JA 2020 Polynômes de Taylor

Jean-Marc Duquesnoy
IREM de Lille

Professeur de mathématiques au
Lycée André Malraux de Béthune
jean-marc.duquesnoy@ac-lille.fr

Version 3.141592654 du document

Dernière mise à jour : 14 février 2020

« Il faut prendre conscience de l'apport d'autrui, d'autant plus riche que la différence avec soi-même e

Albert Jacquard

« L'éducation e

Nelson Mandela

Avant-propos :

- Le document présent a été réalisé à l'aide de logiciels libres ou gratuits, en particulier de l'éditeur TEX*maker* permettant de compiler en langage LaTeX.
- Il a été décoré de logos inclus dans le package *bclogo.sty*.
- Le package *pythontex.sty* a permis de compiler du code PYTHON (version 3.x) dans le source LaTeX.
- La librairie *sympy* permet, entre autres, dans un script PYTHON, l'utilisation du calcul symbolique. On pourra suivre ce lien .
- M'inspirant de collègues ayant eux-mêmes suivi l'exemple de Donald Knuth, l'inventeur du logiciel de composition TEX, j'ai enregistré le numéro de la i-ème version de ce document à l'aide de la i-ème décimale d'un nombre célèbre .
- Je remercie très sincèrement mes collègues Emmanuel Ostenne et Raphaël Petit,membres du groupe **ArCSin** de l'Irem de Lille, ainsi qu'AbdelKader Hmimina, collègue du Lycée André Malraux de Béthune, pour leurs relectures et leurs conseils avisés et toujours positifs.
- Les remarques et propositions toujours positives de Fabrice Eudes, membre de l'IREM, m'ont incité à insérer un script PYTHON 3.2.3 permettant au lecteur la prise en main d'une syntaxe possible pour le tracé d'une partie du graphe d'un polynôme de Taylor associé à une fonction donnée.

Table des matières

1 Quel est le problème ? pourquoi ? comment ?

1.1 Problème

Lors d'une conférence qui a eu lieu à LILLIAD de l'université de Lille en juin 2019, et que l'on peut visionner ICI, conférence donnée à l'occasion de la tenue des oraux de l'agrégation de mathématiques qui se sont déroulés au lycée Pasteur de Lille, Étienne Ghys, que l'on peut découvrir ICI, a énoncé, entre autres résultats sur les courbes osculatrices, le résultat suivant :

> **Énoncé du Théorème**
> f est une fonction de classe C^{2k+1} sur l'intervalle $[a;b]$ telle que $f^{(2k+1)}$ ne s'annule pas sur l'intervalle $[a;b]$, alors les graphes des polynômes de Taylor, d'ordre $2k$,
> $P^{2k}_{f,t}(x)$, $t \in [a;b]$, ne se rencontrent pas.
> Ce qui signifie que, pour deux valeurs t_1 et t_2 quelconques appartenant à l'intervalle $[a;b]$, les graphes des fonctions
> $x \longmapsto P^{2k}_{f,t_1}(x)$ et $x \longmapsto P^{2k}_{f,t_2}(x)$ sont disjoints.

1.2 Pourquoi ?

Le thème des polynômes de Taylor et la propriété, qui peut surprendre, exposée et démontrée lors de la conférence m'ont incité à penser un projet à réaliser avec des futurs élèves de Terminale ayant choisi la spécialité Mathématiques, dans un cadre d'approfondissement possible de la notion de dérivée d'une fonction d'une variable réelle, mais aussi de l'utilisation du langage PYTHON, en particulier de la librairie *sympy*, permettant le calcul symbolique.

1.3 Comment ?

Le projet se déroulera sur l'année de Terminale par le biais de plusieurs activités proposées, peut-être sur la base du volontariat, et suffisamment espacées dans le temps pour que les élèves participants puissent « digérer » les nouvelles notions abordées à chaque séance.
Chacune des activités sera l'occasion de consolider et ou de découvrir des notions faisant partie des programmes de la spécialité Mathématiques et Mathématiques Expert qui se trouvent ICI.

On pourra aussi consulter la page visible ICI.

Avertissement : Conscient que plusieurs méthodes employées dans quelques parties du document paraîtront hors de portée d'une grande majorité d'élèves de Terminale, je pense que la différenciation devient incontournable si l'on envisage la mise en place de ce projet sur une année scolaire.

Les plus experts en mathématiques penseront sans doute que le contenu du présent document est bien pauvre, et les collègues les plus réticents avanceront qu'il est impossible à mettre en œuvre avec des élèves de Terminale.
Mais trouver un consensus convaincant l'ensemble des lecteurs m'a paru inatteignable.
Je suis ouvert à toutes les remarques, critiques et propositions qui enrichiront le document.

N'hésitez pas

2 Polynômes de Taylor

Un peu d'histoire et d'informations ICI

Définition

Une fonction f d'une variable réelle x étant de classe C^n sur l'intervalle I, a un réel appartenant à $\overset{\circ}{I}$, on appelle **polynôme de Taylor à l'ordre** $k \leqslant n$ **en** a le polynôme suivant :

$$P_{f,a}^{k}(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

3 Squelette du projet

3.1 Activité 1 : dérivée d'ordre n d'une fonction

3.1.1 Définitions

Définition
Soit une fonction f définie sur l'intervalle I.
f est n fois dérivable sur I signifie que f admet une dérivée d'ordre n.
On appelle dérivée d'ordre n de f, notée $f^{(n)}$, la fonction définie par récurrence de la manière suivante :
$f^{(0)} = f$ et, pour tout k entier, $k \leqslant n$, $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$

Définition
Soit une fonction f définie sur l'intervalle I.

- f est de classe C^0 si f est continue sur I.
- f est de classe C^1 si f est dérivable sur I et $f^{(1)}$ est continue sur I.
- f est de classe C^n, $n \in \mathbb{N}$, si toutes les dérivées de f jusqu'à l'ordre n existent sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I.
- f est de classe C^∞ si f est de classe C^n pour tout entier naturel n.

Remarque : la plupart des fonctions usuelles traitées en Terminale sont de classe C^∞ sur leur ensemble de définition.

3.1.2 Exemple

Si $f : x \longmapsto x^3 + 2x^2 + 1$, alors, f étant une fonction polynôme, elle admet des dérivées de tous ordres, et, pour tout x réel,
$f^{(1)}(x) = f'(x) = 3x^2 + 4x$,
$f^{(2)}(x) = \left(f^{(1)}\right)'(x) = 6x + 4$,
$f^{(3)}(x) = \left(f^{(2)}\right)'(x) = 6$

3.1.3 Exercices Élèves

Dans ce qui suit, je vous propose quelques idées de questionnements et approfondissements possibles qui peuvent être écrits sous forme de **Fiche Élèves**.
Les réponses sont consultables au paragraphe 3.1.6.

