

Journées académiques de l'IREM de Lille

Duplication du cube

Laurence Le Foll - Fabrice Eudes - Jean-Marc Duquesnoy

IREM de Lille-Groupe ArCSiN

Version 25 mars 2025

Objectifs

Journées
académiques de
l'IREM de Lille

Objectifs de
l'atelier

Historique

Construction à la
règle et au
compas

Activités
proposées

Les objectifs de cet atelier seront, entre autres, de :

- de découvrir plusieurs approches historiques du problème de **duplication du cube**, sans pour autant dresser une liste exhaustive des méthodes géométriques permettant de construire la racine cubique de deux.

Objectifs

Journées
académiques de
l'IREM de Lille

Objectifs de
l'atelier

Historique

Construction à la
règle et au
compas

Activités
proposées

Les objectifs de cet atelier seront, entre autres, de :

- de découvrir plusieurs approches historiques du problème de **duplication du cube**, sans pour autant dresser une liste exhaustive des méthodes géométriques permettant de construire la racine cubique de deux.
- de répondre, sans pour autant en donner une démonstration qui sortirait largement du cadre fixé par le document, à la question suivante : savoir :
« La racine cubique de deux est-elle constructible à la règle et au compas ? »

Objectifs

Journées
académiques de
l'IREM de Lille

Objectifs de
l'atelier

Historique

Construction à la
règle et au
compas

Activités
proposées

Les objectifs de cet atelier seront, entre autres, de :

- de découvrir plusieurs approches historiques du problème de **duplication du cube**, sans pour autant dresser une liste exhaustive des méthodes géométriques permettant de construire la racine cubique de deux.
- de répondre, sans pour autant en donner une démonstration qui sortirait largement du cadre fixé par le document, à la question suivante : savoir :
« La racine cubique de deux est-elle constructible à la règle et au compas ? »
- de proposer différentes activités géométriques, analytiques ou algorithmiques figurant aux programmes de Mathématiques des différents niveaux du cycle secondaire.

Origines Historiques

Journées
académiques de
l'IREM de Lille

Objectifs de
l'atelier

Historique

Construction à la
règle et au
compas

Activités
proposées

- La duplication du cube est l'un des trois principaux problèmes non résolus des mathématiques grecques.

Origines Historiques

Journées
académiques de
l'IREM de Lille

Objectifs de
l'atelier

Historique

Construction à la
règle et au
compas

Activités
proposées

- La duplication du cube est l'un des trois principaux problèmes non résolus des mathématiques grecques.
- Les deux autres étant la quadrature du cercle et la trisection d'un angle.

Origines Historiques

Journées
académiques de
l'IREM de Lille

Objectifs de
l'atelier

Historique

Construction à la
règle et au
compas

Activités
proposées

- La duplication du cube est l'un des trois principaux problèmes non résolus des mathématiques grecques.
- Les deux autres étant la quadrature du cercle et la trisection d'un angle.
- Le problème de la **duplication du cube** a été posé au moins cinq siècles avant J-C, il n'a été vraiment résolu qu'au XIXe siècle.

Ératosthène au roi Ptolémée

Journées
académiques de
l'IREM de Lille

Objectifs de
l'atelier

Historique

Construction à la
règle et au
compas

Activités
proposées

- On raconte qu'un ancien auteur tragique met en scène *Minos* faisant préparer une tombe pour *Glaucon*. Ayant appris que de chaque côté, elle avait cent pieds, il dit :
« Tu as désigné certes un petit enclos pour la tombe d'un roi ; qu'il soit double ; sans détruire ses belles proportions, double donc au plus tôt chaque côté de la tombe. »

Ératosthène au roi Ptolémée

Journées
académiques de
l'IREM de Lille

Objectifs de
l'atelier

Historique

Construction à la
règle et au
compas

Activités
proposées

- On raconte qu'un ancien auteur tragique met en scène *Minos* faisant préparer une tombe pour *Glaucon*. Ayant appris que de chaque côté, elle avait cent pieds, il dit :
« Tu as désigné certes un petit enclos pour la tombe d'un roi ; qu'il soit double ; sans détruire ses belles proportions, double donc au plus tôt chaque côté de la tombe. »
- Il s'est visiblement trompé. En effet, si l'on double les côtés, la figure plane devient quadruple, le solide, huit fois plus grand. Mais, même chez les géomètres, on recherchait de quelle manière on pourrait doubler le solide donné en lui conservant la même figure.

Ératosthène au roi Ptolémée

Journées
académiques de
l'IREM de Lille

Objectifs de
l'atelier

Historique

Construction à la
règle et au
compas

Activités
proposées

- On raconte qu'un ancien auteur tragique met en scène *Minos* faisant préparer une tombe pour *Glaucon*. Ayant appris que de chaque côté, elle avait cent pieds, il dit :
« Tu as désigné certes un petit enclos pour la tombe d'un roi ; qu'il soit double ; sans détruire ses belles proportions, double donc au plus tôt chaque côté de la tombe. »
- Il s'est visiblement trompé. En effet, si l'on double les côtés, la figure plane devient quadruple, le solide, huit fois plus grand. Mais, même chez les géomètres, on recherchait de quelle manière on pourrait doubler le solide donné en lui conservant la même figure.
- Ce problème sera appelé la **duplication du cube**.

