Courbes osculatrices, mais pas que...

Jean-Marc Duquesnoy[1] Fabrice Eudes[2]

[1]Lycée André Malraux, Béthune

[2]Collège du Lazaro, Marcq en Barœul

Vendredi 3 juin 2022 / Journées Académiques 2022

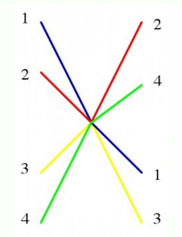
Table des matières

Table des matières

Table des matières

Énoncé

Considérons quatre fonctions dont les graphes passent par un même point $A(a\,;b)$.
Est-il possible d'avoir cette configuration graphique ?



Cadre de résolution et définitions

- La recherche sera effectuée sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions polynômes f non nulles vérifiant $f(0) = 0$

Cadre de résolution et définitions

- La recherche sera effectuée sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions polynômes f non nulles vérifiant $f(0) = 0$
- Une fonction f d'une variable réelle x est une **fonction polynôme** si elle s'écrit sous la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$$

où les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels avec $a_n \neq 0$.

Cadre de résolution et définitions

- La recherche sera effectuée sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions polynômes f non nulles vérifiant $f(0) = 0$
- Une fonction f d'une variable réelle x est une **fonction polynôme** si elle s'écrit sous la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$$

  où les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels avec $a_n \neq 0$.
- Le **degré** de la fonction polynôme f est l'indice n.

Cadre de résolution et définitions

- La recherche sera effectuée sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions polynômes f non nulles vérifiant $f(0) = 0$
- Une fonction f d'une variable réelle x est une **fonction polynôme** si elle s'écrit sous la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$$

  où les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels avec $a_n \neq 0$.
- Le **degré** de la fonction polynôme f est l'indice n.
- La **valuation** de la fonction polynôme f (non égale à la fonction nulle) est le plus petit entier k tel que $a_k \neq 0$

Séances 1 et 2

Valuation et position du graphe

- Les diapositives suivantes montrent les représentations graphiques sur l'intervalle $[-1\,;1]$ de huit fonctions polynômes.

Séances 1 et 2

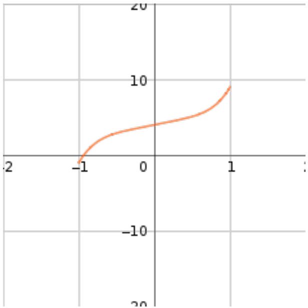
Valuation et position du graphe

- Les diapositives suivantes montrent les représentations graphiques sur l'intervalle $[-1\,;1]$ de huit fonctions polynômes.
- Conjecturer une règle donnant la position de la courbe représentative d'une fonction polynôme f par rapport à l'axe des abscisses, au voisinage de 0, en fonction de la parité de $\mathrm{val}(f)$.

