions possibles pour placer le deuxième élément et il n'y a plus qu'une seule position possible pour placer le troisième élément. Au total, cela donne $3 \times 2 = 6$ possibilités, ce sont :
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
On peut visualiser le raisonnement précédent à l'aide de l'arbre qui suit :



(b) Soient les fonctions polynômes de $\mathscr{P}$ définies respectivement par :
$P_1(x) = x$; $P_2(x) = x^2$; $P_3(x) = x^3$



On observe :

— Sur le graphique n° 1, les représentations graphiques des fonctions polynômes P_2, $-P_2$ et P_3.
Pour $x < 0$, la courbe représentative de P_2 est au-dessus de celle de P_3, elle-même au-dessus de celle de $-P_2$. Pour $x > 0$, les positions relatives sont inchangées. cette situation correspond à la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

— Sur le graphique n° 2, les représentations graphiques des fonctions polynômes P_2, $-P_3$ et P_3.
Les positions relatives des courbes représentatives correspondent à la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

— Sur le graphique n° 3, les représentations graphiques des fonctions polynômes $-P_3$, P_3 et $-P_2$.
Les positions relatives des courbes représentatives correspondent à la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

— Sur le graphique n° 4, les représentations graphiques des fonctions polynômes $-P_1$, P_2 et $-P_2$.
Les positions relatives des courbes représentatives correspondent à la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

— Sur le graphique n° 5, les représentations graphiques des fonctions polynômes P_2, $-P_2$ et P_1.
Les positions relatives des courbes représentatives correspondent à la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

— Sur le graphique n° 6, les représentations graphiques des fonctions polynômes $-P_1$, $-P_3$ et P_3.
Les positions relatives des courbes représentatives correspondent à la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) Montrons par récurrence la propriété : « Pour tout entier $n \geqslant 1$, le nombre de permutations de l'ensemble $E_n = \{1;2;3;\ldots;n\}$ est égal à $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1$ ».

Initialisation :

Pour $n = 1$, on a $1! = 1$ et $E_1 = \{1\}$ est un ensemble qui a une seule permutation, l'identité $\text{id} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hérédité :

On suppose la propriété vraie au rang k, c'est à dire que le nombre de permutations de l'ensemble E_k est égal à $k!$, et on veut montrer que le nombre de permutations de l'ensemble E_{k+1} est égal à $(k+1)!$.

Pour constituer une permutation de E_{k+1}, on commence par choisir la position de l'élément $k+1$; il y a $k+1$ positions possibles. Il reste alors k éléments à placer et k positions possibles ; c'est à dire une permutation d'un ensemble à k éléments. Par hypothèse de récurrence, il y a $k!$ possibilités. On a ainsi constitué $(k+1) \times k! = (k+1)!$ permutations.

Ces permutations sont toutes les permutations possibles donc la propriété est vérifiée au rang $k+1$.

D'après le principe de récurrence, on conclut que la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

Remarque : Le programme de spécialité Mathématiques suggère de déterminer le nombre de permutations de E_n à l'aide des arrangements ou des k-uplets. Le choix d'un raisonnement par récurrence permet de consolider l'utilisation de ce type de raisonnement.

(d) Soient $P_1, P_2, \ldots, P_n$ des fonctions polynômes (distinctes) appartenant à $\mathscr{P}$.

On suppose que pour $x < 0$, la courbe représentative de P_1 est au-dessus de celle de P_2, elle-même au-dessus de celle de P_3 et ainsi de suite jusqu'à celle de P_{n-1} au-dessus de celle de P_n [a].

Pour $x > 0$, la courbe représentative de P_1 peut *a priori* se trouver à n'importe quelle position dans l'empilement des n courbes représentatives, et de même pour les $n-1$ autres courbes représentatives des fonctions $P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}$.

En considérant les positions relatives des n courbes représentatives pour $x < 0$ et pour $x > 0$, on obtient ainsi une permutation de E_n.

