Les *expressions de 2 à partir d'un entier impair*

Nous donnons le nom d'*expressions de 2 à partir d'un entier impair* à deux textes mathématiques qui nous sont parvenus de l'Égypte ancienne. Le premier, le *Fragment de Papyrus UC 32159-F* conservé à l'University College de Londres provient du site d'El-Lahoun dans le Fayoum et date du Moyen Empire, vers 1800 avant J.-C. Il nous fournit des *expressions de 2 à partir de 3 jusqu'à 21*. Un peu plus de deux siècles plus tard, vers 1550 avant notre ère, a été rédigé un papyrus par le scribe Âhmès qui a établi une copie d'un ou de plusieurs textes datant aussi du Moyen Empire. C'est pourquoi nous employons le terme générique d'Auteur pour désigner à la fois Âhmès et la ou les personnes ayant rédigés le ou les documents dont il s'est inspiré pour réaliser non pas une simple copie mais, sans doute, une synthèse de ces documents[1]. Deux parties sont conservées au British Museum de Londres aux cotes BM 10057 et BM 10058. Des *Fragments* sont aussi au Brooklyn Museum de New York. Ainsi, cet écrit mathématique nous est connu de manière presque complète. La totalité de ce manuscrit est connue sous le nom de *Papyrus Rhind*, du nom de l'acheteur des parties du British Museum. Il est le plus important document mathématique qui nous soit parvenu de l'Égypte ancienne. Après une courte introduction, il commence par les *expressions de 2 à partir de tous les nombres impairs compris entre 3 et 101* qui en occupent près du tiers soulignant ainsi la nécessité de cette partie de l'arithmétique égyptienne.

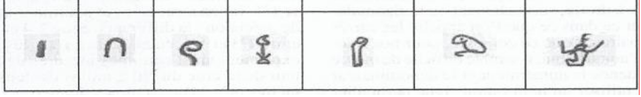
Ces deux textes sont différents tant sur la forme que sur le fond. Le premier donne uniquement à l'encre noire les résultats, tandis que le second utilise outre le noir, le rouge, pour souligner certains points importants : termes ou nombres. De plus, l'Auteur y développe plus ou moins certaines parties des calculs afférents. Dans les deux documents les expressions sont identiques. Autrement dit, l'un peut être considéré comme étant une « table » tandis que l'autre est un véritable texte mathématique nous permettant de pénétrer dans l'Art égyptien du calcul.

Le cadre numérique

Avant d'étudier les textes précités, il nous semble nécessaire de donner quelques éléments concernant le cadre et les pratiques numériques des scribes de l'Égypte ancienne. Nous savons qu'ils utilisaient deux types d'écriture, l'*écriture hiéroglyphique* principalement gravée sur les monuments ou les objets de prestige et l'*écriture hiératique*, cursive employée pour rédiger les divers textes administratifs, littéraires ou scientifiques. « *Les scribes apprenaient donc d'abord le hiératique quand le hiéroglyphique n'était l'affaire que d'une petite élite lettrée ultra-spécialisée* [2]». L'utilisation des *doublements* dans la conduite des multiplications ou divisions nous montre que les scribes ayant à leur actif quelques pratiques numériques devaient faire partie de cette élite. Bien sûr, les textes que nous étudions sont écrits en hiératique.

Durant toute la civilisation égyptienne qui s'est déroulée sur plus de trois millénaires, les scribes ont utilisé le même système numérique hiéroglyphique. Tous d'abord, les entiers naturels non nuls sont notés additivement en base 10. Ceci signifie que les premières puissances de 10 reçoivent un signe particulier et que les signes sont répétés autant de fois qu'il le faut de telle sorte que leur addition donne comme résultat le nombre considéré. Les différents signes sont les suivants :

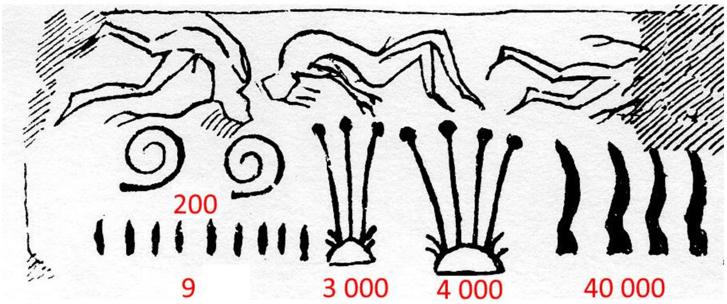
1	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000



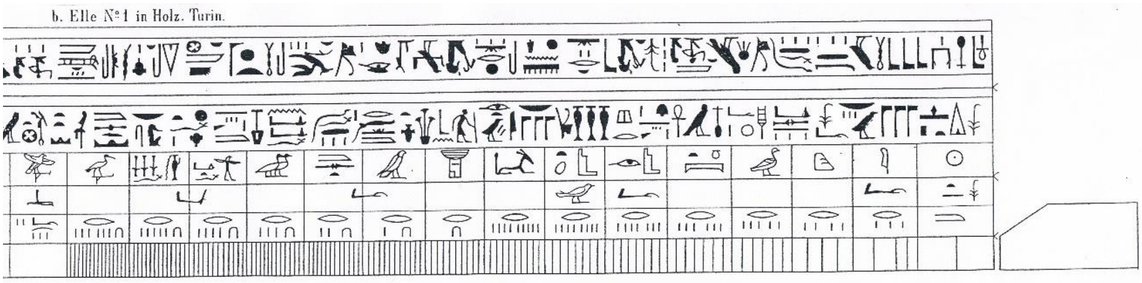
[1] Comme le note Chloé Ragazzoli, chaque texte écrit par un scribe « *est le résultat d'un processus d'appropriation du contenu textuel »* et elle préfère parler de *« scripteur »* là où nous avons choisi Auteur ; Ragazzoli, 2019, *Scribes*, p. 117.

[2] Ragazzoli, 2019, *Scribes*, p. 26.

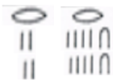
Bien sûr, l'écriture hiéroglyphique étant, avant tout, artistique, les groupements d'un même signe sont variables, le plus souvent, par 2, 3 ou 4, mais on peut trouver 9 fois le même signe sans regroupement comme dans le décompte des 47 209 prisonniers faits par le Roi Khasékèm à la II^{ème} dynastie [3]:



Quant aux fractions, les scribes égyptiens ne considéraient que deux-tiers et les inverses des entiers naturels non nuls, nos n-ièmes, $1/n$, que nous appelons *quantièmes*. Pour ces derniers, mis à part le demi qui a souvent reçu une notation particulière, les autres quantièmes étaient écrits à partir de l'écriture de l'entier, dont l'inverse est considéré, en ajoutant, le signe de la bouche, en général, au-dessus. En voici un exemple avec un extrait du fac-similé de la coudée de Turin n° 6347 [4] qui est entendue comme étant un objet sacré. On remarquera le signe particulier pour 1/2 (le premier quantième, à droite). On notera aussi l'erreur commise par l'artisan lorsqu'il a découpé en quatre parties l'espace dévolu pour 1/3. Les 15 premiers doigts sont ainsi fractionnés de 1/2 à 1/16 :



Autrement dit, les scribes égyptiens ne possèdent pas le concept général de nos fractions d'aujourd'hui. Ils doivent donc écrire additivement mais sans signe d'addition les expressions fractionnaires qu'ils considèrent avec les outils précités tout en excluant la répétition des quantièmes. Ainsi, à notre 2/7 d'aujourd'hui pourrait correspondre l'écriture hiéroglyphique suivante



pour $\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$.

Nous verrons que c'est l'objectif principal des *expressions de 2 à partir d'un entier impair,* à savoir, exprimer les doubles des quantièmes à l'aide de quantièmes distincts. Ainsi, dans nos traductions des textes égyptiens, nous utilisons les notations fractionnaires d'aujourd'hui de la manière suivante. Pour transcrire 2/3 et les quantièmes $1/n$, nous employons la barre oblique et en l'absence de signe d'addition, dans les expressions d'un nombre nous mettons deux espaces entre ces divers nombres fractionnaires. Par exemple, 1/4 1/28 est notre traduction de l'expression hiéroglyphique ci-dessus. Nous revenons à la barre horizontale dans nos réflexions plus mathématiques. En revanche, nous conservons notre

[3] Voir Quibell, 1900 (1989), *Hierakonpolis*, pl. XXXIX-XL.

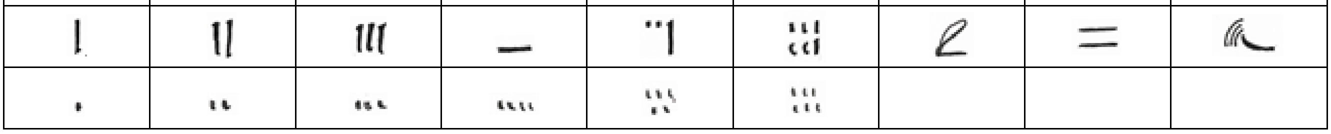
[4] Lepsius, 1865, *Die alt-aegyptische Elle und ihre Eintheilung,* b, Elle n° 1 in Holz, Turin.Il existe plusieurs types de coudées. Celle de Turin est divisée en en 7 paumes de 4 doigts chacunes.

écriture d'aujourd'hui pour les nombres entiers. Par exemple, nous ne noterons pas 20 3 2/3 1/7 mais 23 2/3 1/7 qui doit être lu comme signifiant

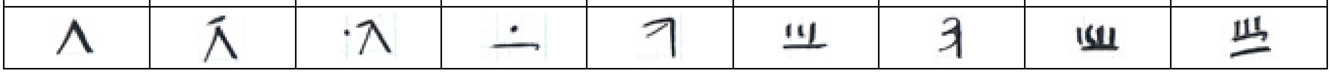
$$23 + \frac{2}{3} + \frac{1}{7}.$$

Bien que l'écriture hiératique soit qualifiée de cursive, il ne faut pas croire qu'elle dérive obligatoirement de l'écriture hiéroglyphique. Les notations numériques prouvent abondamment cet état de fait. En effet, en hiératique, les scribes notent chaque quantité des puissances décimales d'entiers, ce qui augmente le nombre de signes numériques. Ainsi, dans le *Papyrus Rhind*, nous pouvons trouver les écritures suivantes pour les unités, les dizaines et les centaines :

1	2	3	4	5	6	7	8	9



10	20	30	40	50	60	70	80	90



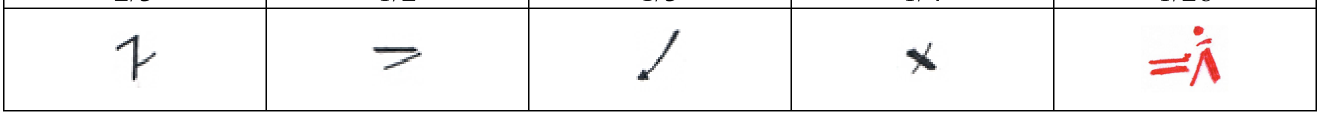
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Elles dénotent une abstraction certaine. Ainsi, nous pouvons considérer que 8 est le double de 4, que pour les centaines, par le jeu des écritures pointées ou de l'écriture des chiffres 7 et 9, nous avons des multiples de 100 et, enfin, que pour 60, 80 et 90 nous avons des multiples de nombres de dizaines :

$$(10+10+10)\times 2 = 60 \quad , \quad (10+10+10+10)\times 2 = 80 \quad , \quad (10+10+10)\times 3 = 90\,.$$

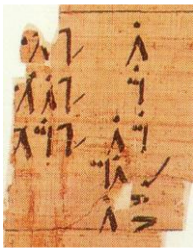
Pour l'écriture des fractions, le nombre de signes augmente aussi. En effet, les scribes utilisent des signes particuliers pour 2/3, 1/2, 1/3 et 1/4. Pour les autres quantièmes, la marque de la bouche est remplacée par un point qui est écrit au-dessus du premier signe numérique du nombre dont le quantième est l'inverse. Ainsi, toujours dans le *Papyrus Rhind*, nous pouvons trouver

2/3	1/2	1/3	1/4	1/28



Toujours dans le *Papyrus Rhind*, nous pouvons aussi donner l'exemple de la *table de division par dix* qui figure après les *expressions de 2 à partir d'un entier impair* (noter l'inversion du sens de lecture, de droite à gauche pour les textes égyptiens et de gauche à droite pour nos traductions)[5]

[5] Robins, Shute, 1987, *The Rhind Mathematical Papyrus, an ancient Egyptian text*, pl. 8.