Séances 1 et 2

Polynôme n° 0

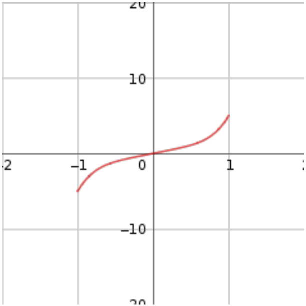
$$f_0(x) = 4 + 2x + 3x^5$$



Séances 1 et 2

Polynôme n° 1

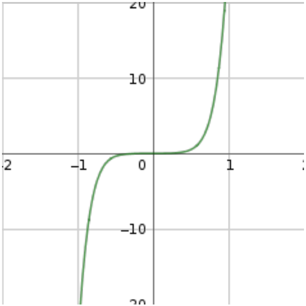
$$f_1(x) = 2x + 3x^5$$



Séances 1 et 2

Polynôme n° 2

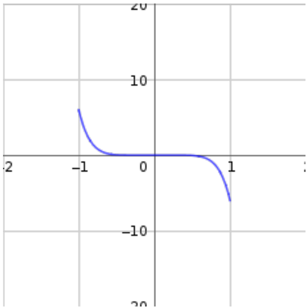
$$f_2(x) = 25x^7 + x^4 + 2x^3$$



Séances 1 et 2

Polynôme n° 3

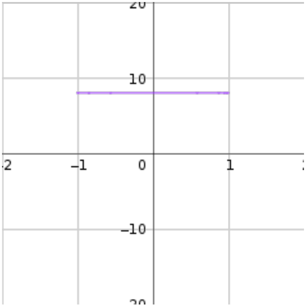
$$f_3(x) = -6x^7$$



Séances 1 et 2

Polynôme n° 4

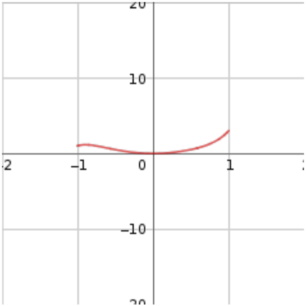
$$f_4(x) = 8$$



Séances 1 et 2

Polynôme n° 5

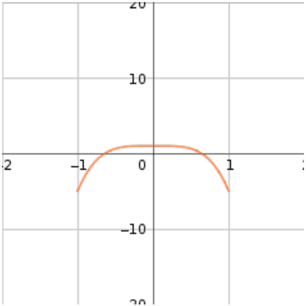
$$f_5(x) = 2x^2 + x^7$$



Séances 1 et 2

Polynôme n° 6

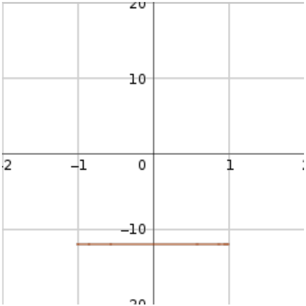
$$f_6(x) = -6x^4 + 1$$



Séances 1 et 2

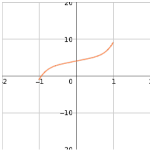
Polynôme n° 7

$$f_7(x) = -12$$

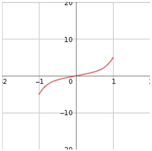


Séances 1 et 2

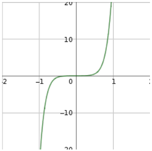
Vue d'ensemble



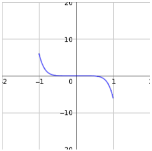
$\mathrm{val}(f_0) = 0$



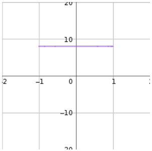
$\mathrm{val}(f_1) = 1$



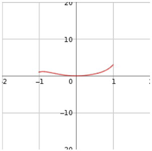
$\mathrm{val}(f_2) = 3$



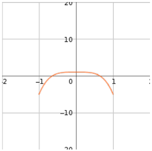
$\mathrm{val}(f_3) = 7$



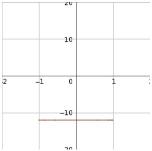
$\mathrm{val}(f_4) = 0$



$\mathrm{val}(f_5) = 2$



$\mathrm{val}(f_6) = 0$



$\mathrm{val}(f_7) = 0$

Séances 1 et 2

Preuve

- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, telle que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.
  - Justifier qu'il existe un intervalle $]-a\,;a[$ tel que, pour tout $x \in]-a\,;a[$, $\frac{1}{2} < f(x) < \frac{3}{2}$

Séances 1 et 2

Preuve

- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, telle que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.
  - Justifier qu'il existe un intervalle $]-a\,;a[$ tel que, pour tout $x \in]-a\,;a[$, $\dfrac{1}{2} < f(x) < \dfrac{3}{2}$
  - Déduire de ce qui précède le signe de $f(x)$ pour les valeurs de x appartenant à l'intervalle $]-a\,;a[$.