1. **Exercice 1**
   Soit f la fonction définie sur I=$\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$.
   (a) Calculer les cinq premières dérivées de f sur I.
   (b) Émettre une conjecture quant à l'expression, pour tout $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, de $f^{(n)}(x)$ en fonction de n et de x.
   (c) A l'aide d'un script PYTHON, confirmer les résultats obtenus à la question précédente.
   (d) Démontrer par récurrence sur n la conjecture émise.
2. **Exercice 2**
   Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.
   (a) Après avoir justifié que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer les cinq premières dérivées successives de f.
   (b) A l'aide d'un script PYTHON, confirmer les résultats obtenus à la question précédente.
   (c) Émettre une conjecture quant à l'expression, pour tout réel x et tout entier naturel n non nul, de $f^{(n)}(x)$ en fonction de n et de x.

(d) Démontrer la conjecture émise.

(e) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1.

(f) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f^{(5)}$ au point d'abscisse 1.

3. **Exercice 3**
Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty\,;\,-1[\cup]-1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

(a) Calculer les cinq premières dérivées de f sur I.

(b) Émettre une conjecture quant à l'expression, pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, de $f^{(n)}(x)$ en fonction de n et de x.

(c) A l'aide d'un script PYTHON, confirmer les résultats et conjecture précédents.

(d) Démontrer par récurrence sur n la conjecture émise.

4. **Exercice 4**
Soit f la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$.

(a) Exprimer en fonction de $\sin x$ ou de $\cos x$
   - $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
   - $\sin\left(x + \dfrac{2\pi}{2}\right)$
   - $\sin\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right)$
   - $\sin\left(x + \dfrac{4\pi}{2}\right)$

(b) Calculer les cinq premières dérivées de f sur I.

(c) Émettre une conjecture quant à l'expression, pour tout $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, de $f^{(n)}(x)$ en fonction de n et de x.

(d) A l'aide d'un script PYTHON, confirmer les résultats et conjecture précédents.

(e) Démontrer par récurrence sur n la conjecture émise.

5. **Exercice 5**
Soient f et g deux fonctions admettant des dérivées de tous ordres sur $\mathbb{R}$.
On définit la fonction h sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) \times g(x)$.

(a) Exprimer en fonction des dérivées successives des fonctions f et g les quatre premières dérivées de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

(b) Émettre une conjecture quant à l'expression, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, de $h^{(n)}(x)$ en fonction de n, et des dérivées successives jusqu'à l'ordre n des fonctions f et g.

(c) La démonstration de la formule se fera par récurrence sur n et utilisera les formules du triangle de Pascal qui aura été découvert en amont de la séance.

Le niveau de difficulté de cet exercice est élevé, mais peut concerner des élèves qui s'orientent vers une classe préparatoire ou l'université pour des études approfondies en Mathématique.

6. **Exercice 6**
Dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f : x \in]0;\,+\infty[\longmapsto x^{n-1} \ln x$.

Cette question permet de constater que l'on peut gagner beaucoup de temps avec un script PYTHON pour trouver la formule.

Un énoncé possible :

(a) Soit (u_n) la suite définie par : $u_1 = 1$ et,
pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_{n+1} = nu_n$.

i. Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).

ii. Conjecturer, pour tout entier $n \geq 1$, une expression de u_n en fonction de n.

iii. Démontrer la formule conjecturée à la question précédente.

(b) Soit f la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par

$$f_n : x \in]0;\ +\infty[\longmapsto x^{n-1} \ln x$$

On admet que la fonction $f_n \in C^{\infty}(]0;\ +\infty[;\mathbb{R})$.

i. Démontrer par récurrence sur n que, pour tout réel $x > 0$, pour tout entier naturel $n \geq 1$, il existe un entier a_n tel que,

$$f_n^{(n)}(x) = \frac{a_n}{x}$$

ii. En utilisant la récurrence précédente et le résultat de la question **(a)(iii)**, justifier que, pour tout réel $x > 0$, pour tout entier $n \geq 1$,

$$f_n^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}$$

Une alternative utilisant un script PYTHON :
Soit f_n la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par

$$f_n : x \in]0;\ +\infty[\longmapsto x^{n-1} \ln x$$

(a) **Propriétés utiles pour la suite de l'exercice**

i. Pour tout n entier naturel non nul, pour tout x réel,on pose $g_n(x) = x^{n-1}$.
Déterminer, la dérivée n-ième de la fonction g_n sur $\mathbb{R}$.

ii. Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur l'intervalle I.
Soient α et β deux nombres réels.
Démontrer par récurrence sur n que, pour tout $x \in I$, $\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right)^{(n)} = \alpha f^{(n)}(x) + \beta g^{(n)}(x)$.

(b) i. A l'aide d'un script PYTHON, calculer et afficher $f_n^{(n)}(x)$ pour les dix premiers entiers naturels non nuls.

ii. Émettre une conjecture quant à l'expression de $f_n^{(n)}(x)$ en fonction de x et de n.

iii. Démontrer par récurrence sur n la conjecture émise à la question précédente.

3.1.4 Avec PYTHON ? C'est sympy !

La librairie *sympy* permet le calcul symbolique.
Voici quelques exemples d'utilisation qui donnent des éléments de réponse à l'**Exercice 1** :

Un script PYTHON

```
from math import*
from sympy import*
# on a appelé les librairies math et sympy
# on déclare x comme variable symbolique
x=Symbol('x')
```

```
# on déclare la fonction exponentielle de 2x
def f(x):
    return exp(2*x)
# on demande de calculer et d'afficher les 5 premières dérivées successives de la fonction f
for i in range(5):
    print(diff(f(x),x,i),"\n")
```

Ce qui donne en console :
exp(2*x)
2*exp(2*x)
4*exp(2*x)
8*exp(2*x)
16*exp(2*x)
Comment donner une valeur à la variable symbolique x ?
En procédant comme ci-dessous :

Un script PYTHON

```
from math import*
from sympy import*
x=Symbol('x')
def f(x):
    return exp(2*x)
# on demande de calculer et d'afficher f(6)
print("f(6)= ",f(x).subs(x,6))
```

Ce qui donne en console :
f(6)= exp(12)

3.1.5 Des pistes utilisant des scripts PYTHON

Dans ce qui suit, seront proposés des scripts qui mettent en scène les différents exercices proposés aux élèves.

1. **Exercice 1** Voir plus haut.
2. **Exercice 2**

   Un script PYTHON

```
from math import*
from sympy import*
x=Symbol('x')
def f(x):
    return x*exp(x)
for i in range(5):
    print(factor(diff(f(x),x,i)),"\n")
print("y=",diff(f(x),x).subs(x,1),"x+", f(x).subs(x,1)-diff(f(x),x).subs(x,1))
print("y=",diff(f(x),x,6).subs(x,1),"x+",
 diff(f(x),x,5).subs(x,1)-diff(f(x),x,6).subs(x,1))
```

Ce qui donne en sortie après exécution du script :
x*exp(x)
(x + 1)*exp(x)
(x + 2)*exp(x)
(x + 3)*exp(x)
(x + 4)*exp(x)
y= 2*E x+ -E

y= 7*E x+ -E

pour les profs !!

L'affichage n'est pas terrible, j'intègre donc, à l'aide du package *pythontex.sty*, mon code PYTHON dans mon source LaTeX.