	1/10	2/3 1/30
	1/5	2/3 1/10 1/30
	1/5 1/10	2/3 1/5 1/30
	1/3 1/15	
	1/2	
	1/2 1/10	

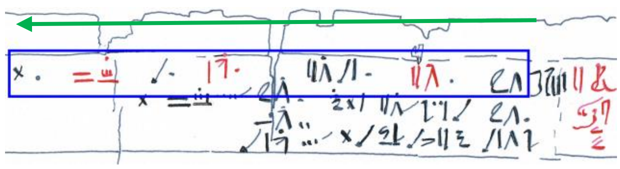
Par exemple, à la dernière expression numérique, à savoir, 2/3 1/5 1/30 correspond, aujourd'hui, l'égalité suivante :

$$9 : 10 = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{30}.$$

Notons que les arithméticiens grecs et, dans une moindre mesure, de langue arabe, ainsi que ceux du Moyen-Âge ont aussi considéré les quantièmes. Ainsi, dans d'autres documents plus récents écrits en copte[6] ou en grec,[7] nous pouvons trouver1/2 1/3 1/15 comme résultat de la division de 9 par 10. C'est un constat classique car les décompositions de nos fractions générales en somme de quantièmes distincts et, éventuellement de 2/3 ne sont pas uniques. Ici, seul, Âhmès, le copiste du *Papyrus Rhind* a considéré deux-tiers. Nous aurons souvent à prendre en compte cette non-unicité lors de nos commentaires des *expressions de 2 à partir d'un entier*.

Les *expressions de deux à partir d'un entier impair*

Comme nous venons de l'indiquer, les scribes égyptiens ne possèdent pas une notation pour les fractions générales[8]. S'obligeant à écrire les expressions numériques fractionnaires avec des quantièmes distincts et éventuellement 2/3, ils ont donc des difficultés pour noter des fractions aussi simples que nos doubles de quantièmes impairs. C'est l'objectif principal de ce que nous nommons *les expressions de 2 à partir d'un entier impair*. Mais ce n'est pas le seul. Prenons l'exemple des *expressions de 2 à partir de 17* :

Fragment UC 32159-F *d'El-Lahoun*[9]	*Papyrus Rhind BM 10057*[10]
	

Les nombres figurant à la première ligne dans le *Papyrus Rhind* sont identiques à ceux que nous lisons dans le *Fragment UC 32159-F d'el Laloun*. Conservant les deux couleurs d'encre, la noire et la rouge, du *Papyrus Rhind*, nous pouvons les présenter comme suit (lecture de droite à gauche) :

---

[6] Drescher, 1948, A coptic calculation manual, pl. 2.
[7] Robbins, 1923, A Greco-Egyptian Mathematical Papyrus, p. 331.
[8] Voir, toutefois, à partir du troisième siècle avant notre ère une curieuse mixture d'entiers, de quantièmes et de fractions à « numérateur » fractionnaire avec barre de fraction, par exemple, 8 1/3 1/15 (729 1/2 1/10)/131 ; Parker, 1972, *Demotic Mathematical Papyri*, p. 9.
[9] Imhausen, Ritter, 2004, *Mathematical Fragments*.
[10] Notre reproduction ; voir aussi notre site papyrusrhind.unblog.fr.

17 1/12 1 1/3 1/12 1/51 1/3 1/68 1/4,

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}=\frac{2}{17} \qquad \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=2$$

Pour notre part, nous distinguons ces deux expressions principales ; d'une part, l'expression du double du quantième 1/17 et, d'autre part, la décomposition de 2 à partir de 17. Nous pouvons aussi considérer les *expressions secondaires* constituées par les relations liant le nombre écrit en rouge au quantième qui le suit, soit, toujours en termes d'aujourd'hui :

$$17\times\frac{1}{12}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{12} \quad , \quad 17\times\frac{1}{51}=\frac{1}{3} \quad , \quad 17\times\frac{1}{68}=\frac{1}{4}.$$

Afin d'essayer de montrer comment les scribes égyptiens sont parvenus à de tels résultats, il nous semble utile de préciser comment ils effectuent les opérations usuelles de l'arithmétique.

L'addition et la soustraction

Les scribes égyptiens ne disposent ni de signes spécifiques ni de noms particuliers pour désigner les opérations usuelles de l'arithmétique. Ils se contentent d'expressions diverses, sortes de descriptions indiquant la manière d'opérer. Par exemple, pour la multiplication de *N* par *P*, Âhmès peut employer l'expression *ir.khér.èk ouah tèp-èm* N *èr zép(ou)* P que nous rendons par *tu feras l'opération à partir de* N *jusqu'à* P *fois* ou plus simplement *ouah tèp-èm* N *èr zép(ou)* P, soit *opère à partir de* N *jusqu'à* P *fois*. Les scribes considérant et pratiquant la division sous la forme inverse de la multiplication, Âhmès peut employer des formes semblables pour la division : *ir.khér.èk ouah tèp-èm* N *èr gémèt* P que nous rendons par *tu feras l'opération à partir de* N *jusqu'à trouver* P ou simplement *ouah tèp-èm* N *èr gémèt* P , soit *opère à partir de* N *jusqu'à trouver* P, c'est-à-dire, *multiplie* N *jusqu'à trouver* P, soit encore *divise* P *par* N.

Pour additionner ou soustraire des nombres entiers, il semble que les scribes égyptiens aient pu s'appuyer sur la connaissance de leur écriture hiéroglyphique qui donne immédiatement le résultat. La répétition des signes peut remplacer les buchettes d'antan. Sans doute, aussi, il en est de même pour l'utilisation des *doublements* et *dédoublements* lors des multiplications et des divisions. En effet, dans tous ces cas, il suffit d'opérer à partir des groupements d'un même signe. Ceci a pu conduire, pour la multiplication, à décomposer le multiplicateur en multiplicateurs binaires partiels, nos décompositions binaires utilisées en informatique, en procédant à des *doublements successifs*.

L'addition ou la soustraction de nombres fractionnaires est plus délicate. Il semble que les scribes égyptiens aient principalement utilisé deux procédures qui sont du domaine de l'implicite dans les *expressions de deux à partir d'un entier*, le scribe se contentant de donner les résultats afférents. La première technique est un palliatif à nos réductions au même dénominateur. L'Auteur du *Papyrus Rhind* l'utilise, par exemple, dans le problème R23 où il s'agit de soustraire 1/4 1/10 1/30 1/45 à 2/3. Elle est parfois appelée *méthode des auxiliaires rouges* car Âhmès écrit alors le plus souvent en rouge les « numérateurs » correspondants, ces derniers pouvant être fractionnaires, leur totalisation étant toutefois aisée. Nous trouverons cette sorte d'écriture de certains termes en rouge dans le cas des *expressions de 2 à partir de 35*. Il se peut que l'Auteur ait agi implicitement de la sorte lors des *expressions de 2 à partir d'un entier* quand il effectue la division de 2 par l'entier considéré. Par exemple, dans les *expressions de 2 à partir de 19*, il doit soustraire 1 1/2 1/12 à 2 et il indique seulement que le résultat est 1/4 1/6. Nous pourrions avoir la présentation suivante :

1	1/2	1/12	total	2	
12	6	1	19	24	5

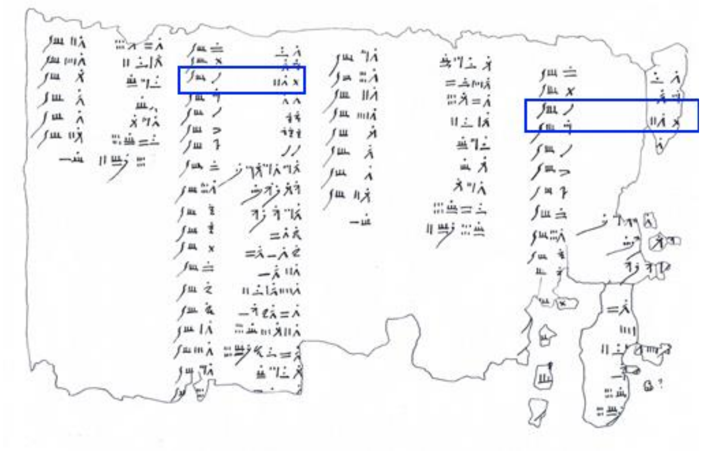
ce qui correspond à écrire, aujourd'hui :

$$2-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\right)=\frac{24}{12}-\left(\frac{12}{12}+\frac{6}{12}+\frac{1}{12}\right)=\frac{24-19}{12}=\frac{5}{12}=\frac{1}{12}\times 5=5:12\,.$$

Il ne reste plus qu'à diviser, d'une manière adéquate, 5 par 12 pour parvenir à l'expression 1/4 1/6 donnée par l'Auteur.

La deuxième procédure est reliée à l'utilisation de certaines relations qui, sans doute, doivent être connues des scribes. Nous en avons la preuve dans le *Rouleau mathématique de cuir*[11], document aussi acheté par Rhind, qui date, sans doute, de la même période que le *Papyrus Rhind*. Il comporte, en double, 26 relations numériques, telles, par exemple,

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}\quad,\quad\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\quad,\quad\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{42}=\frac{1}{4}\quad,\quad\frac{1}{96}+\frac{1}{192}=\frac{1}{64}\,.$$



Le *Rouleau mathématique de cuir*

Bien entendu, pour l'addition des nombres fractionnaires la connaissance de telles relations permet de simplifier diverses expressions numériques ou de mener à bien certaines additions. Dans le domaine de la soustraction, elles peuvent être utilisées, sous la forme d'additions successives permettant d'aboutir au résultat. Ainsi, dans l'exemple précédemment considéré, nous devons commencer par chercher quel quantième nous devons ajouter à l'expression 1 1/2 1/12 pour la simplifier en vue, ultérieurement, de parvenir à 2. Or, parmi les diverses réductions connues comportant le quantième 1/12, à savoir,

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}\quad,\quad\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}\quad,\quad\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}\quad,\quad\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{1}{8}\,.$$

nous pouvons choisir la première et ajouter ainsi 1/4 à l'expression 1 1/2 1/12 de telle sorte, qu'en réduisant, nous obtenons l'expression plus simple 1 1/2 1/3 :

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\right)+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\,.$$

Maintenant, il ne reste plus qu'à utiliser les relations fondamentales

[11] Voir notre site papyrusrhind.unblog.fr.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\,,$$

pour voir qu'il reste à ajouter 1/6 pour aboutir au résultat 1/4 1/6 donné par l'Auteur :

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=2 \quad \text{et} \quad M=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}.$$

Nous pouvons relier cette procédure aux *décompositions de 2 à partir d'un entier* car elles peuvent servir de relations permettant de simplifier divers groupements de termes. Ainsi, pour 19, nous avons la *décomposition de 2 à partir de 19*, à savoir,

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\right)+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=2\,,$$

qui permet de reconnaître ou d'établir la relation

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4},$$

sachant que

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=2\,.$$

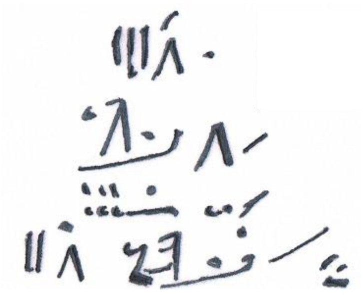
Nous pouvons penser qu'en faisant figurer les termes des *décompositions de 2* dans les *expressions de 2 à partir d'un entier*, les scribes en ont souligné l'intérêt qu'ils leur portent.

