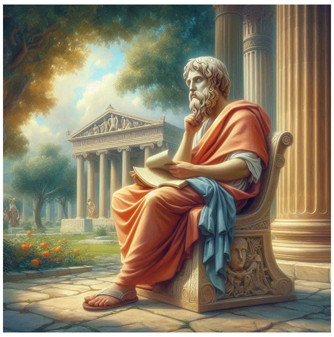
Duplication du cube — JA 2025

Laurence Le Foll - Jean-Marc Duquesnoy - Fabrice Eudes
Groupe ArCSiN — IREM de Lille
Dernière version : 27 mars 2025



Que nul n'entre ici s'il n'e

```python
def f(x):
    return((2/3)*(x+1/x**2))
u=2
for i in range(20):
    u=f(u)
```

$\Longrightarrow$ $\sqrt[3]{2} \approx 1.259921049894873$

Table des matières

Table des figures

Liste des Algorithmes

1 Introduction

La duplication du cube est l'un des trois [1] principaux problèmes non résolus des mathématiques grecques. Problème posé au moins cinq siècles avant J.-C., il n'a été vraiment résolu qu'au XIXe, lorsqu'on a su caractériser les équations polynomiales résolubles à l'aide des quatre opérations et des extractions de racines.
Les objectifs de ce document seront, en autres :

— de découvrir plusieurs approches historiques du problème de la duplication du cube, sans pour autant dresser une liste exhaustive des méthodes géométriques permettant de construire la racine cubique de deux. Le lecteur pourra consulter les documents se trouvant à ces adresses :
`https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Duplication_Cube.pdf`
et
`https://bibnum.publimath.fr/IWH/IWH22006.pdf`.

— de répondre [2] à la question se trouvant à la section 5, à savoir :
« La racine cubique de deux est-elle constructible à la règle et au compas ? »

— de proposer différentes activités géométriques, analytiques ou algorithmiques figurant aux programmes de Mathématiques des différents niveaux du cycle secondaire.

Conseil

Il pourra être intéressant de consulter le site d'Alain Juhel qui se trouve à l'adresse `https://www.mathouriste.eu/`.
Je ne fais que citer le texte apparaissant en haut de la première page :

> *« Vous êtes arrivé(e) ici, et deux cas se présentent :*
>
> — *Vous êtes collégien, lycéen, étudiant, enseignant, "honnête homme" (ou femme...), curieux des Mathématiques : nous espérons que ces pages vous apporteront quelques plaisirs inédits.*
>
> — *Vous "n'y connaissez rien" (du moins le croyez vous), les Mathématiques vous font horreur ou tout au moins vous évoquent de mauvais souvenirs : surtout, NE FUYEZ PAS, RESTEZ ! Ce site est fait pour vous, pour vous montrer que les Mathématiques ne sont pas ce que vous croyez, que loin de sordides et pénibles calculs, elles sont d'abord élégance et beauté. C'est la Terre entière et toute l'Histoire de l'Humanité qui sont ici convoquées comme témoins à décharge. . . »*

1.1 Texte attribué à Ératosthène

Ératosthène au roi *Ptolémée*.
On raconte qu'un ancien auteur tragique met en scène *Minos* faisant préparer une tombe pour *Glaucon*. Ayant appris que de chaque côté, elle avait cent pieds, il dit :
« Tu as désigné certes un petit enclos pour la tombe d'un roi ; qu'il soit double ; sans détruire ses belles proportions, double donc au plus tôt chaque côté de la tombe. »
Il s'est visiblement trompé. En effet, si l'on double les côtés, la figure plane devient quadruple, le solide, huit fois plus grand. Mais, même chez les géomètres, on recherchait de quelle manière on pourrait doubler le solide donné en lui conservant la même figure. Et ce problème était appelé la ***duplication du cube*** ; en effet s'étant donné un cube, ils cherchaient à le doubler.