Par exemple, la première ligne est le résultat de la compilation du code suivant :

```
$$f^{(1)}(x)=f'(x)= \py{latex(factor(diff(f(x),x)))}$$
```

Cela donne après compilation :

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = (x+1)\,e^x$$
$$f^{(2)}(x) = (x+2)\,e^x$$
$$f^{(3)}(x) = (x+3)\,e^x$$
$$f^{(4)}(x) = (x+4)\,e^x$$
$$f^{(5)}(x) = (x+5)\,e^x$$

La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1 a pour équation :

$$y = 2e(x-1)+e$$

ou

le code LaTeX :

```
$$y=\py{latex(expand(diff(f(x),x).subs(x,1)*(x-1)+f(x).subs(x,1)))}$$
```

qui affiche en sortie après compilation :

$$y = 2ex - e$$

La tangente à la courbe représentative de la fonction $f^{(5)}$ au point d'abscisse 1 a pour équation :

$$y = 7e(x-1)+6e$$

ou

$$y = 7ex - e$$

3. **Exercice 3**

Un script PYTHON

```python
from math import*
from sympy import*
x=Symbol('x')
def f(x):
    return 1/(x+1)
for i in range(5):
    print(factor(diff(f(x),x,i)),"\n")
```

qui affiche ce qui suit à l'exécution :

1/(x + 1)

-1/(x + 1)**2

2/(x + 1)**3

-6/(x + 1)**4

24/(x + 1)**5

4. **Exercice 4**

   On a conjecturé, ou on veut valider la conjecture :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Un script PYTHON

```
from math import*
from sympy import*
x=Symbol('x')
def f(x):
    return sin(x)
for i in range(5):
    print(factor(diff(f(x),x,i)),"=",sin(x+i*pi/2),"?","\n")
```

qui affiche ce qui suit à l'exécution :

sin(x) = sin(x) ?

cos(x) = cos(x) ?

-sin(x) = -sin(x) ?

-cos(x) = -cos(x) ?

sin(x) = sin(x) ?

On pourrait aussi tester la validité de la formule à l'aide de booléens :

Un script PYTHON

```
from math import*
from sympy import*
x=Symbol('x')
def f(x):
    return sin(x)
for i in range(5):
    print(diff(f(x),x,i)==sin(x+i*pi/2),"\n")
```

qui affiche ce qui suit à l'exécution :

True

True

True

True

True

5. **Exercice 6**

Un script PYTHON

```
from math import*
from sympy import*
x=Symbol('x')
def f(x,i):
    return x**(i-1)*log(x)
for i in range(2,10):
    print(diff(f(x,i),x,i),"\n")
```

qui affiche ce qui suit à l'exécution :

1/x

2/x

6/x
24/x
120/x
720/x
5040/x
40320/x

3.1.6 Des éléments de réponses aux exercices

1. **Exercice 1**
   Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, pour tout entier naturel n,
   $$f^{(n)}(x) = 2^n \mathrm{e}^{2x}$$

2. **Exercice 2**
   Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, pour tout entier naturel n,
   $$f^{(n)}(x) = (x+n)\mathrm{e}^x$$

3. **Exercice 3**
   Pour tout réel x appartenant à l'intervalle I, pour tout entier naturel n non nul,
   $$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n (n-1)!}{(x+1)^{n+1}}$$

4. **Exercice 4**
   Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, pour tout entier naturel n,
   $$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

5. **Exercice 5**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$
   d'où
   $(fg)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)g(x) + \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x) g^{(1)}(x) + \cdots + \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) + \cdots + f g^{(n)}(x)$

   Démonstration par récurrence
   Posons $P(n) : (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$
   Initialisation : montrons que $P(0)$ est vraie.
   $(fg)^{(0)} = fg = \binom{0}{0} f^{(0)} g^{(0)}$
   donc $P(0)$ est vraie.
   Hérédité : supposons que, pour un entier naturel n donné, $P(n)$ vraie.
   A-t-on alors $P(n+1)$ vraie ?
   On remarque que $(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)^{(1)}$.

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}\right)^{(1)} && (1)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(n-k)}g^{(k)}\right)^{(1)} && (2)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(n-k+1)}g^{(k)}+f^{(n-k)}g^{(k+1)}\right) && (3)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k+1)}g^{(k)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k+1)} && (4)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n+1-k)}g^{(k)}+\sum_{K=1}^{n+1}\binom{n}{K-1}f^{(n-(K-1))}g^{((K-1)+1)} \quad \text{(on a posé } K=k+1) && (5)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n+1-k)}g^{(k)}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}f^{(n-(k-1))}g^{((k-1)+1)} \quad \text{(on a posé } k=K) && (6)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n+1-k)}g^{(k)}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}f^{(n+1-k)}g^{(k)} && (7)\\
&= \binom{n}{0}f^{(n+1)}f^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(n+1-k}g^{(k)}+\binom{n}{n}f^{(0)}g^{(n+1)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}f^{(n+1-k)}g^{(k)} && (8)
\end{aligned}
$$

or $\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}$ et $\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}$ dans (8), d'où

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \binom{n+1}{0}f^{(n+1)}f^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(n+1-k)}g^{(k)}+\binom{n+1}{n+1}f^{(0)}g^{(n+1)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}f^{(n+1-k)}g^{(k)} && (9)\\
&= \binom{n+1}{0}f^{(n+1)}g^{(0)}+\binom{n+1}{n+1}f^{(0)}g^{(n+1)}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)f^{(n+1-k)}g^{(k)} && (10)
\end{aligned}
$$

or, le triangle de Pascal donne $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$ dans (10) .

D'où

$$
(fg)^{(n+1)} = \binom{n+1}{0}f^{(n+1)}g^{(0)}+\binom{n+1}{n+1}f^{(0)}g^{(n+1)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}g^{(k)} \qquad (11)
$$

et en conclusion :

$$
(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}g^{(k)} \qquad (12)
$$

On déduit alors que, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(0)$ est vraie et, pour tout n entier, $P(n)$ vraie $\Rightarrow P(n+1)$ vraie.

Donc, pour tout n entier, $P(n)$ est vraie, d'où la formule de Leibniz.

6. **Exercice 6**

   La première version me paraît plus difficile.

   Par contre, la deuxième version, le script PYTHON ayant été compilé, permet relativement facilement de conjecturer la formule $(*)$:

   Pour tout x réel strictement positif, pour tout entier naturel n non nul,

$$
(*)\quad f_n^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}
$$

3.2 Activité 2 : Polynôme de Taylor d'ordre n de f en a

3.2.1 Définition

Voir la définition donnée au paragraphe 2 .

3.2.2 Exemples

Dans ce paragraphe, nous allons, dans un premier temps déterminer, pour une fonction f donnée de classe $C^n(I;\mathbb{R})$, les polynômes de Taylor en un réel a fixé, aux ordres k =0, 1, 2, 3, etc....., $k \leqslant n$.
Puis, nous constaterons graphiquement ce qu'il se passe lorsque l'ordre k est de plus en plus grand.
La section qui suit traitera le problème à l'aide de scripts PYTHON.

1. Si f est une fonction polynôme.
2. Si g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x$.
3. Si h est la fonction définie sur $]1;\ +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$.
4. Si k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \sin x$.