La multiplication

En demandant d'*opérer à partir de* N *jusqu'à* P *fois*, il semble que pour effectuer la multiplication de *N* par *P*, les scribes indiquent une procédure « primitive » sous la forme de l'addition répétée du multiplicande dont le nombre de fois est égal au multiplicateur. Sans doute aussi, l'habitude héritée de leurs pratiques comptables pour distribuer les salaires ou les nourritures pour les animaux les ont incités à disposer les multiplications en deux colonnes dont la première comporte divers multiplicateurs du multiplicande dont la somme de certains d'entre eux est égale au multiplicateur. Dès lors, le problème de la simplicité des multiplicateurs qui doivent être retenus a pu se poser. Or deux multiplications sont élémentaires. En effet, la base dix du système numérique induit l'utilisation de la *multiplication par dix* qui revient à changer chaque signe hiéroglyphique en son successeur décimal. Par ailleurs, son additivité rend aussi facile les *doublements*, c'est-à-dire, les multiplications par 2, puisqu'il suffit de répéter chaque signe hiéroglyphique en simplifiant la présence de 10 fois le même signe aussi par son successeur décimal. Ainsi, puisque

$$12=10+2\,,$$

l'Auteur emploie ces deux multiplicateurs, 10 et 2, *lors des expressions de 2 à partir de 23*, quand il effectue la multiplication de 23 par 12. Il procède comme suit :



	1	23		(initialisation)
\	10	230		(multiplication par 10)
\	2	46		(*doublement*)
	Total \	276	1/12	

À la première ligne, il « opère à partir de 23 », c'est-à-dire, qu'il écrit 1 en tête de la première colonne et le multiplicande, ici, 23, en tête de la deuxième colonne. Pour la deuxième, il effectue une multiplication par dix, ce qui revient à multiplier par 10, dans leurs colonnes respectives, les nombres de la première ligne :

$$1 \times 10 = 10 \quad , \quad 23 \times 10 = 230\,.$$

Enfin, la troisième ligne correspond au *doublement* de la première ligne :

$$1 \times 2 = 2 \quad , \quad 23 \times 2 = 46\,.$$

Comme le scribe l'indique ensuite, il ne reste plus qu'à totaliser pour obtenir le résultat cherché[12] :

$$23 \times 12 = 23 \times (10 + 2) = (23 \times 10) + (23 \times 2) = 230 + 46 = 276\,.$$

Toutefois, d'un point de vue théorique mais aussi pratique, la procédure classique pour effectuer les multiplications entre nombres entiers est celle des *doublements successifs*. En effet, ces derniers reviennent à utiliser ce que nous appelons aujourd'hui la *décomposition binaire* du multiplicateur, soit, pour le cas précédent :

$$12 = 8 + 4 = 2^3 + 2^2\,.$$

La multiplication de 23 par 12 pourrait alors se présenter comme suit :

	1	23	(initialisation)
	2	46	(*doublement*)
\	4	92	(*doublement*)
\	8	184	(*doublement*)
Total		276	

Ici, on effectue des *doublement*s successifs, c'est-à-dire que chaque ligne est double de la précédente ou, si l'on préfère, dans chaque colonne, en dehors de l'initialisation, chaque nombre est le double de celui qui le précède. Cette procédure est facile à mener car, d'une part, les *doublements* sont immédiats et, d'autre part, la considération des *doublements successifs* s'arrête lorsque qu'un nouveau *doublement* conduirait à un nombre supérieur au multiplicateur. Ici, un quatrième *doublement* donnerait, pour la première colonne, 16 comme résultat qui est strictement supérieur au multiplicateur 12. Seul, l'Art égyptien du calcul, conduit à préférer la procédure écrite par Âhmès. En effet, elle nécessite deux opérations auxiliaires, *multiplication par 10* et un *doublement*, alors qu'il faut trois *doublements* dans l'autre cas.

[12] L'introduction du 1/12 à la fin de cette opération relève d'une pratique constante chez Âhmès consistant à compresser la rédaction de la solution ce qui revient, ici, à indiquer que le résultat de la multiplication de 23 par 1/276 est égal à 1/12.

Il n'en demeure pas moins que le scribe utilise la technique des *doublements successifs* dans de nombreux cas. Par exemple, nous la trouvons lors des *expressions de 2 à partir de 17*. Âhmès donne les présentations suivantes des multiplications de 17 par 3 et 4 :

En quelque sorte, comme il arrive souvent, Âhmès est victime d'une compression certaine de son écrit. En effet, suivant les canons habituels il aurait pu présenter séparément les deux opérations :

Ceci lui aurait permis de bien mettre les tirets de sommation alors, qu'ici, il s'est situé dans le cadre des productions des résultats :

$$17 \times 3 = 51 \quad \text{et} \quad 17 \times 4 = 68\,.$$

Quoiqu'il en soit, nous pouvons traduire et commenter la première multiplication que nous avons présentée comme suit

\	1	17	(initialisation)
\	2	34	(*doublement*)
	3	51	(totalisation)

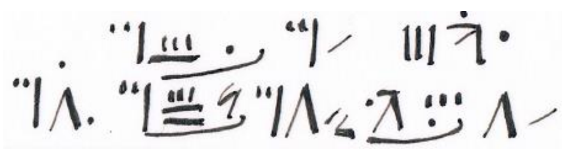
En général, le scribe coche les lignes où se trouvent les multiplicateurs partiels retenus et il ne reste plus qu'à additionner les résultats correspondant de la deuxième colonne pour obtenir le résultat, ce qui correspond, aujourd'hui, aux égalités suivantes :

$$17 \times 3 = 17 \times (1 + 2) = (17 \times 1) + (17 \times 2) = 17 + 34 = 51\,.$$

Bien entendu, pour la deuxième multiplication, un deuxième *doublement* est nécessaire et le scribe obtient immédiatement le résultat puisque 4 est une puissance de 2 :

	1	17	(initialisation)
	2	34	(*doublement*)
\	4	68	(*doublement*)

Toujours lors des *expressions de 2 à partir d'un entier*, le scribe nous donne à voir une autre manière de procéder où, curieusement, il utilise un *dédoublement*. Nous le lisons lors des *expressions de 2 à partir de 53* lorsqu'il effectue la multiplication de 53 par 15 :



	1	53	(initialisation)
\	10	530	(multiplication par 10)
\	5	265	(*dédoublement*)
Total	15	795	1/15

Cette fois, nous pouvons écrire

$$53 \times 15 = 53 \times [10 + (10 : 2)] = 53 \times (10 + 5) = (53 \times 10) + (53 \times 5) = 530 + 265 = 795\,.$$

Il nous faut examiner maintenant la multiplication d'un nombre entier par une fraction. Chaque fois qu'Âhmès considère une multiplication d'un entier naturel par 2/3, il donne immédiatement le résultat. Nous pouvons penser que, comme les Grecs[13] qui ont adopté un système numérique semblable (les signes numériques sont principalement alphabétiques), il a disposé de *tables de deux-tiers*. Quant à la multiplication d'un entier par un quantième il semble que les scribes aient procédé par division. Néanmoins, certains quantièmes particuliers donnent lieu à des procédures spécifiques. Ainsi, les résultats de la multiplication par 1/3, 1/6, 1/12, 1/24 sont obtenus à partir du multiplicateur 2/3 par *dédoublements successifs*. De même, bien entendu, cette procédure des *dédoublements successifs* est utilisée pour les multiplications des entiers par les *quantièmes binaires*, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, … .

Pour les multiplications entre 2/3 et les quantièmes, les scribes utilisent des procédures qui reviennent aujourd'hui, à écrire

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2q} = \frac{1}{2q} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{[(2q) : 2] \times 3} = \frac{1}{3q}\ ,$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2q+1} = \frac{1}{2q+1} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{(2q+1) \times 2} + \frac{1}{(2q+1) \times 6},$$

cette dernière relation faisant l'objet de la règle relative à l'exemple R61B dans le *Papyrus Rhind*.

Enfin, la multiplication de deux quantièmes semble ne pas représenter de difficultés. Il peut lui correspondre la règle classique d'aujourd'hui

$$\frac{1}{p} \times \frac{1}{q} = \frac{1}{p \times q}.$$

La division

L'examen des *expressions de 2 à partir d'un entier* nous donnera l'occasion de commenter de nombreuses divisions de 2 par un entier impair N. Ici, nous commençons par considérer l'exemple de la division de 97 par 7 qui, sans doute, a été utilisée lors des *expressions de 2 à partir de 97*. Il s'agit d'une division entre deux nombres entiers mais la procédure que nous allons décrire est générale et peut être adaptée pour la division d'un nombre entier par un nombre fractionnaire comme nous pouvons en

[13] Voir Fowler, 1987, *The Mathematics of Plato's Academy, a new reconstruction*.

trouver un exemple dans le problème R31 du *Papyrus Rhind*. Tout d'abord, nous avons souligné que les scribes opèrent de manière inverse, c'est-à-dire, qu'ici, ils doivent chercher par quoi il faut multiplier 7 afin d'obtenir 97. Par conséquent, l'initialisation de la procédure consiste à écrire en haut de deux colonnes, respectivement, les nombres 1 et le diviseur, 7:

1	7	(initialisation)

Dans une première partie, les scribes doivent obtenir la *partie entière* du résultat. Ils peuvent opérer par *doublements successifs* :

1	7	(initialisation)
2	14	(*doublement*)
4	28	(*doublement*)
8	56	(*doublement*)

Un autre *doublement* donnerait 112 pour résultat, nombre supérieur au dividende 97. Par suite, les scribes cessent d'effectuer d'autres *doublements* et ils additionnent le maximum de nombres de la deuxième colonne de telle sorte que leur somme soit inférieure au dividende. Ils commencent par le bas :

\	1	7	$84 + 7 = 91$
	2	14	$84 + 14 = 98 > 97$
\	4	28	$56 + 28 = 84$
\	8	56	56
Total	13	91	

Ensuite les scribes cochent les éléments correspondants de la première colonne, à savoir, 8, 4 et 1 et ils en font la somme, 13 :

$$8 + 4 + 1 = 13\,.$$

Ce nombre est la *partie entière* du résultat de la division de 97 par 7 :

$$13 < 97 : 7 < 14\,.$$

Les scribes viennent d'obtenir 91 comme résultat partiel :

$$7 \times 13 = 7 \times (8 + 4 + 1) = (7 \times 8) + (7 \times 4) + (7 \times 1) = 56 + 28 + 7 = 91\,.$$

Ils sont trop loin du dividende. Pour s'en approcher, dans une deuxième étape, ils peuvent utiliser des *dédoublements successifs* :

\	1	7	
	2	14	
\	4	28	
\	8	56	
Total	13	91	
\	1/2	3 1/2	(*dédoublement*)
\	1/4	1 1/2 1/4	(*dédoublement*)
Total	13 1/2 1/4	96 1/4	

Un premier *dédoublement* donne 94 1/2 pour total partiel :

$$91+\left(3+\frac{1}{2}\right)=94+\frac{1}{2}.$$

Ce nombre est inférieur au dividende 97. Les scribes retiennent ce *dédoublement* : ils cochent le multiplicateur 1/2 de la première colonne. Nous sommes encore loin du dividende. Les scribes doivent poursuivre les *dédoublements* :

$$\left(94+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=96+\frac{1}{4}.$$

Cette fois, les scribes obtiennent un nombre proche du dividende, plus précisément, à moins d'une unité. Ils peuvent arrêter les *dédoublements*.