Séances 1 et 2

Preuve

- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, telle que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.
  - Justifier qu'il existe un intervalle $]-a\,;a[$ tel que, pour tout $x \in]-a\,;a[$, $\dfrac{1}{2} < f(x) < \dfrac{3}{2}$
  - Déduire de ce qui précède le signe de $f(x)$ pour les valeurs de x appartenant à l'intervalle $]-a\,;a[$.
- Soit P une fonction polynôme de valuation k et de degré n, appartenant à $\mathcal{P}$.
  - Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = a_k x^k \times f(x)$, f étant une fonction polynôme vérifiant $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Séances 1 et 2

Preuve

- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, telle que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
  - Justifier qu'il existe un intervalle $]-a\,;a[$ tel que, pour tout $x \in]-a\,;a[$, $\frac{1}{2} < f(x) < \frac{3}{2}$
  - Déduire de ce qui précède le signe de $f(x)$ pour les valeurs de x appartenant à l'intervalle $]-a\,;a[$.
- Soit P une fonction polynôme de valuation k et de degré n, appartenant à $\mathcal{P}$.
  - Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = a_k x^k \times f(x)$, f étant une fonction polynôme vérifiant $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
  - Déduire de ce qui précède une règle donnant la position, en fonction du signe de a_k et de la parité de $\mathrm{val}(f)$, de la courbe représentative de la fonction P par rapport à l'axe des abscisses au voisinage de 0.

Séance 3

Deux polynômes

Comment donner la position relative des représentations graphiques de deux fonctions polynômes P_1 et P_2 appartenant à $\mathcal{P}$, en fonction de la parité de $\mathrm{val}(P_1 - P_2)$?

Séance 3

Deux polynômes

Comment donner la position relative des représentations graphiques de deux fonctions polynômes P_1 et P_2 appartenant à $\mathcal{P}$, en fonction de la parité de $\mathrm{val}(P_1 - P_2)$?

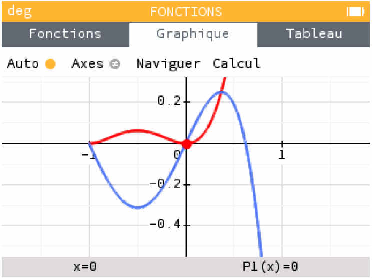
- Premier exemple
  $P_1(x) = x^2 + 2x^3 + x^4$
  $P_2(x) = x - 2x^3 - x^4$

Séance 3

Deux polynômes

Comment donner la position relative des représentations graphiques de deux fonctions polynômes P_1 et P_2 appartenant à $\mathcal{P}$, en fonction de la parité de $\mathrm{val}(P_1 - P_2)$?

- Premier exemple
  $P_1(x) = x^2 + 2x^3 + x^4$
  $P_2(x) = x - 2x^3 - x^4$



Séance 3

Deux polynômes

Comment donner la position relative des représentations graphiques de deux fonctions polynômes P_1 et P_2 appartenant à $\mathcal{P}$, en fonction de la parité de $\mathrm{val}(P_1 - P_2)$?

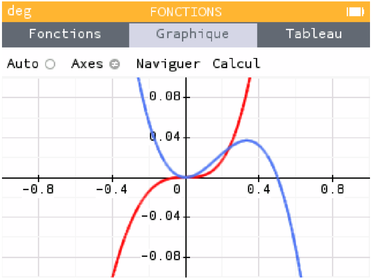
- Deuxième exemple
  $P_1(x) = 2x^3 + x^4$
  $P_2(x) = x^2 - 2x^3$

Séance 3

Deux polynômes

Comment donner la position relative des représentations graphiques de deux fonctions polynômes P_1 et P_2 appartenant à $\mathcal{P}$, en fonction de la parité de $\text{val}(P_1 - P_2)$?

- Deuxième exemple
  $P_1(x) = 2x^3 + x^4$
  $P_2(x) = x^2 - 2x^3$



Séance 3

Règle pour deux polynômes

Positions relatives de C_1 et C_2 en fonction de $k = \mathrm{val}(P_1 - P_2)$ et a_k

	k pair	k impair
$a_k > 0$	C_1 reste au-dessus de C_2	C_1 passe d'au-dessous à au-dessus de C_2
$a_k < 0$	C_1 reste au-dessous de C_2	C_1 passe d'au-dessus à au-dessous de C_2

Séance 3

Trois polynômes

Soient C_1, C_2 et C_3 les représentations graphiques respectives de P_1, P_2 et P_3, trois fonctions polynômes appartenant à $\mathcal{P}$.