3.2.3 Et en PYTHON, ça donne quoi ?

Calculs :

J'ai testé la « bête » .
Voilà ce que cela peut donner :

Je définis la fonction **PolynomeTaylor**, dont les arguments sont la fonction f, le réel a en lequel on détermine le polynôme, et l'ordre n.

Un script PYTHON

```
from math import*
from sympy import*
x=Symbol('x')
def g(x):
    return exp(x)
def factoriel(n):
    facto=1
    for i in range(2,n+1):
        facto=facto*i
    return(facto)
def PolynomeTaylor(f,a,n):
    P=0
    for i in range(n+1):
        P=P+diff(f(x),x,i).subs(x,a)*(x-a)**i/factoriel(i)
    return(P)
```

1. Soit la fonction polynomiale $f : x \longmapsto x^4 + 6x^2 - 2x + 3$.
   Les polynômes de Taylor de f d'ordre 3 en 0, puis en 1 sont respectivement
   (merci *pythontex*) :

   $$P^3_{f,0}(x) = 6x^2 - 2x + 3$$

   et

   $$P^3_{f,1}(x) = 14x + 4(x-1)^3 + 12(x-1)^2 - 6$$

   Les polynômes de Taylor de f d'ordre 4 et 5 en 0 sont respectivement :

   $$P^4_{f,0}(x) = x^4 + 6x^2 - 2x + 3$$

   et

   $$P^5_{f,0}(x) = x^4 + 6x^2 - 2x + 3$$

2. Soit la fonction $g : x \longmapsto e^x$, les polynômes de Taylor de g d'ordre 6 en 0, puis en 1 sont respectivement :

$$P_{g,0}^{6}(x) = \frac{x^6}{720} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

et

$$P_{g,1}^{6}(x) = \frac{e\,(x-1)^6}{720} + \frac{e\,(x-1)^5}{120} + \frac{e\,(x-1)^4}{24} + \frac{e\,(x-1)^3}{6} + \frac{e\,(x-1)^2}{2} + e\,(x-1) + e$$

3. $$P_{h,0}^{8}(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

où

$$h : x \in]1;+\infty[\longmapsto \frac{1}{1-x}$$

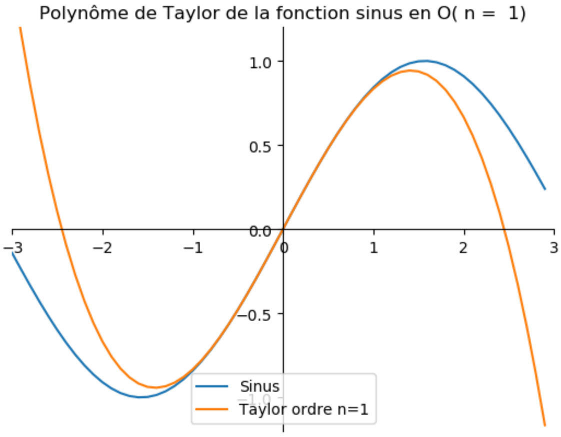
4. Qu'obtient-on avec la fonction Sinus au voisinage de 0 ?

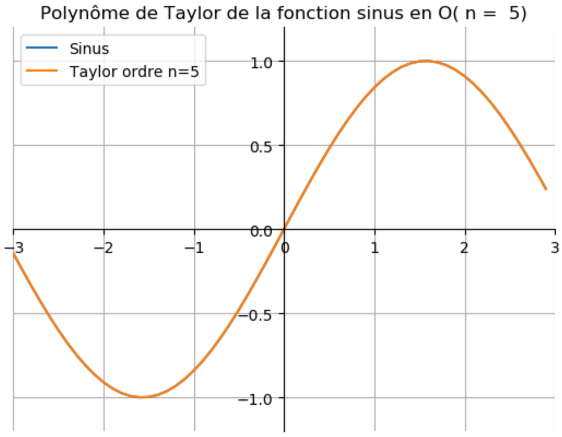
$$P_{k,0}^{8}(x) = -\frac{x^7}{5040} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x$$

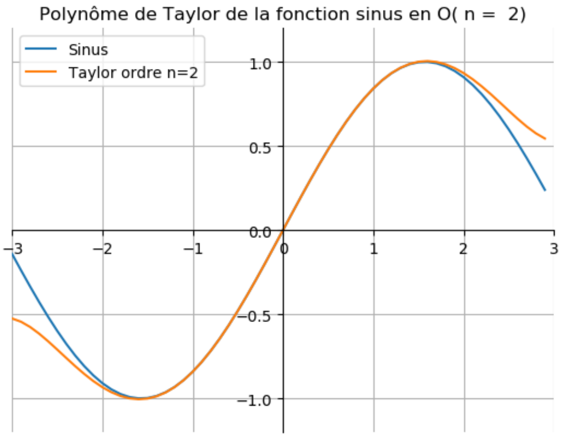
Tracés :

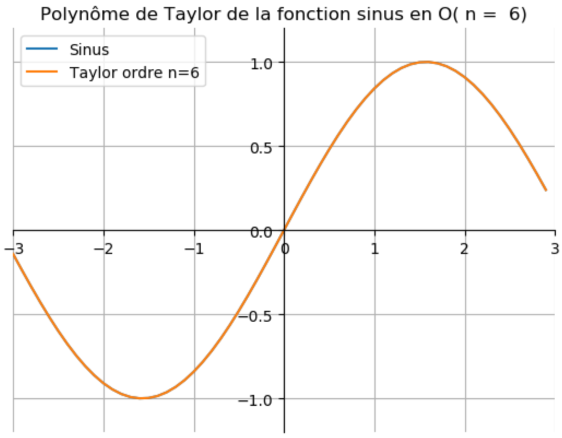
Je trace ci-après les polynômes de Taylor à l'ordre $n = 1, \ldots.., 8$ de la fonction Sinus au voisinage de 0.

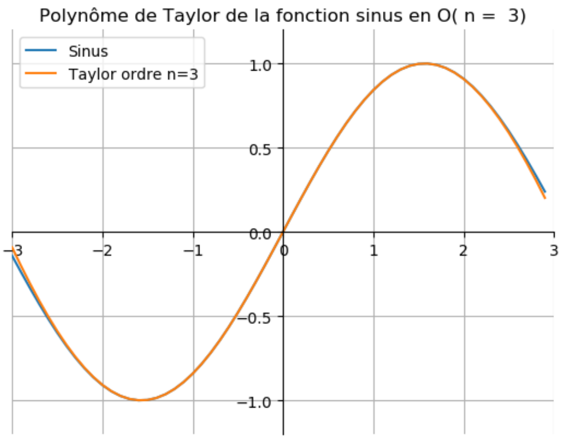
Voici ce que cela donne :