Dans une troisième étape les scribes doivent calculer ce qu'il manque pour parvenir au dividende. Ici :

$$M=97-\left(96+\frac{1}{4}\right)=(97-96)-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}.$$

Ayant opéré par *dédoublements successifs*, les quantièmes figurant dans le total partiel, ici, dans 96 1/4, sont binaires ; ici, nous avons le seul 1/4. Ceci facilite l'écriture du *manque* puisqu'il ne comporte que des quantièmes binaires

$$1-\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}.$$

\	1	7	
	2	14	
\	4	28	
\	8	56	
Total	13	91	
\	1/2	3 1/2	(*dédoublement*)
\	1/4	1 1/2 1/4	(*dédoublement*)
Total	13 1/2 1/4	96 1/4	
Manque		1/2 1/4	

Il reste à combler le *manque*. Les scribes opèrent partiellement, c'est-à-dire, qu'ils comblent pour chaque quantième figurant dans le *manque*. Par exemple, ici, pour 1/2, ils doivent chercher quel multiplicateur m de 7 donne 1/2 comme résultat :

$$7m=\frac{1}{2}.$$

Il est immédiat que

$$m=\frac{1}{7\times 2}=\frac{1}{14}.$$

Par suite, ici, les scribes effectuent les multiplications auxiliaires de 7 par 2 et 4, multiplications immédiates puisque les nombres 2 et 4 sont binaires. Ainsi, nous pouvons avoir la présentation finale

\	1	7		1	7
	2	14	\	2	14
\	4	28			
\	8	56			
Total	13	91			
\	1/2	3 1/2		1	7
\	1/4	1 1/2 1/4		2	14
Total	13 1/2 1/4	96 1/4	\	4	28
Manque	1/2 1/4				
\	1/14	1/2			
\	1/28	1/4			
Total	13 1/2 1/4 1/14 1/28	97			

$$97 : 7 = 13 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}.$$

Bien entendu, les *expressions de 2 à partir d'un entier* donnent lieu, en général, à la division de 2 par l'entier considéré. Toutefois, la procédure que nous venons d'indiquer est peu employée car, pour les scribes égyptiens qui pratiquent l'Art du calcul, elle peut donner lieu à des expressions qui ne peuvent pas être retenues, les quantièmes étant trop petits ou leur nombre étant trop grand.

Une opération auxiliaire : l'inversion

Il arrive souvent que, pour mener à bien les divisions, les scribes utilisent une opération particulière que nous nommons inversion. De quoi s'agit-il ? Prenons le cas particulier des *expressions de 2 à partir des « multiples de 3 »*. Pour diviser 2 par un « multiple de 3 », l'Auteur commence par considérer le multiplicateur 2/3 qui donne un nombre entier comme résultat :

$$3k \times \frac{2}{3} = 2k\,.$$

Dès lors, il peut inverser, c'est-à-dire, considérer comme multiplicateur l'inverse du résultat, donc $1/2k$, et en déduire le résultat, à savoir, l'inverse de 2/3, soit 1 1/2 :

$$3k \times \frac{1}{2k} = 1 : \frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{2}.$$

Il en est de même si le résultat de la multiplication par un quantième, $1/q$, d'un nombre entier ou fractionnaire E est un nombre entier n :

$$E \times \frac{1}{q} = n\,.$$

Alors, par inversion, le scribe peut en déduire que le produit de E par l'inverse de l'entier n est l'inverse du quantième $1/q$:

$$E \times \frac{1}{n} = q\,.$$

Quelques considérations générales

Même si l'Auteur du *Papyrus Rhind* a livré parfois de précieuses indications, l'Art égyptien du calcul qu'il a pratiqué garde toujours quelques secrets. Nous sommes obligés de présenter nos observations avec la plus grande prudence, en particulier, lorsque nous introduisons des notions que les scribes égyptiens ignoraient peut-être. Toutefois, nous considérons que ce sont des moyens commodes pour ne pas dire nécessaires, qui nous permettent, avec notre pratique d'aujourd'hui, de mieux comprendre leur démarche. Dans la mesure du possible, nous essaierons d'en préciser les limites.

Les égyptologues donnent diverses interprétations des textes que nous examinons : partages de 2 [14], rapports de 2 aux nombres impairs[15], divisions de 2 par des nombres impairs[16], fractions doubles[17] ou encore expressions de 2/*n* lorsque l'on adopte certains points de vue modernes[18]. Hier, comme aujourd'hui lorsque nous employons la notation 2/13, nous pouvons jouer indifféremment sur la division ou le rapport de 2 par 13 en lisant 2 sur 13 ou, en préférant 2 treizièmes, mettre l'accent sur le double de un treizième ou encore utiliser la forme multiplicative un treizième de 2. Certains n'hésitent pas à parler de tables ce qui nous semble être hors de propos puisque les scribes donneraient alors le seul résultat, soit celui de la division de 2 par l'entier considéré, soit l'expression du double du quantième, inverse de ce nombre. En outre, il semble que l'Auteur du *Papyrus Rhind* ait bien choisi l'expression qui sert à introduire les divers cas lorsque ceux-ci sont écrits en haut de page. Au lieu de l'expression « *ouah tèp-èm 2 èr gémèt* n » qui est l'invitation classique pour « diviser 2 par l'entier n », Âhmès écrit « *nis 2 khénèt* n » que nous rendons par « exprime 2 à partir de n » comme pour souligner l'importance, d'une part, de l'*expression du double du quantième* $1/n$ et, d'autre part, de la *décomposition de 2* qui lui est associée. Enfin, nous pouvons noter qu'il est difficile de situer le cas des nombres 35 et 91 dans le cadre pratique de la division. Il peut en être de même pour les nombres « extrêmes » 3 et 101 considérés par l'Auteur. Autant dire que les nombres 3, 35, 91 et 101 donnent lieu à des *cas spéciaux* qui peuvent ne pas relever des remarques générales que nous formulons ci-dessous.

L'examen des diverses *expressions des doubles des quantièmes* peut laisser la place à diverses observations. Tout d'abord, ces expressions comportent 2, 3 ou 4 quantièmes tous distincts et différents de l'inverse du nombre considéré, par exemple,

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\ ,\ \frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}\ ,\ \frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}.$$

Ceci laisse supposer que l'Auteur a peut-être rejeté certaines expressions qui comportent moins de quantièmes, par exemple

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{7}+\frac{1}{91},$$

expression que nous trouvons dans un papyrus démotique de l'époque romaine[19], dans le *Papyrus grec Michigan* 621[20] ou encore dans le *Papyrus byzantin d'Akhmîm*[21]. En fait, 13 est un nombre premier et,

---

[14] Eisenlohr, 1877, *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter*, p. 12.
[15] Griffith, 1894, The Rhind Mathematical Papyrus, p. 201.
[16] Peet, 1923$_1$, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 33.
[17] Couchoud, 1993, *Mathématiques égyptiennes*, « *tables de fractions doubles* », p. 28 ; Imhausen, Ritter, 2004, Mathematical Fragments, « *table for the doubling of odd fractions* », p. 93, Michel, 2014, *Mathématiques égyptiennes*, p. 91.
[18] Bobynin, 1890, Sur le procédé employé dans le papyrus de Rhind pour réduire les fractions en quantièmes, p. 109 ; Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* p. 44.
[19] Hultsch, 1901, Neue Beiträge zur ägyptischen Teilungsrechnung, p. 183.
[20] Voir, par exemple, Robins, 1923, A Greco-Egyptian mathematical papyrus, p. 332.
[21] Baillet, 1892, *Le Papyrus mathématique d'Akhmîm*, p. 29.

dans ce cas, il existe une seule décomposition en deux quantièmes. De manière générale, si $(2n+1)$ est un nombre premier, nous avons la seule décomposition en deux quantièmes distincts :

$$\frac{2}{2n+1}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(2n+1)}.$$

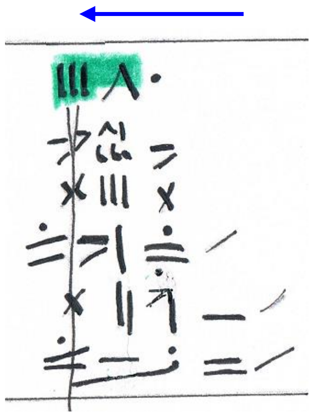
Théoriquement, ce type de décomposition présente plusieurs inconvénients. Tout d'abord, le dernier quantième est très petit. Or, dans le *Papyrus Rhind*, le plus petit quantième est 1/870. Il n'est donc pas exclu que l'Auteur se soit imposé une barrière, par exemple, tous les quantièmes doivent être supérieurs à 1/1000 ce qui conduit à une décomposition de $2/p$ en 3 ou 4 quantièmes lorsque le nombre premier p est supérieur à 43. En revanche, cette limite est très utile si l'on veut programmer une recherche des diverses expressions. Notons que, pour revenir au *Papyrus Rhind*, pour le dernier nombre considéré, à savoir, 101, l'auteur donne l'expression 1/101 1/202 1/303 1/606 qui ne présente pas grand intérêt pour des *doublements* ultérieurs mais qui doit être mise en regard du fait qu'il n'existe pas d'expression du double du quantième 1/101 en 2, 3 ou 4 quantièmes distincts supérieurs à 1/1000. En revanche, si nous passons outre cette limitation et à l'omission du quantième 1/101, en utilisant les *décompositions de deux* données respectivement dans R2/97 et R2/47, nous avons, par exemple :

$$\frac{2}{101}=\frac{1}{56}+\frac{1}{808}+\frac{1}{1414}\quad \text{et}\quad 2=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{28}\right)+\frac{1}{8}+\frac{1}{14},$$

ou[22]

$$\frac{2}{101}=\frac{1}{60}+\frac{1}{404}+\frac{1}{1515}\quad \text{et}\quad 2=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{4}+\frac{1}{15}.$$

Bien sûr, à ces considérations de limites, nous pouvons ajouter la pratique de l'Art égyptien du calcul. En effet, nous pouvons remarquer que ceci impose d'une part, la considération du quantième $1/(n+1)$ comme *quantième principal* ou, si l'on préfère de diviser $(2n+1)$ par $(n+1)$ et, par ailleurs, d'en déduire que le *manque* est égal à $1/(n+1)$, deux opérations qui peuvent s'avérer être fastidieuses. Toutefois, dans le cas du nombre 13, il est préférable d'opérer de manière classique, à l'aide des *dédoublements successifs* comme nous pouvons le voir dans le *Papyrus Rhind* :



		1	13	(initialisation)
		1/2	6 1/2	(*dédoublement*)
		1/4	3 1/4	(*dédoublement*)
	\	1/8	1 1/2 1/8	(*dédoublement*)
		manque	1/4 1/8	(ajouté)
\	4	1/52	1/4	(multiplication-inversion)
\	8	1/104	1/8	(multiplication-inversion)

En fait, les *expressions de 2 à partir d'un entier* sont très représentatives de ce que nous appelons l'Art égyptien du calcul. Il est naturel qu'après avoir indiqué dans la *Page d'Introduction* que le ou les traités qu'il recopie sont un « Bon exemple pour aller au fond des choses, pour apprendre à connaître tout ce qui est, tout ce qui est obscur, percer tous les secrets », Âhmès donne de bons exemples de cette discipline, caractéristique de la pratique des scribes égyptiens. Certes, par l'utilisation des *doublements* et *dédoublements*, ils peuvent effectuer facilement les divisions de 2 par un entier quelconque, mais

[22] Cette deuxième décomposition est citée dans Wieleitner, 1925, Zur ägyptischen Mathematik, p. 130.

nous verrons que ceci est peu souvent le cas. Au contraire, les scribes doivent obtenir des expressions les plus « simples » possibles afin de leur faciliter les calculs ultérieurs. Ils doivent donc se livrer à divers essais, pour ne pas dire diverses recherches, afin de parvenir à leur fin. Autrement dit, même si nous pouvons formuler l'application de certaines procédures générales, les scribes considèrent que les problèmes mathématiques qu'ils résolvent sont avant tout des exemples susceptibles d'être imités et non pas la mise en évidence d'algorithmes qu'il suffirait d'appliquer aveuglément. C'est pour cela qu'au lieu de problèmes nous préférons parler d'exemples pour les exercices qu'ils résolvent.