- Donner le nombre de positions relatives envisageables pour C_1, C_2 et C_3 au voisinage de 0.

Séance 3

Trois polynômes

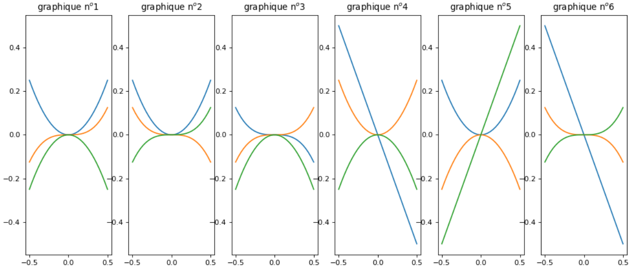
Soient C_1, C_2 et C_3 les représentations graphiques respectives de P_1, P_2 et P_3, trois fonctions polynômes appartenant à $\mathcal{P}$.

- Donner le nombre de positions relatives envisageables pour C_1, C_2 et C_3 au voisinage de 0.
- Réaliser chaque configuration envisagée à l'aide des monômes x, $-x$, x^2, $-x^2$, x^3 et $-x^3$.

Séance 3

Les 3! configurations

Une solution



Séance 4

Retour au problème initial

Est-il possible de trouver P_1, P_2, P_3 et P_4 quatre fonctions polynômes appartenant à $\mathcal{P}$ vérifiant :

1. Pour x strictement négatif suffisamment petit,

$$P_1(x) > P_2(x) > P_3(x) > P_4(x)$$

2. Pour x strictement positif suffisamment petit,

$$P_2(x) > P_4(x) > P_1(x) > P_3(x)$$

Séance 4

Une configuration non réalisable

Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 quatre fonctions polynômes vérifiant 1 et 2.

Séance 4

Une configuration non réalisable

Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 quatre fonctions polynômes vérifiant 1 et 2.

- Déterminer les parités de :
  $v_{12} = \text{val}\,(f_2 - f_1)$, $v_{13} = \text{val}\,(f_3 - f_1)$ et $v_{14} = \text{val}\,(f_4 - f_1)$.

Séance 4

Une configuration non réalisable

Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 quatre fonctions polynômes vérifiant 1 et 2.

- Déterminer les parités de :
  $v_{12} = \mathrm{val}\,(f_2 - f_1)$, $v_{13} = \mathrm{val}\,(f_3 - f_1)$ et $v_{14} = \mathrm{val}\,(f_4 - f_1)$.
- Après avoir déterminé la parité de $v_{23} = \mathrm{val}\,(f_3 - f_2)$ et remarqué que $f_3 - f_2 = (f_3 - f_1) - (f_2 - f_1)$, démontrer que $v_{12} > v_{13}$.

Séance 4

Une configuration non réalisable

Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 quatre fonctions polynômes vérifiant 1 et 2.

- Déterminer les parités de :
  $v_{12} = \operatorname{val}(f_2 - f_1)$, $v_{13} = \operatorname{val}(f_3 - f_1)$ et $v_{14} = \operatorname{val}(f_4 - f_1)$.
- Après avoir déterminé la parité de $v_{23} = \operatorname{val}(f_3 - f_2)$ et remarqué que $f_3 - f_2 = (f_3 - f_1) - (f_2 - f_1)$, démontrer que $v_{12} > v_{13}$.
- En procédant de la même manière que dans la question précédente, justifier que $v_{14} < v_{13}$.

Séance 4

Une configuration non réalisable

Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 quatre fonctions polynômes vérifiant 1 et 2.