Comme ce nombre de permutations est $n!$, il semble qu'il y ait $n!$ dispositions possibles pour les positions relatives des n courbes représentatives.

a. Cela est facilement réalisable. Par exemple, on peut prendre $P_1(x) = -x$, $P_2(x) = x^2$, $P_3(x) = -x^3$, $P_4(x) = x^4$, etc. C'est à dire qu'on prend les monômes de coefficient 1 pour les exposants pairs et de coefficient -1 pour les exposants impairs.

2.4 Quatrième Partie : Épilogue du projet

Séance 4

Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 quatre fonctions polynômes et un réel $a > 0$ telles que :

(1) Pour tout $x \in]-a\,;0[$, on a $f_1(x) > f_2(x) > f_3(x) > f_4(x)$

(2) Pour tout $x \in]0\,;a[$, on a $f_2(x) > f_4(x) > f_1(x) > f_3(x)$

1. Les inégalités (1) donnent en particulier $f_1(x) > f_2(x)$ sur $]-a\,;0[$ et les inégalités (2) donnent en particulier $f_1(x) < f_2(x)$ sur $]0\,;a[$. D'après la question 2.3.1c, $v_{12} = \text{val}\left(f_2 - f_1\right)$ est impaire [a].
   De même, on a $f_1(x) > f_3(x)$ sur $]-a\,;0[$ et $f_1(x) > f_3(x)$ sur $]0\,;a[$ donc $v_{13} = \text{val}(f_3 - f_1)$ est paire.
   Enfin, on a $f_1(x) > f_4(x)$ sur $]-a\,;0[$ et $f_1(x) < f_4(x)$ sur $]0\,;a[$ donc $v_{14} = \text{val}(f_4 - f_1)$ est impaire.
2. On a $f_2(x) > f_3(x)$ sur $]-a\,;0[$ et $f_2(x) > f_3(x)$ sur $]0\,;a[$ donc $v_{23} = \text{val}\left(f_3 - f_2\right)$ est paire.
   D'abord, v_{12} est impaire et v_{13} est paire donc $v_{12} \neq v_{13}$.
   Ensuite, supposons que $v_{12} < v_{13}$, alors on aurait :
   $$\begin{aligned} v_{23} = \text{val}\left(f_3 - f_2\right) = \text{val}\left(f_3 - f_1 + f_1 - f_2\right) &= \text{val}\Big(\left(f_3 - f_1\right) - \left(f_2 - f_1\right)\Big) \\ &= \min\Big(\text{val}\left(f_3 - f_1\right); \text{val}\left(f_2 - f_1\right)\Big) = \min\left(v_{13}; v_{12}\right) = v_{12} \end{aligned}$$
   Or v_{23} est paire et v_{12} est impaire ; ces valuations ne peuvent être égales. Donc on a une contradiction et on conclut que $v_{12} > v_{13}$
3. On procède comme à la question précédente.
   On a $f_3(x) > f_4(x)$ sur $]-a\,;0[$ et $f_3(x) < f_4(x)$ sur $]0\,;a[$ donc $v_{34} = \text{val}\left(f_4 - f_3\right)$ est impaire.
   D'abord, v_{13} est paire et v_{14} est impaire donc $v_{13} \neq v_{14}$.
   Ensuite, supposons que $v_{13} < v_{14}$, alors on aurait :
   $$\begin{aligned} v_{34} = \text{val}\left(f_4 - f_3\right) = \text{val}\left(f_4 - f_1 + f_1 - f_3\right) &= \text{val}\Big(\left(f_4 - f_1\right) - \left(f_3 - f_1\right)\Big) \\ &= \min\Big(\text{val}\left(f_4 - f_1\right); \text{val}\left(f_3 - f_1\right)\Big) = \min\left(v_{14}; v_{13}\right) = v_{13} \end{aligned}$$
   Or v_{34} est impaire et v_{13} est paire ; ces valuations ne peuvent être égales. Donc on a une contradiction et on conclut que $v_{13} > v_{14}$
4. Le raisonnement est légèrement différent, mais le principe reste le même : on compare des valuations.
   On a $f_2(x) > f_4(x)$ sur $]-a\,;0[$ et $f_2(x) > f_4(x)$ sur $]0\,;a[$ donc $v_{24} = \text{val}\left(f_4 - f_2\right)$ est paire.
   Les valuations v_{12} et v_{14} sont impaires.
   Supposons que $v_{12} \neq v_{14}$ alors on aurait :