Toutefois, cet enthousiasme pour une bonne pratique de l'*Art égyptien du calcul* doit être vite tempéré. Il se peut, qu'à nos yeux d'aujourd'hui, les scribes n'aient pas produit la « meilleure solution ». C'est par exemple le cas pour les *expressions de 2 à partir de 31* pour lesquelles Âhmès aurait pu donner la décomposition en deux termes suivante

$$\frac{2}{31}=\frac{1}{16}+\frac{1}{496} \qquad \text{avec} \qquad 2=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{16},$$

qui peut être obtenue facilement par *dédoublements successifs* alors que nous lisons la décomposition en trois termes

$$\frac{2}{31}=\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155} \qquad \text{avec} \qquad 2=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{20}\right)+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}.$$

Il nous est ici difficile de justifier la pratique du scribe. Peut-être a-t-il voulu éviter un trop grand nombre de *dédoublements successifs* pour considérer le multiplicateur 1/16 que nous ne trouvons pas dans les *expressions de 2 à partir d'un entier* mais qui sont pourtant utilisés pour le *quantième principal* 1/24 à propos des nombres 29, 37 et 41. Seul point positif, le plus petit quantième, à savoir, 1/155 est beaucoup plus grand que 1/496 qui figure dans la décomposition en deux quantièmes.

Enfin, une dernière observation est peut-être plus théorique mais elle dépend, en fait, de l'utilisation de certaines procédures. Hormis le nombre 101, dans le cas des décompositions en 3 ou 4 quantièmes, toutes les *expressions des doubles des quantièmes* sont de l'une des formes suivantes :

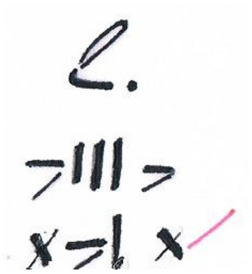
$$\frac{2}{n}=\frac{1}{p}+\frac{1}{an}+\frac{1}{bn} \quad , \quad \frac{2}{n}=\frac{1}{p}+\frac{1}{an}+\frac{1}{bn}+\frac{1}{cn} \ ,$$

où, encore, sous une forme plus théorique, l'inverse p du *quantième principal* est le plus petit commun multiple des nombres a, b et c. Il est évident que plus on impose de telles conditions, plus on réduit la possibilité de telles expressions, sans savoir si l'Auteur s'est imposé une ou des conditions semblables.

L'obtention du *quantième principal* pour les nombres premiers

En parlant de nombres premiers nous ne voulons pas dire que les scribes égyptiens en possédaient la notion. Il s'agit, pour nous, d'un moyen de classification. Nous commençons par examiner plus spécialement le premier quantième de l'expression du double de l'inverse d'un nombre premier impair. Nous disons qu'il en est le *quantième principal*. Des quelques pratiques dévoilées par l'Auteur, il semble qu'il ait pu être obtenu à partir de la division de 2 par l'entier considéré. C'est cette opération que nous retenons pour les nombres premiers compris entre 5 et 97. Le *quantième principal* prend alors les valeurs 1/3, 1/4, 1/6, 1/8, 1/12, 1/20, 1/24, 1/30, 1/36, 1/40, 1/42, 1/56 et 1/60. Nous pouvons remarquer que les inverses de ces quantièmes sont des multiples de l'un des nombres 2, 3, 10 et 7. Autrement dit, lors de cette division, il faut considérer comme premiers multiplicateurs l'un des nombres 1/2, 2/3, 1/10 et 1/7, bien sûr, dans un ordre adéquat, en effectuant, éventuellement, quelques *dédoublements*. Par ailleurs, puisqu'il s'agit de diviser 2 par un nombre premier impair, donc strictement supérieur à 2, il n'y a pas de *partie entière* dans le résultat de cette division. En outre, le *quantième principal*, lorsqu'il est considéré comme multiplicateur doit donner un résultat suffisamment proche du dividende 2.

Théoriquement, puisqu'il n'y a pas de *partie entière*, la procédure des *dédoublements successifs* peut s'appliquer. Les quantièmes principaux sont alors binaires. Mais, comme nous l'avons laissé entendre, elle est peu employée et nous trouvons les seuls quantièmes binaires 1/4 et 1/8 respectivement pour les nombres 7 et 13. Ainsi, pour le nombre 7, nous avons



	1	7	(initialisation)
	1/2	3 1/2	(*dédoublement*)
\	1/4	1 1/2 1/4	(*dédoublement*)

$$7 \times \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \cdots.$$

Comme nous l'avons précédemment indiqué, l'Auteur n'a pas retenu le *quantième principal binaire* 1/16 pour le nombre premier 31.

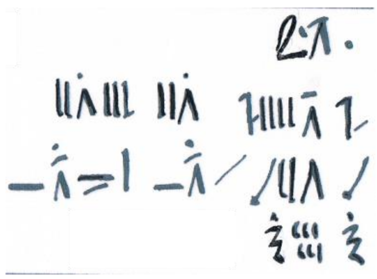
Le multiplicateur 2/3 est plus souvent pris en considération. C'est le cas, dès la première opération, à savoir, pour le nombre premier 5, où la procédure des *dédoublements successifs* donnerait lieu à une expression en trois quantièmes,

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}.$$

alors que nous déduisons tant du *Papyrus Rhind* que du *Fragment d'El-Lahoun* considéré la décomposition suivante en deux quantièmes

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}.$$

Pour un exemple plus explicite, nous pouvons prendre le cas du nombre 37. Le *quantième principal* est égal à 1/24, plus petit *quantième principal* ternaire considéré par l'Auteur. Bien entendu, 2/3 est alors pris comme premier multiplicateur :



1	37	(initialisation)
2/3	24 2/3	(table de deux-tiers)
1/3	12 1/3	(*dédoublement*)
1/6	6 1/6	(*dédoublement*)
1/12	3 1/12	(*dédoublement*)
1/24	1 1/2 1/24	(*dédoublement*)

$$37 \times \frac{1}{24} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \quad \text{et} \quad \frac{2}{37} = \frac{1}{24} + \cdots.$$

Pour les inverses de nombres décimaux, en aucun cas nous trouvons une explication et, le plus souvent, Âhmès se contente d'écrire le signe de l'ibis de lecture *gèm* qui peut tout aussi bien signifier qu'il a trouvé ce multiplicateur que l'injonction, pour l'élève, de vérifier le résultat. Quoiqu'il en soit, en aucun cas, nous ne trouvons une explication indiquant comment il est parvenu à effectuer la multiplication de l'entier considéré par le *quantième principal* qu'il écrit. Nous sommes obligés de pallier à cette absence ce qui n'est pas sans certaines difficultés car nous devons essayer diverses possibilités liées le plus souvent à l'ordre que l'on accorde aux multiplicateurs auxiliaires. Par exemple, pour le nombre 47, le *quantième principal* est égal à 1/30. Nous proposons de commencer par 2/3 et de terminer par le dixième :

	1	47	(initialisation)
	2/3	31 1/3	(table de deux-tiers)
	1/3	15 2/3	(*dédoublement* et réduction de 1/2 1/6 en 2/3)
	1/10 de 1/3	1 1/2 1/15	(division par dix)
\	1/30	1 1/2 1/15	(simplification)

$$47 \times \frac{1}{30} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{15} \quad \text{et} \quad \frac{2}{47} = \frac{1}{30} + \cdots.$$

Quant à un inverse d'un multiple de 7, nous le trouvons seulement pour le nombre 97 et le *quantième principal* 1/56 :

$$\frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}.$$

En l'absence d'indications du scribe, nous proposons la démarche suivante pour parvenir au résultat qu'il donne :

	1	97	(initialisation)
	1/2	48 1/2	(*dédoublement*)
	1/4	24 1/4	(*dédoublement*)
	1/8	12 1/8	(*dédoublement*)
	1/7 de 1/8	1 1/2 1/8 1/14 1/28	(division par 7 et simplification)
\	1/56	1 1/2 1/8 1/14 1/28	

Nous pouvons noter qu'il existe d'autres décompositions en trois ou quatre quantièmes dont le *quantième principal* est plus « accessible » puisqu'il est égal à 1/60 telles :

$$\frac{2}{97} = \frac{1}{60} + \frac{1}{291} + \frac{1}{1940} \quad \text{et} \quad \frac{2}{97} = \frac{1}{60} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776} + \frac{1}{840}.$$

Pour la première, le dernier quantième est trop petit. Quant à la seconde, le nombre 840 n'est pas un multiple de 97 et donc ne permet pas une écriture facile du *manque*. Le scribe a réussi un véritable tour de force ce qui laisse penser qu'il a effectué de nombreux essais avant d'introduire la division par 7, seul endroit où nous la trouvons lors des *expressions de deux à partir d'un entier*.

L'obtention du *manque* pour les nombres premiers

L'obtention du *quantième principal* est liée à celle du *manque*. En effet, nous pouvons formuler des remarques générales concernant la division de 2 par un entier naturel impair N dont le résultat se présente sous la forme suivante

$$\frac{2}{N} = \frac{1}{p} + \sum \frac{1}{q_i} \,,$$

où $1/p$ désigne le *quantième principal* et où les quantièmes $1/q_i$ sont distincts, leur nombre étant inférieur ou égal à 3. Si nous notons P le résultat de la multiplication de l'entier considéré par le *quantième principal*,

$$1 + \frac{1}{2} \leq P = N \times \frac{1}{p} < 2,$$

il en résulte que, pour les scribes, le *manque* M pour parvenir au dividende, à savoir la différence entre 2 et P, doit être exprimable sous la forme d'une somme de quantièmes en nombre inférieur ou égal à 3,

$$M = 2 - P = \sum \frac{1}{m_i}$$

de telle sorte que, selon la procédure suivie dans le *Papyrus Rhind*, il suffit de prendre pour chacun des q_i le multiple de N par m_i :

$$q_i = N \times m_i \quad \text{et} \quad \frac{2}{N} = \frac{1}{p} + \sum \frac{1}{N \times m_i} \,.$$

En outre, si l'on impose une limite à la petitesse des quantièmes, il est évident que celle-ci entraîne des répercussions sur celle des quantièmes figurant dans l'expression du *manque*. Dans les *expressions de 2 à partir d'un entier*, le plus petit quantième $1/m_i$ est 1/15.