- Déterminer les parités de :
  $v_{12} = \text{val}\,(f_2 - f_1)$, $v_{13} = \text{val}\,(f_3 - f_1)$ et $v_{14} = \text{val}\,(f_4 - f_1)$.
- Après avoir déterminé la parité de $v_{23} = \text{val}\,(f_3 - f_2)$ et remarqué que $f_3 - f_2 = (f_3 - f_1) - (f_2 - f_1)$, démontrer que $v_{12} > v_{13}$.
- En procédant de la même manière que dans la question précédente, justifier que $v_{14} < v_{13}$.
- En remarquant que $f_4 - f_2 = (f_4 - f_1) - (f_2 - f_1)$, démontrer que $v_{12} = v_{14}$.

Séance 4

Une configuration non réalisable

Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 quatre fonctions polynômes vérifiant 1 et 2.

- Déterminer les parités de :
  $v_{12} = \mathrm{val}\,(f_2 - f_1)$, $v_{13} = \mathrm{val}\,(f_3 - f_1)$ et $v_{14} = \mathrm{val}\,(f_4 - f_1)$.
- Après avoir déterminé la parité de $v_{23} = \mathrm{val}\,(f_3 - f_2)$ et remarqué que $f_3 - f_2 = (f_3 - f_1) - (f_2 - f_1)$, démontrer que $v_{12} > v_{13}$.
- En procédant de la même manière que dans la question précédente, justifier que $v_{14} < v_{13}$.
- En remarquant que $f_4 - f_2 = (f_4 - f_1) - (f_2 - f_1)$, démontrer que $v_{12} = v_{14}$.
- Conclure.

Explications

- Nous inspirant très humblement de collègues ayant eux-mêmes suivi l'exemple de Donald Knuth, l'inventeur du logiciel de composition TeX, nous avons enregistré le numéro de la i-ème version du document à l'origine de ce diaporama égal au nombre de décimales de la valeur approchée par défaut d'une constante célèbre, mais laquelle ?

Explications

- Nous inspirant très humblement de collègues ayant eux-mêmes suivi l'exemple de Donald Knuth, l'inventeur du logiciel de composition TEX, nous avons enregistré le numéro de la i-ème version du document à l'origine de ce diaporama égal au nombre de décimales de la valeur approchée par défaut d'une constante célèbre, mais laquelle ?
- La suite du diaporama permettra de répondre à la question et pourra faire l'objet d'un thème d'étude programmé sur l'année et permettant de consolider des compétences attendues en fin de cycle Terminale.

Deux suites divergentes

- Justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln n = +\infty$.

Deux suites divergentes

- Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$.
- Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, où, pour tout n entier naturel non nul, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, (S_n) étant appelée *série harmonique* ?

Quelle suite ?

- Dans ce qui suit, nous allons étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

Quelle suite ?

- Dans ce qui suit, nous allons étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.
- On pourra remarquer que la suite (u_n) est la différence de deux suites divergeant vers $+\infty$.

- Justifier que, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

- Justifier que, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

- Puis, dans un deuxième temps, étudier les variations de la fonction f, définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

- Justifier que, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

- Puis, dans un deuxième temps, étudier les variations de la fonction f, définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

- On peut alors conclure quant à la monotonie de la suite (u_n).

- Justifier que, pour tout entier naturel k non nul :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$$

- Justifier que, pour tout entier naturel k non nul :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$$

- En déduire que, pour tout entier naturel k non nul, on peut écrire l'inégalité, notée I_k :

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

- Justifier que, pour tout entier naturel k non nul :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$$

- En déduire que, pour tout entier naturel k non nul, on peut écrire l'inégalité, notée I_k :

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

- Pour tout entier naturel n non nul, en appliquant l'inégalité I_k pour k variant successivement de 1 à n, on justifiera alors que $u_n \geqslant 0$.

- Il est maintenant facile de conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

- Il est maintenant facile de conclure quant à la convergence de la suite (u_n).
- On notera γ sa limite.

- Il est maintenant facile de conclure quant à la convergence de la suite (u_n).
- On notera γ sa limite.
- γ est appelée *constante d'Euler*.