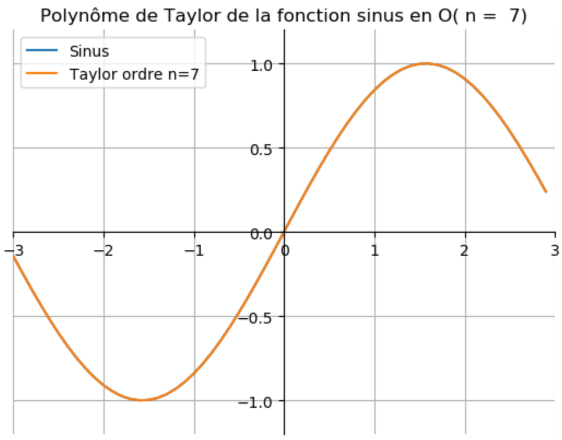


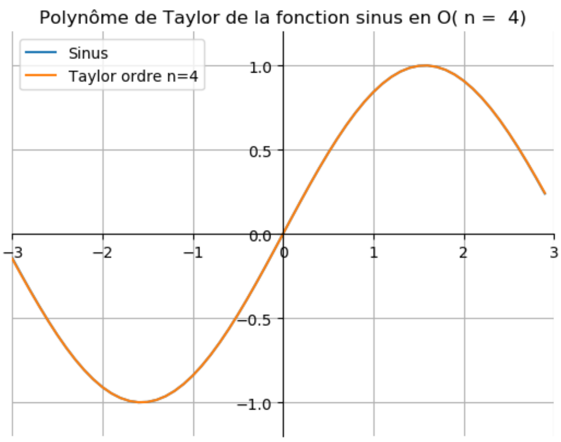


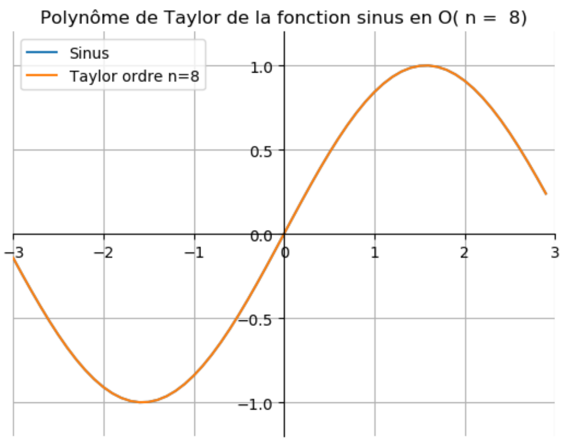












𝄞 Deux scripts PYTHON possibles, à faire évoluer, mais qui permettent le tracé 𝄞

```
from math import*
from sympy import*
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

x=Symbol("x")
xmin = -3.0
xmax =  3.0
def PolynomeTaylor(f,a,n):
    P=0
    for i in range(n+1):
        P=P+diff(f(x),x,i).subs(x,a)*(x-a)**i/factorial(i)
    return(P)
def f(x):
    return(sin(x))
xx = np.arange(xmin,xmax,0.1)
yy = np.sin(xx)
plt.plot(xx,yy,label="Sinus")

plt.grid()
plt.xlim(xmin,xmax)
plt.ylim(-1.2,1.2)
y = PolynomeTaylor(f,0,3)
Y=[]
X=[]
t=np.arange(xmin,xmax,0.1)
for i in t:
    X.append(i)
    Y.append(y.subs(x,i))
plt.plot(X,Y)
plt.savefig("Taylor_sinus.png")
```

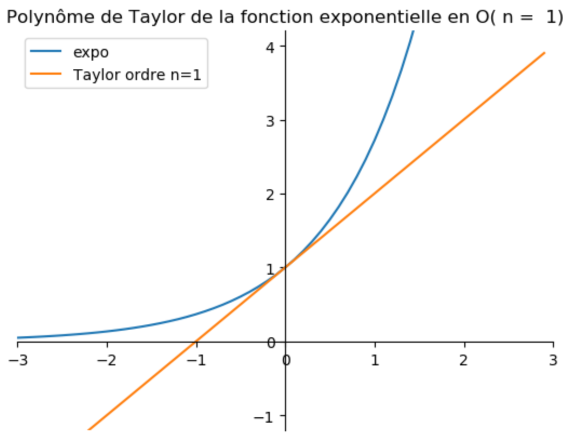
ou bien

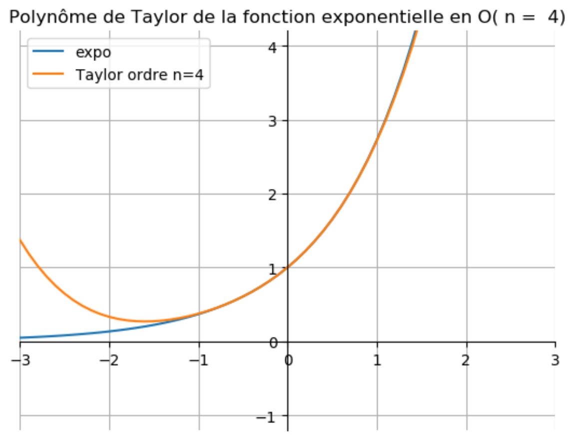
```
x = symbols('x')

def factoriel(n):
    facto=1
    for i in range(2,n+1):
        facto=facto*i
    return(facto)

def PolynomeTaylor(f,a,n):
    P=0
    for i in range(n+1):
        P=P+diff(f(x),x,i).subs(x,a)*(x-a)**i/factoriel(i)
    return(P)

def g(x):
    return exp(x)

# Ordre du polynôme
k = 4

# Liste de polynômes de Taylor en différentes abscisses
p=[PolynomeTaylor(g,t,k) for t in range(-2,2)]

# Tracé
a = np.linspace(-3, 3, 100)
for k in range(len(p)):
    b=[p[k].subs(x,t) for t in a]
    plt.plot(a,b)
    plt.show()
```

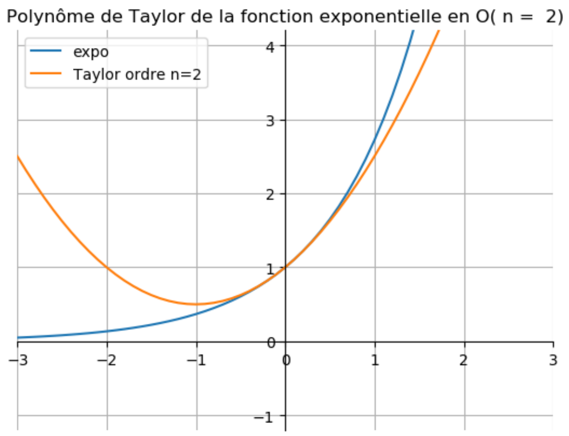
3.3 Activité 3 : Polynôme de Taylor d'ordre n de la fonction exponentielle