$$v_{24} = \text{val}(f_4 - f_2) = \text{val}(f_4 - f_1 + f_1 - f_2) = \text{val}\Big((f_4 - f_1) - (f_2 - f_1)\Big) \quad [b].$$
$$= \min\Big(\text{val}(f_4 - f_1)\,; \text{val}(f_2 - f_1)\Big) = \min(v_{12}; v_{14})$$

Or v_{24} est paire et $\min(v_{12}; v_{14})$ est impair; ces valuations ne peuvent être égales. Donc on a une contradiction et on conclut que $v_{12} = v_{14}$

5. Avec les questions 2 et 3, on a obtenu $v_{12} > v_{13} > v_{14}$, en particulier $v_{12} > v_{14}$. Et dans la question 4 on a obtenu $v_{12} = v_{14}$. Ceci est absurde. L'hypothèse initiale est donc à rejeter : il n'existe pas quatre fonctions polynômes de $\mathscr{P}$ vérifiant (1) et (2).

---

a. On peut noter indiféremment v_{12} ou v_{21} car $\text{val}(f_2 - f_1) = \text{val}(f_1 - f_2)$. En effet, les deux polynômes $f_2 - f_1$ et $f_1 - f_2$ sont opposés et ont même valuation.

b. Il est important que v_{12} et v_{14} soient distinctes, sinon la valuation de la différence des deux polynômes pourrait être supérieure à celle, commune, des deux polynômes. Par exemple $\text{val}\left(x + x^2\right) = 1$ et $\text{val}(x) = 1$ donnent $\text{val}\left(x + x^2 - x\right) = \text{val}\left(x^2\right) = 2$

2.5 Cinquième Partie : Prolongement possible

Séance 5

Montrons, par l'absurde, qu'il n'existe pas quatre fonctions de $\mathscr{P}$ dont la configuration des courbes représentatives dans un voisinage de zéro, est associée à la permutation σ définie par : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Supposons qu'il existe quatre fonctions polynômes f_1, f_2, f_3 et f_4 et un réel $a > 0$ telles que :

(1) Pour tout $x \in]-a; 0[$, on a $f_1(x) > f_2(x) > f_3(x) > f_4(x)$

(2) Pour tout $x \in]0; a[$, on a $f_3(x) > f_1(x) > f_4(x) > f_2(x)$

On note $v_{13} = \text{val}(f_1 - f_3)$, $v_{34} = \text{val}(f_4 - f_3)$ et $v_{23} = \text{val}(f_2 - f_3)$.
En procédant comme dans la partie 2.4, on montre successivement que v_{13} est impaire, v_{34} est paire et v_{23} est impaire. Ensuite :

— La valuation $\text{val}(f_4 - f_1)$ paire et $f_4 - f_1 = (f_4 - f_3) - (f_1 - f_3)$ permettent d'obtenir $v_{34} < v_{13}$.

— La valuation $\text{val}(f_4 - f_2)$ impaire et $f_4 - f_2 = (f_4 - f_3) - (f_2 - f_3)$ permettent d'obtenir $v_{23} < v_{34}$.

— La valuation $\text{val}(f_2 - f_1)$ paire et $f_2 - f_1 = (f_2 - f_3) - (f_1 - f_3)$ permettent d'obtenir $v_{23} = v_{13}$.