1. Les deux autres étant la quadrature du cercle et la trisection d'un angle
2. Sans pour autant en donner une démonstration qui sortirait largement du cadre fixé par ce document.

Tandis que tous hésitaient depuis longtemps, *Hippocrate de Chio* le premier trouva que, si entre deux droites données, dont la plus grande est double de la plus petite, on parvient à obtenir deux moyennes proportionnelles en proportion continue, la duplication du cube sera obtenue ; et ainsi, son hésitation se transforma en une autre hésitation non moins grande.
Quelque temps après, dit-on, certains habitants de Délos, ayant reçu d'un oracle l'ordre de doubler un des autels, tombèrent dans la même hésitation. Ils envoyèrent donc demander aux géomètres qui étaient auprès de *Platon*, dans l'Académie, de trouver pour eux la solution.
D'après *Dedron* P. et *Itard J., Mathématiques et mathématiciens, Magnard, 1972,* qui soulignent le caractère non confirmé de cette source.

1.2 Cas du carré

La duplication du carré se résout facilement :

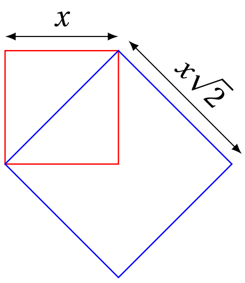
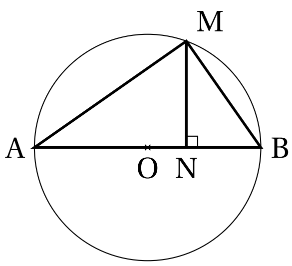


FIGURE 1 – Cas du carré

Il suffit de prendre la diagonale du carré de côté x qui vaut $x\sqrt{2}$ et dans ce cas alors, si l'aire du premier carré vaut x^2, celle du deuxième vaut $\left(x\sqrt{2}\right)^2 = 2x^2$ et, de fait, on a bien doublé l'aire du premier carré.

2 Explications

Le nombre chez les Grecs.
En notations modernes, construire un cube de volume double de celui d'un cube de côté a donné revient à chercher le côté x tel que $x^3 = 2a^3$. Ce qui nous donnera plus tard, en prenant $a = 1$, $x = \sqrt[3]{2}$.
Pour les Grecs, un nombre est avant tout un rapport de longueurs ; construire un nombre donné, c'est donc construire deux segments (voir 1.1) dans le rapport voulu, les seules constructions permises se faisant à la règle et au compas.
Une « droite » x est moyenne de deux autres « droites » a et b si $\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{b}$; x est alors moyenne géométrique de a et b, autrement dit $x^2 = a \times b$. La configuration graphique de la figure 2 qui suit illustre ce qui précède.



$\mathscr{C}$ est un cercle de centre O.

MN = x
NB = b
AN = a

FIGURE 2 – Le nombre chez les grecs

Donc, insérer deux moyennes proportionnelles, comme le propose *Hippocrate de Chio*, entre deux longueurs données a et b, c'est chercher deux autres longueurs x et y telles que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$.

On a alors $\left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a}{x} \times \frac{x}{y} \times \frac{y}{b}$, soit, avec $a = 1$ et $b = 2$, $x = \sqrt[3]{2}$.

3 Une solution attribuée à Platon

Sur la figure 3 qui suit, les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires, avec OA = 1 et OB = 2. On nomme [Ob') la demi-droite d'origine O portée par la droite (OB) et qui ne contient pas B. On place M sur [Ob') privée de O. On construit la perpendiculaire en M à la droite (AM) qui coupe la droite (OA) en N, puis la perpendiculaire en N à la droite (MN) qui coupe la droite (OB) en P.
On a alors

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OM}} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{ON}} = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OP}}$$

On a ainsi inséré deux moyennes proportionnelles OM et ON entre OA et OP.