Voici un premier script PYTHON qui donne six décimales exactes de γ :

```
from math import*
somme=0
n=100000
for i in range(1,n+1):
    somme+=1/i
a=somme-log(n)
```

On propose un deuxième script PYTHON qui permet de calculer une valeur approchée de γ à moindre coût :

```
from bernoulli2 import *
def constanteeuler(n):
    c=0
    for i in range(1,n+1):
        c=c+1/i
    c=c-log(n)-1/(2*n)
    for i in range(1,n):
        c=c+bernoulli(2*i)/(2*i*n**(2*i))
    return(c)
```

Le script précédent importe la librairie *bernoulli2* qui contient ce qui suit.

```python
from math import *
def binom(n,p):
    return(int(factorial(n)/(factorial(p)*factorial(n-p)))
def bernoulli(n):
    B = [1]
    for m in range(1,n+1):
        if m>1 and m%2!=0:
            B.append(0)
        else:
            c = 0
            for k in range(0,m):
                c += binom(m+1,k)*B[k]
            B.append(-c/binom(m+1,m))
    return(B[n])
```

Quelques questions

- Succès mitigé auprès des élèves.

Quelques questions

- Succès mitigé auprès des élèves.
- Montrer que la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ est également inaccessible.

Quelques questions

- Succès mitigé auprès des élèves.
- Montrer que la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ est également inaccessible.
- Quelles sont toutes les permutations réalisables ?

Quelques questions

- Succès mitigé auprès des élèves.
- Montrer que la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ est également inaccessible.
- Quelles sont toutes les permutations réalisables ?
- Quels résultats avec cinq polynômes ou plus ?

Quelques éléments de réponses : parenthésage

Le nombre de permutations réalisables est égal au nombre de parenthésages "multiples" dans lesquels deux parenthèses entourent deux lettres ou plus :

- $abcd$
- $(ab)cd$
- $a(bc)d$
- $ab(cd)$
- $(ab)(cd)$
- $(abc)d$
- $a(bcd)$
- $((ab)c)d$
- $(a(bc))d$
- $a((bc)d)$
- $a(b(cd))$
- $(abcd)$
- $((ab)cd)$
- $(a(bc)d)$
- $(ab(cd))$
- $((ab)(cd))$
- $((abc)d)$
- $(a(bcd))$
- $(((ab)c)d)$
- $((a(bc))d)$
- $(a((bc)d))$
- $(a(b(cd)))$

Quelques éléments de réponses : parenthésage

Kontsevich a démontré que, pour tout entier $n \geqslant 4$, seules les permutations ne contenant pas la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et son inverse $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ sont possibles.

Nombre de permutations réalisables

Le nombre de permutations $a(n)$ réalisant ces deux conditions en fonction de n est :

n	$a(n)$
1	1
2	2
3	6
4	22
5	90
6	394
7	1806
8	8558
9	41 586
...	...

On liste les permutations d'ordre n

```
import itertools,math, sympy,numpy
# on liste toutes les permutations d'ordre n
def permut(n):
    inp_list = [i for i in range(1,1+n)]
    permutations = list(itertools.permutations(inp_list))
    l=(permutations)
    return(l)
```

Un script PYTHON qui calcule les $a(n)$

```
def PermutSeparables(n):
    L,compteur,LL=permut(n),0,[]
    for l in L:
        for d in range(0,n):
            for c in range(d,n):
                for b in range(c,n):
                    for a in range(b,n):
                        if  l[c]>l[a] >l[d] >l[b] or l[b]>l
                            if l not in LL:
                                LL.append(l)
                                compteur=compteur+1
    Nb=math.factorial(n)-compteur
    return(Nb,LL)
```

Estimation asymptotique

$$a(n) \sim \frac{(3+2\sqrt{2})^n}{2\pi\sqrt{2\pi n}\sqrt{3\sqrt{2}-4}\left(1-\frac{9\sqrt{2}+24}{32n}+\dots\right)}$$

Constante d'Euler

- Une formule intégrale

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln(t) \mathrm{d}t$$

Constante d'Euler

- Une formule intégrale

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln(t) \mathrm{d}t$$

- Comment fait wxMaxima ?

Merci de votre attention 🙂