Ainsi on a d'une part $v_{23} < v_{34} < v_{13}$ et d'autre part $v_{23} = v_{13}$. Ce qui est absurde et donne la conclusion escomptée.
On peut ajouter que la preuve utilise les six positions relatives de deux courbes choisies parmi les quatre données. C'est à dire les configurations associées aux transpositions $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
Trois d'entre elles servent à déterminer des parités de valuations. Les trois autres sont utilisées pour obtenir deux inégalités et une égalité. En suivant ce schéma général, on voit que la preuve n'est pas unique. Par exemple, on peut démarrer en posant $v_{12} = \text{val}(f_2 - f_1)$, $v_{23} = \text{val}(f_2 - f_3)$ et $v_{24} = \text{val}(f_2 - f_4)$ puis utiliser $f_1 - f_3 = (f_2 - f_3) - (f_2 - f_1)$, $f_1 - f_4 = (f_2 - f_4) - (f_2 - f_1)$ et $f_3 - f_4 = (f_2 - f_4) - (f_2 - f_3)$.

3 Annexe : la constante d'Euler

Rappelons et démontrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$.
Il suffit de montrer que, pour tout réel A, il existe un entier N_A tel que si $n \geqslant N_A$ alors $\ln n > A$.
Soit A un réel fixé. On a :
$\ln n > A \Leftrightarrow n > \exp A$ par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.
En choisissant $N_A = \mathrm{E}(\exp A) + 1$, où E est la fonction partie entière, pour tout entier $n \geqslant N_A$, on a alors $\ln n > A$.

3.1 Divergence de la série harmonique $(\mathbf{S_n})$

TP1

Soit la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
La suite (S_n) est appelée la *série harmonique*.
Pour montrer qu'elle diverge, on raisonne par l'absurde en supposant que la suite (S_n) converge. On note ℓ le réel tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ell$

1. Par hypothèse, pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un entier N_A tel que si $n \geqslant N_A$ alors $S_n \in]\ell - \epsilon ; \ell + \epsilon[$.
   Comme $2n \geqslant n \geq N_A$, on a $S_{2n} \in]\ell - \epsilon ; \ell + \epsilon[$
   C'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ell$.
   Vocabulaire : on dit que la suite (S_{2n}) est une *sous-suite*, ou *suite extraite*, de la suite (S_n) ; elle est constituée des termes d'indices pairs de la suite (S_n).
2. Les suites (S_{2n}) et (S_n) sont toutes deux convergentes vers le même réel ℓ. D'après les propriétés sur les limites de sommes de suites convergentes, on conclut que
   $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_{2n} - S_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} - \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ell - \ell = 0$.
3. Pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k non nul, inférieur ou égal à $2n$, on a :
   $k \leqslant 2n \Leftrightarrow \dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{2n}$ (par décroissance de la fonction inverse sur $]0 ; +\infty[$)
   Cette inégalité est a fortiori valable pour tout entier $k \in [n+1 ; 2n]$.
4. Soit n un entier naturel non nul. On a :
   $S_{2n} - S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \big(2n - (n+1) + 1\big) \times \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$
5. D'après la question précédente, les termes de la suite $(S_{2n} - S_n)$ sont tous supérieurs ou égaux à $\dfrac{1}{2}$.
   La limite de la suite constante dont les termes sont tous égaux à $\dfrac{1}{2}$ est évidemment $\dfrac{1}{2}$.
   D'après les théorèmes de comparaison du cours, on conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_{2n} - S_n) \geqslant \dfrac{1}{2}$.
   Or, dans la question 2, on a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$.
   Par unicité de la limite, on a une contradiction. Celle-ci montre que l'hypothèse faîte sur la convergence de la suite (S_n) est fausse et on conclut que la suite (S_n) diverge.
6. Soit (u_n) une suite croissante et non majorée.
   On fixe un réel A.
   Comme (u_n) est non majorée, il existe un entier N, dépendant de A, tel que $u_N > A$.
   De plus (u_n) est croissante, donc pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \geqslant u_N$.
   Ainsi pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n > A$.
   Ce raisonnement étant valable pour tout réel A, par définition $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   La suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
7. Soit un entier $n \geqslant 1$. On a :
   $S_{n+1} - S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad = \frac{1}{n+1}$

Donc pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_{n+1} - S_n > 0$ ce qui s'écrit aussi $S_{n+1} > S_n$. La suite (S_n) est croissante à partir du rang $n = 1$.