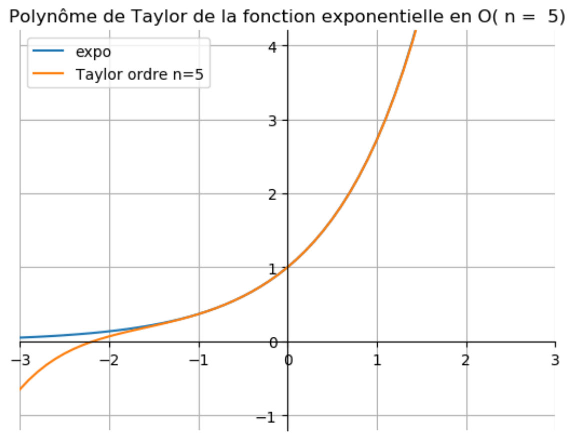
3.3.1 Exemples

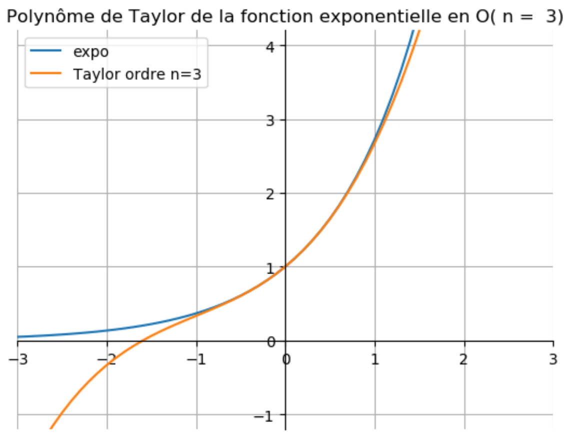
Voici ce que cela donne, l'ordre variant de 1 à 10 :

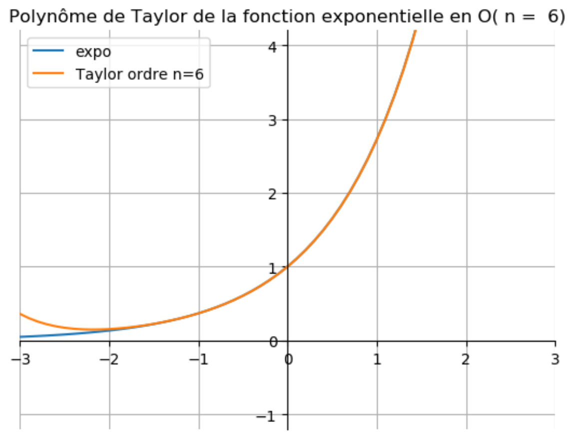


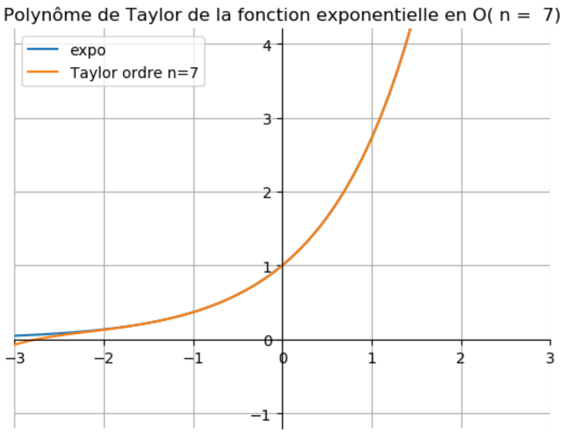


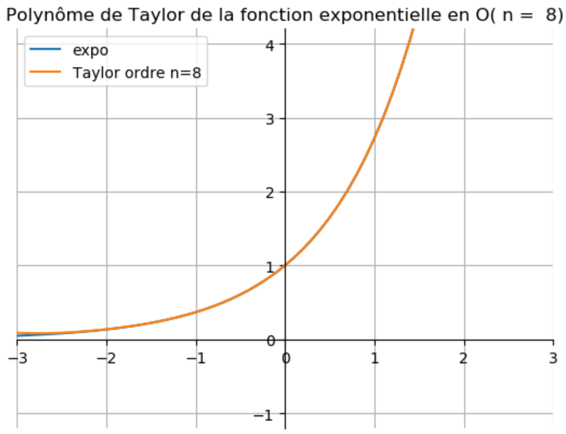












On pourra faire remarquer aux élèves que l'idée d'approximation polynomiale d'une fonction prend tout son sens ici, que l'approximation est locale, et que cette erreur d'approximation dépend de l'ordre du polynôme de Taylor.

L'évaluation de l'erreur d'approximation n'entre pas dans le cadre de ce document.
Les élèves auront tout le loisir, s'ils choisissent d'étudier les Mathématiques dans l'enseignement supérieur, de découvrir la théorie associée......

3.3.2 Position relative des graphes pour deux valeurs de a

On en vient maintenant à l'étude des positions relatives des graphes des polynômes de Taylor en différents points.
Choisissons $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ et $a = -2$.
Les polynômes de Taylor à l'ordre 4 [1] sont respectivement :

$$P^4_{exp,0}(x) = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

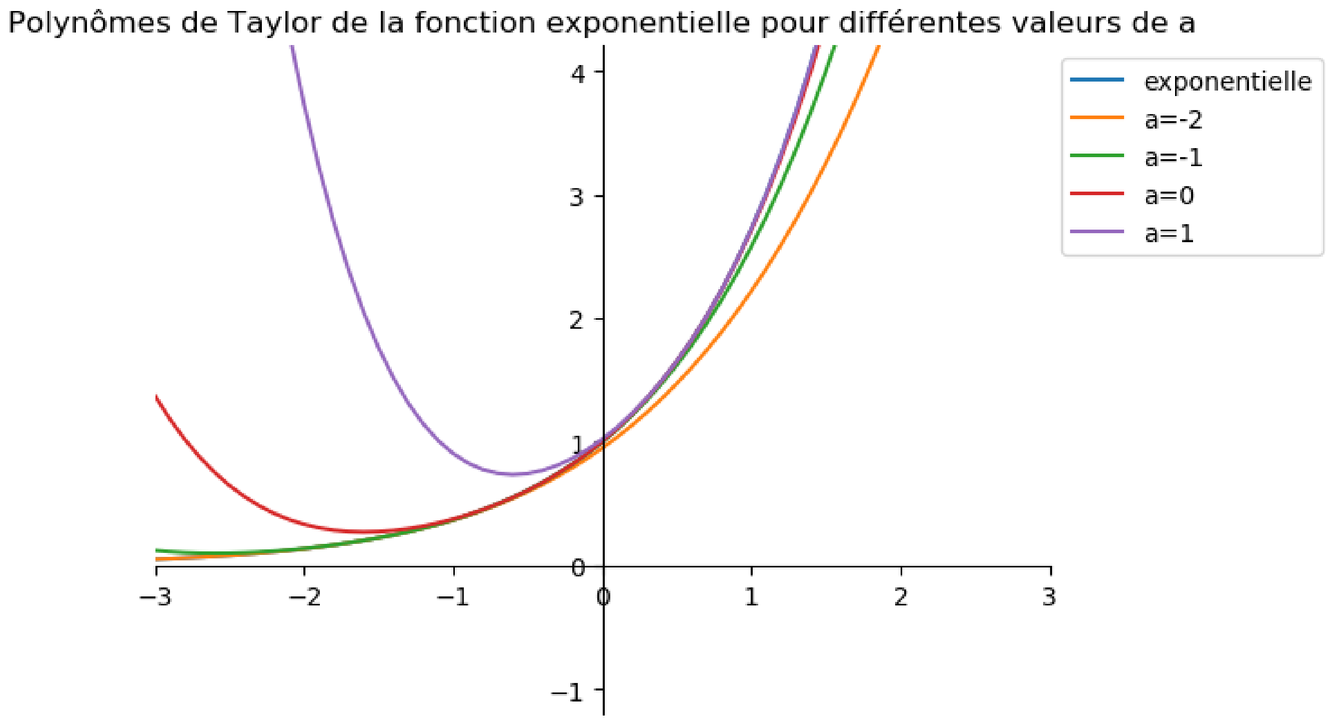
$$P^4_{exp,1}(x) = \frac{e(x-1)^4}{24} + \frac{e(x-1)^3}{6} + \frac{e(x-1)^2}{2} + e(x-1) + e$$

$$P^4_{exp,-1}(x) = \frac{(x+1)^4}{24e} + \frac{(x+1)^3}{6e} + \frac{(x+1)^2}{2e} + \frac{x+1}{e} + e^{-1}$$

$$P^4_{exp,-2}(x) = \frac{(x+2)^4}{24e^2} + \frac{(x+2)^3}{6e^2} + \frac{(x+2)^2}{2e^2} + \frac{x+2}{e^2} + e^{-2}$$