Théoriquement, en termes d'aujourd'hui, pour décomposer le *manque* en la somme de quantièmes distincts, nous pouvons noter que, dans les *expressions de 2 à partir d'un nombre premier*, telles que nous les lisons dans le *Papyrus Rhind*, les nombres m_i sont des diviseurs de l'inverse p du *quantième principal*[23]. Autrement dit, pour tout entier i, il existe un entier m'_i tel que

$$p = m_i m'_i \,.$$

Les entiers m'_i sont aussi des diviseurs de p et l'on peut écrire

$$M = \sum \frac{1}{m_i} = \sum \frac{m'_i}{p} = \frac{\sum m'_i}{p} \,.$$

Autrement dit, il suffit alors d'écrire le *manque* sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est l'inverse du *quantième principal* et le numérateur la somme de diviseurs distincts de cet inverse. Bien sûr, ce type de considérations dépasse les connaissances des scribes égyptiens. Mais ceci n'empêche pas certains égyptologues de le retenir[24].

[23] On peut démontrer que dans ce cas, le nombre p est le plus petit commun multiple des nombres m_i. Mais nous ne savons pas si une telle décomposition du *manque* en moins de trois quantièmes distincts existe pour tout nombre premier.

[24] Voir, par exemple, Michel, 2014, *Mathématiques égyptiennes*, p. 101.

En fait, de par sa définition, nous devons effectuer une soustraction pour laquelle Âhmès ne nous fournit aucune indication si l'on met à part l'écriture du terme *djat* que nous rendons par *manque* (voir pour les nombres 17, 19, 23, 37, 41 et 53. Nous prenons l'exemple du nombre premier 19, car l'Auteur fournit de nombreuses explications, en particulier, le *manque* est précisé par deux fois :

[**Exprime 2** à partir de 19]									
		19	**1/12**	1 1/2 1/12	**1/76**	1/4		**1/114**	1/6
[Calcul]									
	[1	19]		1	1/19			1	1/19
	2/3	12 2/3		2	1/38			2	1/38
	1/3	6 1/3	\	4	1/76	1/4		4	76
	1/6	3 1/6		*Manque*		1/6	Total \	6	1/114 1/6
[\]	1/12	1 1/2 1/12							
Manque		1/4 1/6							

Tout d'abord il présente la division de 2 par 19 en utilisant le multiplicateur ternaire 1/12 selon la procédure classique des multiplicateurs ternaires, à savoir, multiplicateur 2/3 suivi de *dédoublements* successifs, d'où

$$19 \times \frac{1}{12} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12}.$$

Il en déduit que le *manque* est égal à 1/4 1/6

$$M = 2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}.$$

Suivant les hypothèses théoriques précédentes, en utilisant les diviseurs de 12, nous avons alors les deux décompositions suivantes :

$$M = 2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\right) = \frac{5}{12} = \frac{4+1}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12},$$

$$M = 2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\right) = \frac{5}{12} = \frac{3+2}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}.$$

Selon la procédure suivie, nous pouvons donc écrire le *manque* de deux manières. Elles se distinguent essentiellement par le dernier quantième qui est plus grand dans celle que nous lisons dans le *Papyrus Rhind*. Lors des considérations générales sur la conduite des soustractions, nous avons indiqué comment nous pouvons parvenir au résultat donné par l'Auteur. Ici, nous montrons comment nous pouvons obtenir l'autre expression du *manque*, à savoir, 1/3 1/12.

Si nous voulons procéder par soustraction et utiliser le *procédé des auxiliaires numériques*, nous pouvons choisir le nombre 12 comme *référent commun* (ici, notre dénominateur commun) ce qui pourrait donner lieu à la présentation suivante :

2	1	1/2	1/12	
24	12	6	1	5

Ceci correspond à écrire aujourd'hui :

$$M = 2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\right) = \frac{24}{12} - \left(\frac{12}{12} + \frac{6}{12} + \frac{1}{12}\right) = \frac{24 - 19}{12} = \frac{5}{12} = \frac{1}{12} \times 5\,.$$

Il ne reste plus qu'à effectuer la division de 5 par 12. Cette fois, nous commençons par considérer le multiplicateur deux-tiers :

	1	12	(initialisation)
	2/3	8	(table de deux-tiers)
\	1/3	4	(*dédoublement*)
\	1/12	1	(inversion de l'initialisation)

$$M = 5 : 12 = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}.$$

Si, maintenant, nous voulons utiliser diverses relations pour parvenir à l'expression écrite par Âhmès, nous pouvons procéder comme suit. Le dernier quantième de l'*expression secondaire principale* 1 1/2 1/12 est égal à 1/12. Il figure dans plusieurs réductions, en particulier dans l'égalité suivante :

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

Par suite, on ajoute à l'*expression secondaire principale* 1/12 qui est ainsi un élément du *manque partiel*, soit :

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\right) + \frac{1}{12} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}.$$

Pour parvenir au dividende 2, il manque encore 1/3,

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{3} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = 1 + 1 = 2\,.$$

d'où le *manque* total 1/3 1/12.

L'obtention des autres quantièmes pour les nombres premiers

Comme nous l'avons précédemment indiqué, ayant déterminé le *quantième principal* $1/p$ et obtenu une expression convenable du manque en la somme d'au plus trois quantièmes distincts

$$M = \sum \frac{1}{m_i}\,,$$

nous pouvons en déduire, l'expression suivante du résultat de la division de 2 par le nombre premier n :

$$2 : n = \frac{1}{p} + \sum \frac{1}{n \times m_i}\,.$$

Bien entendu, c'est aussi l'expression du double du quantième $1/n$. Dans le cas du nombre premier 37, Âhmès présente les calculs comme suit :

[1	37]	1	37		1	37	
2/3	24 2/3	2	74		2	74	
1/3	12 1/3	\ 3	111	1/3	4	148	
1/6	6 1/6	Manque	1/8		\ 8	296	1/8
1/12	3 1/12						
\ 1/24	1 1/2 1/24						
Manque	1/3 1/8						

Après avoir commencé la division de 2 par 37, obtenu le *quantième principal* 1/24 et indiqué le *manque* correspondant 1/3 1/8, il commence par effectuer le produit du nombre considéré, à savoir 37, par 3, inverse du premier quantième du manque, ce qui le conduit à écrire en fin de cette opération

\ 3 111 1/3

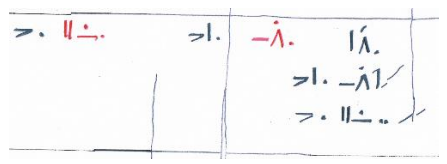
écriture compressée comme signifiant que 111 est le produit de 37 par 3 et, du point de vue de la division de 2 par 37, le tiret indique que la ligne doit être retenue, d'une part, par l'inverse de 111 comme multiplicateur et donc figurant dans le résultat de cette opération et, d'autre part, que ce multiplicateur donne 1/3 comme résultat ce qui induit un dernier *manque* égal à1/8. En soulignant ce fait, l'Auteur semble indiquer qu'il a procédé par étapes, pour établir le manque relatif au *quantième principal* lorsqu'il est pris comme multiplicateur. Ceci, tant pour le nombre 37 qu'ici, peut nous amener à penser que ce manque a pu être obtenu aussi par étapes comme nous l'avons indiqué en utilisant diverses relations. Il ne reste plus qu'à effectuer la multiplication de 37 par 8 qui donne lieu au même type de présentation. Ainsi, pour notre part, nous proposons la présentation moins compressée suivante :

1	37	1	37	1	37
2/3	24 2/3	2	74	2	74
1/3	12 1/3	\ 3	111	4	148
1/6	6 1/6	*Manque*	1/8	\ 8	296
1/12	3 1/12				
\ 1/24	1 1/2 1/24				
Manque	1/3 1/8				
\ 1/111	1/3				
\ 1/296	1/8				

Le cas des « multiples de trois »

Examinons maintenant ce qu'il en est pour les nombres qui sont des « multiples de trois ». Ici, encore, en utilisant cette appellation, nous ne savons pas si les savants égyptiens avaient un critère pouvant les définir. Il n'en demeure pas moins qu'en dehors du « cas spécial » du nombre 3 pour lequel l'Auteur donne naturellement l'expression 2/3, il commence par effectuer explicitement la division de

2 pour les entiers 9 et 15 puis, après, il se contente d'une présentation résumée qui se veut générale si nous faisons abstraction de la présence ou de l'absence de points indiquant les quantièmes. Considérons ce qu'il en est pour le nombre 21 :

	. 21 1/14 1 1/2 42* 1/2 \2/3 1/14 1 1/2 \ 2 42 1/2

Après correction de l'oubli du point de quantième pour 1/42, nous pouvons en déduire que :

$$\frac{1}{21} \times 2 = 2 : 21 = \frac{2}{21} = \frac{1}{14} + \frac{1}{42}.$$

Comme il arrive souvent, Âhmès compresse les divers moments de son exposé. Ici, le point et le nombre 21 qui débutent la première ligne doivent être compris comme signifiant que, dans cette ligne, nous trouvons les *expressions de 2 « à partir de 21 »*. Mais, replacés dans le cadre de la division de 2 par 21, ils en représentent l'initialisation, le point étant alors lu comme signifiant le chiffre 1 :

1	21

De même, pour nous situer dans ce domaine opératoire, nous devons seulement considérer, dans la deuxième ligne, les nombres 2/3 et le quantième 1/14, en fait, son inverse, 14 puisque

$$21 \times \frac{2}{3} = 14\,.$$

Ce résultat a sans doute été obtenu à partir d'une *table de deux-tiers*. De manière plus explicite, Âhmès aurait dû compléter comme suit :

1	21
2/3	14

Comme nous l'avons précédemment indiqué, c'est alors qu'il procède par inversion et qu'il retient le multiplicateur 1/14 écrit par Âhmès,

$$21 \times \frac{1}{14} = 1 : \frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{2},$$

d'où, pour une présentation plus explicite, l'ajout suivant de la troisième ligne :

	1	21
	2/3	14
\	1/14	1 1/2

Autrement dit, la deuxième ligne écrite pat Âhmès est un condensé des deux dernières lignes de cette présentation. Le scribe agit de même pour tous les « multiples de trois » mettant l'accent tantôt sur le résultat de la multiplication par 2/3, tantôt, comme ici, sur le multiplicateur qu'il en déduit.

Le *manque* pour obtenir le dividende 2 est immédiat, c'est 1/2 :

$$M = 2 - \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Il est réduit à un seul quantième, 1/2, et, comme indiqué précédemment, on doit multiplier le nombre considéré, à savoir, 21, par l'inverse de ce quantième, c'est-à-dire, 2, d'où le nombre 42 et le quantième 1/42 qui complète l'expression du double du quantième 1/21. Ainsi, une présentation plus explicite de la division de 2 par 21 pourrait être :

	1	21
	2/3	14
\	1/14	1 1/2
Manque		1/2
\	1/42	1/2

Multiplication de 21 par 2

	1	21
\	2	42

C'est ce que signifie la dernière ligne de l'écrit d'Âhmès

\ 2 42 1/2

avec le trait oblique qui signifie que 1/42 doit être retenu dans l'expression du résultat, que le chiffre 2 est le multiplicateur de 21, que 42 en est le résultat et que 1/2 est le résultat de la multiplication de 21 par le quantième 1/42.