8. On vient de montrer que la suite (S_n) est croissante. Si elle était majorée, alors, d'après le théorème de convergence monotone, elle serait convergente. Or dans la question 5 on a montré que ce n'est pas le cas, donc la suite (S_n) n'est pas majorée.
   D'après la question 6, on conclut que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

3.2 Monotonie de la suite $(\mathbf{u_n})$

TP2

1. Soit n un entier naturel non nul
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \left(\ln(n+1) - \ln n\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \end{aligned}$$

2. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$, par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

   (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = \ln 1 = 0$.
   Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

   (b) La fonction f est définie lorsque le quotient $\dfrac{x+1}{x}$ est strictement positif, c'est à dire pour $x \in]-\infty\,;\,-1[\cup]0\,;\,+\infty[$. On étudie donc f sur l'intervalle $I = [1\,;\,+\infty[$.
   f est dérivable sur I comme somme, composée et quotient, avec un dénominateur jamais nul, de fonctions usuelles. Et pour tout réel $x \in I$:
   $$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{\frac{x+1}{x}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{-x+(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2}$$

   (c) Pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur I.
   $f(1) = \dfrac{1}{2} - \ln 2 = \dfrac{1 - 2\ln 2}{2} = \dfrac{\ln e - \ln 4}{2} < 0$
   Montrons par l'absurde que pour tout $x \in I$, $f(x) < 0$.
   Supposons qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x) \geqslant 0$. Comme f est strictement croissante, $f(x_0+1) > f(x_0)$ et pour tout $x \in [x_0+1\,;\,+\infty[$, $f(x) > f(x_0+1)$.
   En passant à la limite, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \geqslant f(x_0+1) > f(x_0) \geqslant 0$. Ce qui contredit la limite nulle calculée dans la question 2a.
   On pouvait aussi de suite déduire la propriété à l'aide du tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1;+\infty[$.
   En effet, on peut dresser le tableau de variation suivant :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$f(1) < 0$ $\nearrow$	0

   qui prouve par lecture que, pour tout $x \geqslant 1$, $f(x) < 0$.

3. Soit n un entier naturel non nul

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = f(n) < 0$

donc pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est strictement décroissante à partir du rang 1.

3.3 Minorant de la suite $(\mathbf{u_n})$

TP3

1. Soit k un entier naturel non nul. Pour tout $x \in [k\,;\,k+1]$, on a :

   $k \leqslant x \leqslant k+1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{k}$

   On intègre chaque membre de cette inégalité, sur l'intervalle $[k\,;\,k+1]$:

   $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\mathrm{d}x$

   $\displaystyle\frac{1}{k+1} \times (k+1-k) \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k} \times (k+1-k)$

   $\displaystyle\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$

2. Soit k un entier naturel non nul. $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\ln x]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln k$

   La majoration de la question précédente donne l'inégalité ci-dessous, que l'on nomme (I_k) :

   $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$

3. Soit n un entier naturel non nul. La somme, pour k variant de 1 à n, des membres gauches des inégalités (I_k) est inférieure ou égale à la somme correspondante des membres droits.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln k\big) &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln k &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
\ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln n + \ln(n+1) - (\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n) &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
\ln(n+1) - \ln 1 &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
\ln(n+1) &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
\ln(n+1) - \ln n &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \\
0 &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \quad \text{(par croissance de la fonction ln)} \\
0 &\leqslant u_n
\end{aligned}$$

3.4 Convergence de la suite $(\mathbf{u_n})$

TP4

D'après la section 3.2 la suite (u_n) est (strictement) décroissante, et d'après la section 3.3 la suite (u_n) est minorée par 0, donc le suite (u_n) est convergente vers un réel positif que l'on note γ. On appelle cette limite *constante d'Euler.*