Les graphes associés superposés :

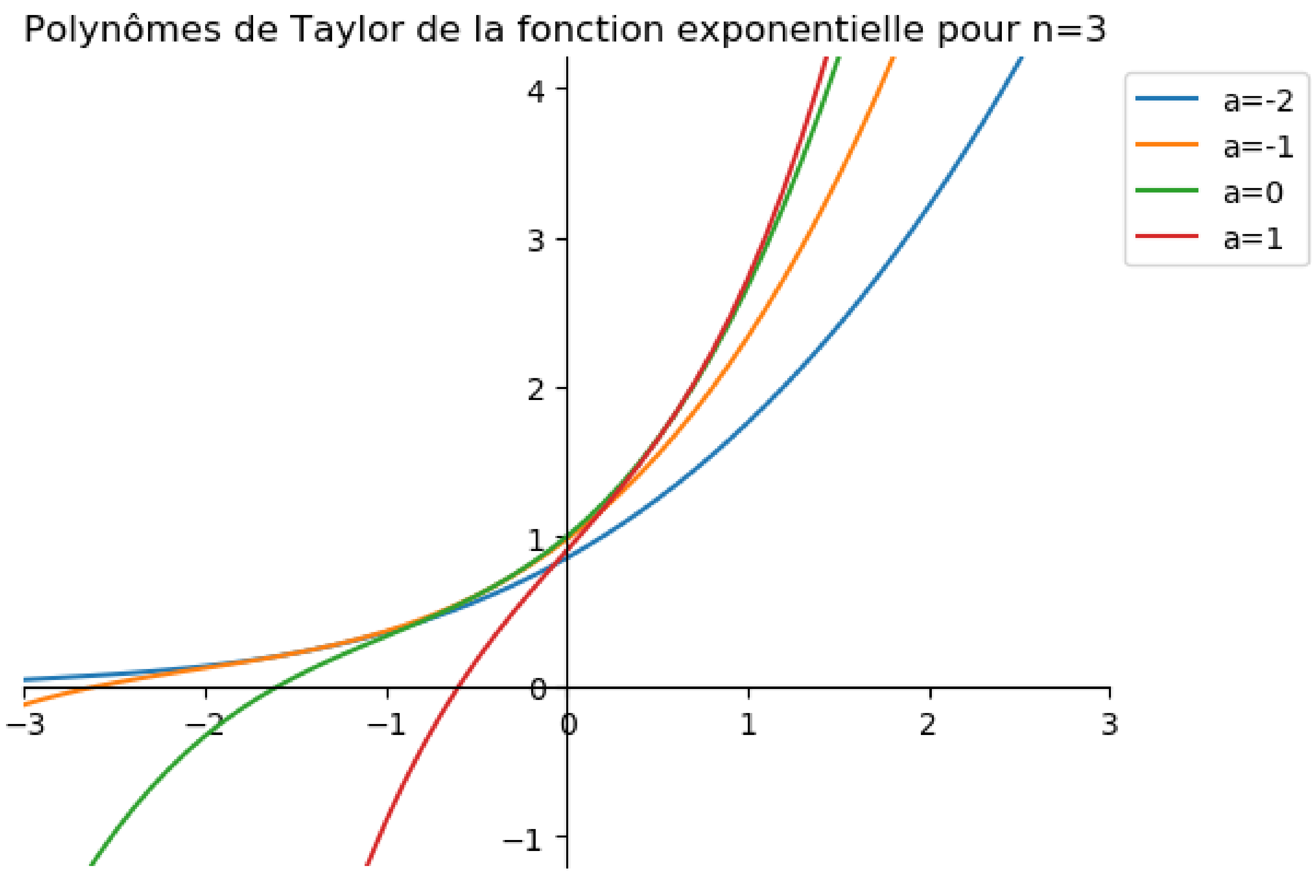
1. On prend soin de choisir un ordre pair.



3.3.3 Conjecture de la propriété énoncée

Après avoir choisi plusieurs valeurs de a, on fait remarquer aux élèves que les graphes ne se rencontrent pas.

Et si on fixe un ordre impair ?
Voilà ce qu'il se passe graphiquement :



Effectivement, les graphes se rencontrent.
La dernière partie prend maintenant tout son sens : il va falloir valider la conjecture……

3.4 Activité 4 : Cas général

3.4.1 Énoncés des propriétés utiles pour la démonstration du Théorème

Remarque : Dans tout ce qui suit, définir l'intervalle $[a;b]$ suppose implicitement que $a < b$.

Prérequis utiles pour la démonstration :

1. x est un réel fixé. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = (x-t)^n$.
   Après avoir justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, exprimer $f'(t)$ en fonction de x, n et t.
2. Soit f une fonction continue et qui ne s'annule pas sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.
   Démontrer que la fonction f est, ou bien strictement positive, ou bien strictement négative sur $[a\,;\,b]$.
3. Soit f une fonction continue et strictement positive sur l'intervalle $]a\,;\,b]$ vérifiant $f(a) = 0$.
   (a) Justifier que la fonction $F : x \in [a\,;\,b] \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est strictement croissante sur $[a\,;\,b]$.
   (b) Déduire de ce qui précède que $F(b) > 0$.
   (c) Justifier alors l'affirmation suivante :
   l'intégrale d'une fonction continue et strictement positive sur l'intervalle $]a\,;\,b]$ et vérifiant $f(a) = 0$, est strictement positive.

3.4.2 Questionnement permettant une démonstration du théorème

Je suis conscient que l'on aborde maintenant la partie la plus difficile à digérer pour un élève de Terminale .