Contributions d'Hippocrate de Chio

Journées
académiques de
l'IREM de Lille

Objectifs de
l'atelier

Historique

Construction à la
règle et au
compas

Activités
proposées

Hippocrate de Chio trouva que, si entre deux droites données, dont la plus grande est double de la plus petite, on parvient à obtenir deux moyennes proportionnelles en proportion continue, la **duplication du cube** sera obtenue.

Le théorème de Wantzel

Journées
académiques de
l'IREM de Lille

Objectifs de
l'atelier

Historique

Construction à la
règle et au
compas

Activités
proposées

- **Théorème de Wantzel (1837)**

Le réel a est constructible si et seulement s'il existe une suite finie de corps L_i tels que

- $L_0 = \mathbb{Q}$
- L_{i+1} est une extension quadratique de L_i
- le réel a appartient à L_n .

Le théorème de Wantzel

Journées
académiques de
l'IREM de Lille

Objectifs de
l'atelier

Historique

Construction à la
règle et au
compas

Activités
proposées

- **Théorème de Wantzel (1837)**

Le réel a est constructible si et seulement s'il existe une suite finie de corps L_i tels que

- $L_0 = \mathbb{Q}$
- L_{i+1} est une extension quadratique de L_i
- le réel a appartient à L_n .

- Wantzel déduit de son théorème une condition nécessaire pour qu'un nombre a soit constructible :

 *Si le réel a est constructible alors le degré de son polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ est une puissance de 2.*

Le théorème de Wantzel

Journées
académiques de
l'IREM de Lille

Objectifs de
l'atelier

Historique

Construction à la
règle et au
compas

Activités
proposées

- **Théorème de Wantzel (1837)**

Le réel a est constructible si et seulement s'il existe une suite finie de corps L_i tels que

- $L_0 = \mathbb{Q}$
- L_{i+1} est une extension quadratique de L_i
- le réel a appartient à L_n .

- Wantzel déduit de son théorème une condition nécessaire pour qu'un nombre a soit constructible :

 *Si le réel a est constructible alors le degré de son polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ est une puissance de 2.*

- La contraposée est donc :
Si le degré du polynôme minimal de a sur $\mathbb{Q}$ n'est pas une puissance de 2 alors a n'est pas constructible.

Le théorème de Wantzel

Journées
académiques de
l'IREM de Lille

Objectifs de
l'atelier

Historique

Construction à la
règle et au
compas

Activités
proposées

- **Théorème de Wantzel (1837)**

Le réel a est constructible si et seulement s'il existe une suite finie de corps L_i tels que

- $L_0 = \mathbb{Q}$
- L_{i+1} est une extension quadratique de L_i
- le réel a appartient à L_n .

- Wantzel déduit de son théorème une condition nécessaire pour qu'un nombre a soit constructible :

 *Si le réel a est constructible alors le degré de son polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ est une puissance de 2.*

- La contraposée est donc :

Si le degré du polynôme minimal de a sur $\mathbb{Q}$ n'est pas une puissance de 2 alors a n'est pas constructible.

- Le polynôme minimal de $\sqrt[3]{2}$ dans $\mathbb{Q}[X]$ est $X^3 - 2$.

Cela permet d'affirmer que la duplication du cube n'est pas réalisable à la règle et au compas.

La condition est nécessaire mais pas suffisante

Journées
académiques de
l'IREM de Lille

Objectifs de
l'atelier

Historique

Construction à la
règle et au
compas

Activités
proposées



Par exemple, le polynôme $X^4 + 2X - 2$, de degré 4, est bien irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, mais ses racines ne sont pas constructibles.. Le critère d'**Eisenstein** permet de donner une justification de l'irréductibilité.

Nous vous invitons maintenant à découvrir dans le document
Duplication1.pdf les activités qui suivent dans le but de
travailler différentes approches de la **Duplication du cube**.

Nous vous invitons maintenant à découvrir dans le document
Duplication1.pdf les activités qui suivent dans le but de
travailler différentes approches de la **Duplication du cube**.
Activités sous GeoGebra : Activités 1 2 3 et 12

Nous vous invitons maintenant à découvrir dans le document *Duplication1.pdf* les activités qui suivent dans le but de travailler différentes approches de la **Duplication du cube**.

Activités sous GeoGebra : Activités 1 2 3 et 12

Activités sous wxMaxima : Activités 4 et 8-2

Nous vous invitons maintenant à découvrir dans le document *Duplication1.pdf* les activités qui suivent dans le but de travailler différentes approches de la **Duplication du cube**.

Activités sous GeoGebra : Activités 1 2 3 et 12

Activités sous wxMaxima : Activités 4 et 8-2

Activités algorithmiques : Activités 6 8-1 et 11