Ainsi, nous pouvons traduire et commenter comme suit la démarche générale suivie par l'Auteur pour tous les « multiples de trois compris entre 21 et 99 » :

1	$3k$	(initialisation)
$2/3$	$2k$	(table de deux-tiers)
$1/2k$	$1\ 1/2$	(inversion)
$manque$	$1/2$	
$1/6k$	$1/2$	$(3k \times 2 = 6k)$

On comprend facilement que la simplicité de cette procédure ait retenu l'attention des scribes et que l'Auteur ait utilisé certaines expressions comme celle du double de 1/21 en R69 et R70. Rétrospectivement, on comprend aussi pourquoi il a exposé les divisions de 2 par les premiers « multiples de trois », à savoir, par 9 et par 15

	[1	9]
	2/3	6
	1/3	3
\	1/6	1 1/2
\	1/18	1/2

	[1	15]
\	1/10	1 1/2
\	1/30	1/2

Lors de la division de 2 par 9, l'Auteur a pu « retrouver » les résultats généraux en utilisant la suite classique des multiplicateurs ternaires 2/3, 1/3 et 1/6 et, pour la division de 2 par 15, en considérant « brutalement » le multiplicateur 10, deux « techniques » qui seront mises en œuvre pour effectuer d'autres divisions. Autrement dit, sur ce simple cas, nous voyons que le scribe choisit entre diverses procédures. Ceci étant, notre appellation « multiple de trois » est peut-être exagérée car un scribe égyptien peut simplement retenir le fait essentiel, à savoir, le deux-tiers du nombre considéré est un nombre entier. On peut inverser. Par ailleurs, nous pouvons juger de l'importance attribuée au multiplicateur 2/3 en considérant une autre possibilité pour mener à bien la division : on ne considère plus 2/3 mais le multiplicateur de 3, à savoir, le nombre générique k :

	1	$3k$	(initialisation)
	$1/k$	3	(division par le multiplicateur de 3)
\	$1/2k$	1 1/2	(*dédoublement*)
	Manque	1/2	
\	$1/6k$	1/2	

L'utilisation de la division pour les nombres composés

En dehors des nombres 35 et 91, il semble que le scribe ait utilisé la division pour obtenir les *expressions de 2 à partir d'un nombre composé impair non multiple de 3*. Mais l'Auteur ne donne aucune explication. Toutefois, les *décompositions de 2* qui leur sont associées sont les mêmes que celle que nous déduisons des *expressions de 2 à partir d'un des nombres premiers* qui divisent le nombre composé considéré. Par exemple, pour le nombre composé 55, produit des nombres premiers 5 et 11, nous avons les expressions principales

$$\frac{1}{55} \times 2 = 2 : 55 = \frac{1}{30} + \frac{1}{330} \quad \text{et} \quad 2 = \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6},$$

et la *décomposition de 2* est celle que nous déduisons des *expressions de 2 à partir de 11*, de telle sorte que nous pouvons effectuer la division de 2 par 5 comme suit[25] :

	1	55	(initialisation)
	1/10	5 1/2	(division par 10)
	1/5	11	(*doublement*)
	2/3 de 1/5	7 1/3	(table de deux-tiers)
	1/3 de 1/5	3 2/3	(*dédoublement*)
	1/15	3 2/3	(simplification)
\	1/30	1 1/2 1/3	(*dédoublement*)
	Manque	1/6	
\	1/330	1/6	(multiplication-inversion)

On peut donner à cette procédure la forme plus générale suivante où nous utilisons celle que nous déduisons des *expressions de 2 à partir de 11* :

	1	$11k$	(initialisation)
	$1/k$	11	(*doublement*)
	2/3 de $1/k$	7 1/3	(table de deux-tiers)
	1/3 de $1/k$	3 2/3	(*dédoublement*)
	$1/3k$	3 2/3	(simplification)
\	$1/6k$	1 1/2 1/3	(*dédoublement*)
	Manque	1/6	
\	$1/66k$	1/6	(multiplication-inversion)

D'où

[25] Pour la division, nous avons conservé l'expression 1 1/2 1/3 déduite par *dédoublement* de 3 2/3, de préférence à 1 2/3 1/6 qui est donnée par l'Auteur pour les *expressions de 2 à partir de 11 et de 55*.

$$\frac{1}{11k} \times 2 = 2 : 11k = \frac{1}{6k} + \frac{1}{66k} \quad \text{et} \quad 2 = \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6}.$$

Mais, l'Art égyptien du calcul ne suit pas toujours cette forme générale. Par exemple, pour le nombre 77, produit des nombres premiers 7 et 11, l'Auteur donne, fort justement, une procédure généralisant celle de 7 et non pas 11. Toutefois, comme pour les « multiples de 3 », pour les nombres composés, le ressort général est la considération d'un multiplicateur de ces nombres dont le résultat est un nombre entier. Ici, on suit alors la procédure utilisée pour ce nombre.

Le cas des nombres spéciaux 35 et 91

Comme les nombres composés 55 et 77, les nombres 35 et 91 sont les produits de deux nombres premiers distincts :

$$35 = 5 \times 7 \quad et \quad 91 = 7 \times 13\,.$$

Néanmoins, les *décompositions de 2* données par l'Auteur sont distinctes de ces nombres premiers. Autrement dit, l'Auteur a procédé de manière différente de celle que nous venons d'indiquer.

Théoriquement, les expressions des doubles de quantièmes inverses de produits de deux nombres premiers impairs a et b distincts ont l'une des formes suivantes

$$\frac{1}{ab} \times 2 = \frac{1}{(ab+1):2} + \frac{1}{ab[(ab+1):2]},$$

$$\frac{1}{ab} \times 2 = \frac{1}{a[(b+1):2]} + \frac{1}{ab[(b+1):2]},$$

$$\frac{1}{ab} \times 2 = \frac{1}{b[(a+1):2]} + \frac{1}{ab[(a+1):2]},$$

$$\frac{1}{ab} \times 2 = \frac{2}{a(a+b)} + \frac{2}{b(a+b)} = \frac{1}{a \times [(a+b):2]} + \frac{1}{b \times [(a+b):2]}.$$

Par exemple, nous avons

$$\frac{2}{35} = \frac{1}{18} + \frac{1}{630} \quad \text{avec} \quad 2 = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{18},$$

$$\frac{2}{35} = \frac{1}{21} + \frac{1}{105} \quad \text{avec} \quad 2 = \left(1 + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3},$$

$$\frac{2}{35} = \frac{1}{20} + \frac{1}{140} \quad \text{avec} \quad 2 = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4},$$

$$\frac{2}{35} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42} \quad \text{avec} \quad 2 = \left(1 + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right).$$

La première expression est la *décomposition primaire* de 2/35. La seconde correspond au multiple de 5 tandis que la troisième l'est au multiple de 7. Mais c'est la dernière que nous lisons sous le calame d'Âhmès. Nous trouvons aussi cette forme pour le nombre 91, produit des nombres 7 et 13 :

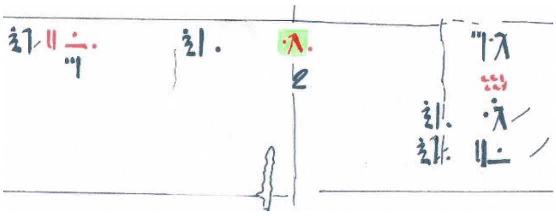
$$\frac{1}{91}\times 2=\frac{2}{7(7+13)}+\frac{2}{13(7+13)}=\frac{1}{7\times 10}+\frac{1}{13\times 10}=\frac{1}{70}+\frac{1}{130}.$$

et

$$2=\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{30}\right).$$

Cette fois, point de division plus ou moins classique avec les multiplicateurs assez ésotériques 1/30 et 1/42 pour le nombre 35 et 1/70 et 1/130 pour le nombre 91 ; Nous devons chercher ailleurs.

Pour le nombre 91, Âhmès se contente de donner une présentation abrégée où seule la marque de l'ibis noir que nous rendons par *gèm* et traduisons par « vérifie ! » est tracée deux fois, incitant l'élève à vérifier les résultats correspondants aux deux quantièmes de la décomposition. Rappelons que le scribe écrit ce signe depuis le nombre 43 pour les nombres non multiples de 3 ; le nombre 43 est aussi celui pour lequel la barrière du plus petit quantième supérieur à 1/1000 est franchie pour rejeter la *décomposition primaire*. Mais, pour le nombre 35, Âhmès est plus explicite [26]:



[Exprime 2 à partir de 35**]**

	35	**1/30**	1 1/6	**1/42**	2/3 1/6

[Calcul]

	6	7	5

	[1	35]
\	1/30	1 1/6
\	1/42	2/3 1/6

Comme ailleurs, à la première ligne, nous lisons les *expressions de 2 à partir de 35*

$$\frac{1}{35}\times 2=\frac{1}{30}+\frac{1}{42}\qquad et \qquad 2=\left(1+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right).$$

Il n'y a point de trace d'une présentation quelconque de la division de 2 par 35 mais, dans les deux dernières lignes, le scribe trace les deux traits obliques marques opérationnelles pour indiquer les sommations qui signifient, ici, celles permettant d'obtenir les deux expressions précédentes :

[26] Robbins, Shute, 1987, The Rhind Mathematical Papyrus, pl. 3.

\	1/30	1 1/6
\	1/42	2/3 1/6

La nouveauté principale concerne la deuxième ligne où le scribe, avec des couleurs différentes, écrit les nombres 6, 5 et 7 sous certains nombres de la première ligne :

35	1/30	1 1/6	1/42	2/3 1/6
6	7		5	

Il est clair que ces nombres sont ceux qui permettent d'obtenir l'*expression du double du quantième 1/35* puisque, avec les notations précédentes, nous avons :

$$a = 5 \quad , \quad b = 7 \quad , \quad (a + b) : 2 = 6\,.$$

La présence du nombre 6 et des deux facteurs de 35 peuvent nous pousser à émettre l'hypothèse de la connaissance d'une procédure que nous pouvons traduire par la formule ci-dessus. Plusieurs éléments peuvent la renforcer. Tout d'abord, les *expressions de 2 à partir de 91* qui comporte des quantièmes assez ésotériques, à savoir, 1/70 et 1/130. Ensuite, le fait que, beaucoup plus tard, le scribe égyptien qui a rédigé, en démotique, le *Papyrus 10520 du British Museum* ait transformé de manière plus explicite, en « algorithme », l'écriture laconique d'Âhmès[27] :

> *Cause that 2 make part of 35.*
> *You shall reckon 5, 7 times: result 35.*
> *You shall add 5 to 7: result 12.*
> *You shall carry 2 <to> fill 12: result 6.*
> *You shall reckon 5, 6 times: result 30. It is a first part.*
> *You shall reckon 6, 7 times: result 42. It is a first part.*
> *Causing knowing it. Viz.*
> *30 1 1/6*
> *42 5/6*

Notons que, comme l'Auteur, le scribe donne aussi les *expressions secondaires* correspondantes, cette fois 1 1/6 et la « fraction » 5/6. Enfin, une liaison possible avec la relation suivante

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)}$$

qui conduit aussi au cas particulier de la réduction de 1/7 1/42 en 1/6 que nous trouvons plusieurs fois (en R2/41, R2/53 et R2/79) dans le *Papyrus Rhind* :

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{42} = \frac{1}{6}.$$

Il va sans dire que sous cette hypothèse, la deuxième ligne ne peut être envisagée que sous la forme des données que nous devons utiliser pour appliquer la procédure. Le scribe les écrit en noir et en rouge seulement pour bien les distinguer.

[27] Parker, 1972, *Demotic Mathematical Papyri*, p. 66. Voir aussi Bruins, 1975, Contribution to the interpretation of Egyptian Mathematics, p. 27.