Outils permettant la démonstration du théorème

Soit f une fonction appartenant à $C^{(2n+1)}([a\,;\,b], \mathbb{R})$, telle que, pour tout réel $t \in [a\,;\,b]$,

$$f^{(2n+1)}(t) \neq 0$$

Rappel :

$$P^k_{f,t}(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i$$

1. Démontrer que, pour tout réel x et pour tout réel $t \in [a;\, b]$,

$$\frac{\mathrm{d}P^{2n}_{f,t}(x)}{\mathrm{d}t} = \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} f^{(2n+1)}(t)$$

2. Déduire de ce qui précède une primitive de la fonction $t \in [a\,;\,b] \longmapsto \dfrac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} f^{(2n+1)}(t)$.
3. Exprimer, pour tous $t_1 \in [a\,;\,b]$ et $t_2 \in [a\,;\,b]$, avec $t_1 < t_2$,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} f^{(2n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

4. Justifier que, pour tout réel $t \in [a\,;\,b]$,
   - ou bien $f^{(2n+1)}(t) > 0$
   - ou bien $f^{(2n+1)}(t) < 0$
5. Déduire des questions précédentes que, pour tous réels t_1 et t_2, $t_1 \neq t_2$, appartenant à l'intervalle $[a\,;\,b]$, pour tout réel x,

$$P^k_{f,t_1}(x) \neq P^k_{f,t_2}(x)$$

6. Que peut-on en déduire quant aux graphes des polynômes de Taylor de la fonction f, d'ordre $2n$, en deux valeurs de t distinctes appartenant à l'intervalle $[a\,;\,b]$?

4 Démonstration du théorème

4.1 Prérequis utiles pour la démonstration

1. Si $n = 0$, pour tout réel x, pour tout réel t, $(x-t)^0 = 1$, ce qui permet de conclure que la dérivée de la fonction $t \longmapsto (x-t)^0$ est la fonction nulle.
   Si $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée de la fonction $t \longmapsto (x-t)^n$ est la fonction $t \longmapsto -n(x-t)^{n-1}$.
2. Soit f une fonction continue et qui ne s'annule pas sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.
   Raisonnons par l'absurde.
   Supposons que la fonction f ne soit pas de signe constant sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.
   Alors il existe un réel t et un réel t' appartenant à l'intervalle $[a\,;\,b]$ tels que $f(t) \times f(t') < 0$.
   Mais, la fonction f étant continue sur $[a\,;\,b]$, elle s'annule au moins une fois entre t et t', d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
   Ce qui contredit l'hypothèse que la fonction f ne s'annule pas sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.
   Conclusion : f est , ou bien strictement positive, ou bien strictement négative sur $[a\,;\,b]$.
3. Soit f une fonction continue et strictement positive sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.
   Le programme nous dit que la fonction $F : x \in [a\,;\,b] \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de la fonction f qui s'annule en a.
   Donc la fonction F a pour dérivée la fonction f sur l'intervalle [a ; b].
   Or f est strictement positive sur l'intervalle $]a\,;\,b]$ et $f(a) = 0$.
   La fonction F' est donc nulle en a et strictement positive sur l'intervalle $]a\,;\,b]$.
   On peut en déduire que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.
   Or $b > a$, donc $F(b) > F(a)$, autrement dit $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.
   D'où le résultat :
   (1) l'intégrale d'une fonction continue et strictement positive sur l'intervalle $]a\,;\,b]$, vérifiant $f(a) = 0$, est strictement positive.
   Il va de soit, de fait, que :
   (2) l'intégrale d'une fonction continue et strictement positive sur l'intervalle $]a\,;\,b]$ est strictement positive.

4.2 Démonstration du théorème

Montrons, dans un premier temps, que pour tout réel x et pour tout réel $t \in [a;\,b]$,

$$\frac{\mathrm{d}P_{f,t}^{2n}(x)}{\mathrm{d}t} = \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} f^{(2n+1)}(t)$$

$\boxed{x \text{ est un réel fixé}}$

Nous allons dériver par rapport à la variable t la fonction polynomiale en t $P_{f,t}^{2n}(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{2n} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i$.

On obtient :

$$\frac{\mathrm{d}P_{f,t}^{2n}(x)}{\mathrm{d}t} = \left(\sum_{i=0}^{2n} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i\right)'$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}P_{f,t}^{2n}(x)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=0}^{2n} \left(\frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i\right)'$$

Pour chaque i entier variant entre 1 et $2n$, on a :

$$\left(\frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i\right)' = \left(\frac{f^{(i)}(t)}{i!}\right)'(x-t)^i + \left(\frac{f^{(i)}(t)}{i!}\right)\left((x-t)^i\right)'$$

d'où
$$\left(\frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i\right)' = \left(\frac{f^{(i+1)}(t)}{i!}\right)(x-t)^i + \left(\frac{f^{(i)}(t)}{i!}\right) \times (-i) \times (x-t)^{i-1}$$
d'où
$$\left(\frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i\right)' = \left(\frac{f^{(i+1)}(t)}{i!}\right)(x-t)^i - \left(\frac{f^{(i)}(t)}{(i-1)!}\right) \times (x-t)^{i-1}$$
d'où, en dérivant à part le produit $\frac{f^{(0)}(t)}{0!}(x-t)^0$, et en ajoutant la dérivée de la somme de 1 à $2n$, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}P_{f,t}^{2n}(x)}{\mathrm{d}t} = \frac{f^{(1)}(t)}{0!} \times (x-t)^0 - \frac{f^{(0)}(t)}{0!} \times 0 + \sum_{i=1}^{2n}\left[\left(\frac{f^{(i+1)}(t)}{i!}\right)(x-t)^i - \left(\frac{f^{(i)}(t)}{(i-1)!}\right) \times (x-t)^{i-1}\right]$$

d'où, par télescopage :
$$\frac{\mathrm{d}P_{f,t}^{2n}(x)}{\mathrm{d}t} = \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} f^{(2n+1)}(t)$$
On en déduit que la fonction $t \longmapsto \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} f^{(2n+1)}(t)$ a pour primitive la fonction $t \longmapsto P_{f,t}^{2n}(x)$.
Prenons deux réels t_1 et t_2 appartenant à l'intervalle $[a\,;\,b]$.
On a alors :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} f^{(2n+1)}(t)\mathrm{d}t = P_{f,t_1}^{2n}(x) - P_{f,t_2}^{2n}(x)$$

Or, par hypothèse, la dérivée $2n+1$-ième de f ne s'annulant pas sur l'intervalle $[a;b]$, elle y est, ou bien strictement positive, ou bien strictement négative.
On note Φ la fonction $t \longmapsto \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} f^{(2n+1)}(t)$.
La fonction Φ vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- dans le cas où $x \in [t_1\,;\,t_2]$, Φ est continue et strictement positive sur $[t_1\,;\,t_2]$ privé de x et nulle en $t = x$, on utilise alors la propriété (1) (voir 3) ,
- sinon, dans le cas où $x \notin [t_1\,;\,t_2]$, Φ est continue et strictement positive sur $[t_1\,;\,t_2]$, et on utilise la propriété (2) (voir 3).

Dans les deux cas, on en déduit que $\int_{t_1}^{t_2} \Phi(t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} f^{(2n+1)}(t)\mathrm{d}t$ est, ou bien strictement positive, ou bien strictement négative, et donc qu'elle n'est jamais nulle.
Conclusion : Pour tous réels t_1 et t_2 appartenant à l'intervalle $[a;b]$, pour tout réel x,

$$P_{f,t_1}^{2n}(x) - P_{f,t_2}^{2n}(x) \neq 0$$

Cela termine la démonstration du théorème.