A contrario, nous pouvons considérer que cette ligne correspond à une vérification de l'expression lorsque, hier comme aujourd'hui, nous prenons le nombre 210 comme *référent* ou dénominateur *commun* :

$$\frac{1}{35}=\frac{6}{210}\quad,\quad\frac{1}{30}=\frac{7}{210}\quad,\quad\frac{1}{42}=\frac{5}{210}.$$

Poursuivant dans ce domaine des réductions au même dénominateur, nous pouvons considérer les *décompositions de 2* obtenues pour les nombres 35 et 91 :

$$2=\left(1+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)\quad\text{et}\quad 2=\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{30}\right).$$

Nous pouvons remarquer que 2/3 figure dans leur « deuxième partie ». Ce n'est pas un quantième ! Or, si nous examinons toutes les *décompositions de 2* que nous déduisons des expressions données par l'Auteur où figurent 2/3, nous n'en trouvons que deux qui peuvent donner lieu au découpage précité et auxquelles correspondent les décompositions de 2/35 et de 2/91. Autrement dit, nous pouvons formuler l'hypothèse de la recherche d'une *expression du double d'un quantième impair* à partir du découpage en deux parties des *décompositions de 2*, l'une des parties comportant l'entier 1 tandis que l'autre étant de la forme « deux-tiers et un ou plusieurs quantièmes ». En utilisant comme *référent commun* respectivement les nombres 6 et 10, nous avons

$$2=\left(\frac{1}{6}\times 7\right)+\left(\frac{1}{6}\times 5\right)\quad\text{et}\quad 2=\left(\frac{1}{10}\times 13\right)+\left(\frac{1}{10}\times 7\right)$$

d'où

$$\frac{1}{35}\times 2=\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{7}\right)\quad\text{et}\quad\frac{1}{91}\times 2=\left(\frac{1}{10}\times\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{10}\times\frac{1}{13}\right).$$

Avouons que cette hypothèse nous semble relever plus de la théorie que de la pratique des scribes égyptiens.

En guise de conclusion

Entre théorie et pratique, il nous semble que les *expressions de 2 à partir d'un entier* sont un bon exemple de l'Art égyptien du calcul. Les scribes égyptiens devant établir celles qui soient, à leurs yeux, les « plus simples », ils doivent faire preuve d'ingéniosité comme nous avons pu le voir lors des « multiples de trois » ou dans l'utilisation habile de diverses relations. Les cas particuliers des nombres 35 et 91 nous amènent à ne pas exclure certaines études plus mathématiques que les chercheurs d'aujourd'hui poursuivent comme le montre la conjecture de Erdös-Straus[28] qui, dans notre cadre, stipule que nous pouvons écrire le double d'un quantième impair en la somme de 2 ou 3 quantièmes pairs, conjecture qui, à notre connaissance résiste encore malgré les nombreuses tentatives qui sont menées.

[28] Mizoni, Gardes, 2012, Un point sur la conjecture d'Erdös et Straus, Villeurbanne, Université Claude-Bernard. http://math.univ-lyon1.fr/~mizony/SurErdos_Straus2.pdf

Annexe : expressions fondamentales

Dans cette annexe, nous donnons les expressions fondamentales de deux à partir d'un entier sous la forme utilisée dans nos adaptations pour écrire les expressions numériques :

entier		Décomposition de 2/n		Décomposition de 2	
5		1/3 1/15		(1 2/3) 1/3	
7		1/4 1/28		(1 1/2 1/4) 1/4	
9		1/6 1/18		(1 1/2) 1/2	
11		1/6 1/66		(1 2/3 1/6) 1/6	
13		1/8 1/52 1/104		(1 1/2 1/8) 1/4 1/8	
15		1/10 1/30		(1 1/2) 1/2	
17		1/12 1/51 1/68		(1 1/3 1/12) 1/3 1/4	
19		1/12 1/76 1/114		(1 1/2 1/12) 1/4 1/6	
21		1/14 1/42		(1 1/2) 1/2	
23		1/12 1/276		(1 2/3 1/4) 1/12	
25		1/15 1/75		(1 2/3) 1/3	
27		1/18 1/54		(1 1/2) 1/2	
29		1/24 1/58 1/174 1/232		(1 1/6 1/24) 1/2 1/6 1/8	
31		1/20 1/124 1/155		(1 1/2 1/20) 1/4 1/5	
33		1/22 1/66		(1 1/2) 1/2	
35		1/30 1/42		(1 1/6) (2/3 1/6)	
37		1/24 1/111 1/296		(1 1/2 1/24) 1/3 1/8	
39		1/26 1/78		(1 1/2) 1/2	
41		1/24 1/246 1/328		(1 2/3 1/24) 1/6 1/8	
43		1/42 1/86 1/129 1/301		(1 1/42) 1/2 1/3 1/7	
45		1/30 1/90		(1 1/2) 1/2	
47		1/30 1/141 1/470		(1 1/2 1/15) 1/3 1/10	
49		1/28 1/196		(1 1/2 1/4) 1/4	
51		1/34 1/102		(1 1/2) 1/2	
53		1/30 1/318 1/795		(1 2/3 1/10) 1/6 1/15	
55		1/30 1/330		(1 2/3 1/6) 1/6	
57		1/38 1/114		(1 1/2) 1/2	
59		1/36 1/236 1/531		(1 1/2 1/12 1/18) 1/4 1/9	
61		1/40 1/244 1/488 1/610		(1 1/2 1/40) 1/4 1/8 1/10	
63		1/42 1/126		(1 1/2) 1/2	
65		1/39 1/195		(1 2/3) 1/3	
67		1/40 1/335 1/536		(1 1/2 1/8 1/20) 1/5 1/8	
69		1/46 1/138		(1 1/2) 1/2	
71		1/40 1/568 1/710		(1 1/2 1/4 1/40) 1/8 1/10	
73		1/60 1/219 1/292 1/365		(1 1/6 1/20) 1/3 1/4 1/5	
75		1/50 1/150		(1 1/2) 1/2	
77		1/44 1/308		(1 1/2 1/4) 1/4	
79		1/60 1/237 1/316 1/790		(1 1/4 1/15) 1/3 1/4 1/10	
81		1/54 1/162		(1 1/2) 1/2	
83		1/60 1/332 1/415 1/498		(1 1/3 1/20) 1/4 1/5 1/6	
85		1/51 1/255		(1 2/3) 1/3	
87		1/58 1/174		(1 1/2) 1/2	
89		1/60 1/356 1/534 1/890		(1 1/3 1/10 1/20) 1/4 1/6 1/10	
91		1/70 1/130		(1 1/5 1/10) (2/3 1/30)	
93		1/62 1/186		(1 1/2) 1/2	
95		1/60 1/380 1/570		(1 1/2 1/12) 1/4 1/6	
97		1/56 1/679 1/776		(1 1/2 1/8 1/14 1/28) 1/7 1/8	
99		1/66 1/198		(1 1/2) 1/2	

Bibliographie

AUSTIN Daniel, GUILLEMOT Michel, 2017, Les « fractions égyptiennes », *Repères IREM* 106 (2017) 49-77.

BAILLET Jean, 1892, Le Papyrus mathématique d'Akhmîm, *Mémoires publiés par les membres de la Mission Archéologique Française au Caire*, t. 9, fasc. 1, Paris, Ernest Leroux, 1892.

BOBYNIN V. V., 1890, Sur le procédé employé dans le papyrus de Rhind pour réduire les fractions en quantièmes, *Bibliotheca Mathematica* 4 (1890) 109-112.

BRUINS Evert, 1975_2, Contribution to the interpretation of Egyptian Mathematics, *Actes du XXIX*[e] *Congrès International des Orientalistes*, Section organisée par Georges Posener, Égyptologie, Paris, L'Asiathèque, 1975, vol. 1, pp. 25-28.

CAVEING Maurice, 1977 (1982), *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*, Thèse présentée devant l'Université de Paris X le 29 octobre 1977, 3 tomes, Lille, Atelier National de Reproduction des Thèses, 1982.

CHACE Arnold et *alii*, 1927-1929, *The Rhind Mathematical Papyrus, British Museum 10057 and 10058*, 2 vol., Oberlin, Mathematical Association of America, 1927-1929.

CLAGETT Marshall, 1999, *Ancient Egyptian Science, A Source Book,* Volume Three, Ancient Egyptian Mathematics, Philadelphie, American Philosophical Society, 1999.

COLLIER Mark, QUIRK Stephen, 2004_2, *The UCL Lahun Papyri : Religious, Literary, Legal, Mathematical and Medical*, Oxford, BAR International Series 1209, 2004.

COUCHOUD Sylvia, 1983, *Recherches sur les connaissances mathématiques de l'Égypte pharaonique,* Thèse de Doctorat de Troisième cycle, Lyon, Université Lyon II, 1983.

COUCHOUD Sylvia, 1993, *Mathématiques égyptiennes,* Recherches sur les connaissances mathématiques de l'Égypte pharaonique, Paris, Éditions Le Léopard d'or, 1993.

DRESCHER James, 1948, A Coptic Calculation Manual, *Bulletin de la Société d' Archéologie Copte* 13 (1948/9) 137-160 + 4 pl. .

EISENLOHR August, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter* (Papyrus Rhind des British Museum) übersetzt und erklärt, Leipzig, J. C. Hinrichs'Buchhandlung, 1877; Vaduz, Sändig Reprint Verlag, Hans R. Wohlwend, 1999.

FOWLER David, 1987, *The Mathematics of Plato's Academy, a new reconstruction*, Oxford, Clarendon Press, 1987.

GARDES Marie-Line, MIZONI Michel, 2012, La conjecture d'Erdös-Straus : expérimentation en classe et travail du chercheur, *Repères IREM* 87 (2012) 79-80.

GRIFFITH Francis Llewellyn, 1894, The Rhind Mathematical Papyrus, *Proceedings of the Society of Biblical Archaeology* 16 (1894) 201-208, 230-248 + 2 pl. .

IMHAUSEN Annette, RITTER James, 2004, Mathematical Fragments : UC 32114B, UC 32118B, UC 32134A+B, UC 32159-UC 32162, *in* Collier, Quirk, 2004, *The UCL Lahun Papyri*, pp.71-96.

LEPSIUS Richard, 1865, *Die alt-aegyptische Elle und ihre Eintheilung*, Berlin, 1865.

MICHEL Marianne, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*, Numération, métrologie, arithmétique, géométrie et autres problèmes, Bruxelles, Éditions Safran, 2014.

MIZONI Michel, GARDES Marie-Line, 2012, Un point sur la conjecture d'Erdös et Straus, Villeurbanne, Université Claude-Bernard. http://math.univ-lyon1.fr/~mizony/SurErdos_Straus2.pdf

PARKER Richard, 1972, *Demotic Mathematical Papyri*, Providence, Brown University Press, 1972.

PEET Eric, 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus British Museum 10057 and 10058*, introduction, transcription, translation and commentary, Londres, The University Press of Liverpool, Hodder and Stougthon, 1923 ; réimp. Nendeln (Liechtenstein), Kraus Reprint, 1970.

QUIBELL James Edward, 1900 (1989), *Hierakonpolis*, Part I, with notes by W. M. F. P., Londres, 1900 ; Réimp., Londres, Histories & Mysteries of Man, 1989.

RAGAZZOLI Chloé, 2019, *Scribes, les artisans du texte en Égypte ancienne*, Paris, Les Belles Lettres, 2019.

REIMER David, 2014, *Count like an Egyptian, A hands-on introduction to ancient mathematics*, Princeton, Oxford, Princeton University Press, 2014.

REINEKE Walter-Friedrich, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* Thèse, 2 vol., Berlin, Humbolt-Universität, 1964.

ROBBINS, Frank, Egleston, 1923, A Greco-Egyptian Mathematical Papyrus, *Classical Philology* 18 (1923) 328-333.

ROBINS Gay, SHUTE Charles, 1987, *The Rhind Mathematical Papyrus, an ancient Egyptian text*, Londres, The Trustees of the British Museum, 1987, rééd., New-York, Dover, 1987.

WIELEITNER Heinrich, 1925_1, Zur ägyptischen Mathematik, *Zeitschrift für Mathematik und Naturwissenschaften Unterricht* 56 (1925) 129-137.