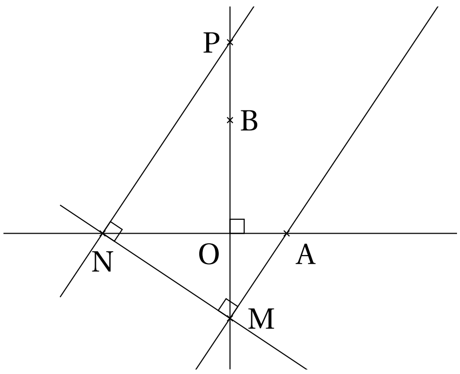


FIGURE 3 – Une construction

Sur le plan théorique, en déplaçant M continûment sur [Ob') privée de O (consulter 6.2), le point P parcourt la demi-droite [OB) privée de O : il passe une fois et une seule par toute position donnée sur cette demi-droite. Il y a là l'intervention intuitive d'un **principe de continuité**, qui assure l'existence d'une position M pour laquelle P est confondu avec B ; alors OM = $\sqrt[3]{2}$.
On obtient alors la figure 4.

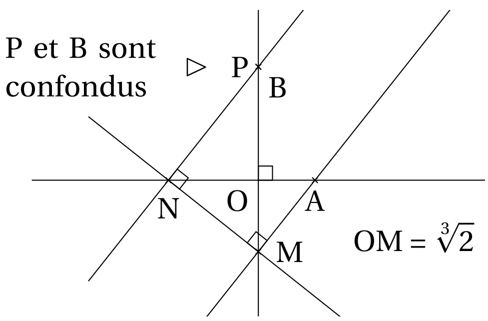


FIGURE 4 – Une solution

En pratique, Platon a conçu un instrument s'appuyant sur le schéma ci-dessus. Du point de vue des Grecs, cette méthode fournit une approximation de la solution (l'existence théorique de la solution posant un problème crucial), mais aucune construction à la règle et au compas n'a pu (et pour cause) être trouvée.

Sur la figure 4, on a déplacé le point M de telle sorte que les points P et B soient confondus. Dans ce cas-là, la distance OM vaut alors $\sqrt[3]{2}$

Remarque

Aujourd'hui, un logiciel de géométrie dynamique, en particulier GEOGEBRA, permet d'avoir l'impression de déplacer continûment le point M (en fait, on le déplace pas à pas et on s'arrête lorsque la précision de dessin ne permet plus de distinguer les points B et P) ; mais, il ne s'agit que d'une solution approximative. Pour une solution exacte au sens de la constructibilité à la règle et au compas, les points doivent être obtenus par intersection de deux droites, de deux cercles ou d'une droite et d'un cercle au terme d'une construction ne faisant intervenir qu'un nombre fini d'étapes. Ce sera l'objet du prochain paragraphe.

4 Une solution attribuée à Dioclès

La figure décrite ci-après peut être étudiée à l'aide du logiciel GEOGEBRA (on pourra consulter 6.3).
On se donne un cercle de diamètre [OI] (on peut supposer OI = 1) et la perpendiculaire Δ à la droite (OI) passant par le point I. On fait tourner une droite D autour du point O : elle coupe le cercle en un deuxième point M et la droite Δ en N.

À tout point M, on fait correspondre le point M′ du segment [ON] tel que $\overrightarrow{NM'} = \overrightarrow{MO}$. On note respectivement m et m' les projetés orthogonaux de M et M′ sur l'axe des abscisses.
Le lieu du point M′ quand M décrit le cercle est appelé *cissoïde de Dioclès* (voir 6.3). (Cette courbe a été effectivement introduite par *Dioclès* — IIᵉ siècle av. J.-C. — pour résoudre le problème de la duplication du cube.)
L'équation de la cissoïde, dans le repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, s'obtient en utilisant les triangles semblables.

Le triangle OMI est rectangle en M, on peut donc en déduire l'égalité (voir 2) $\mathrm{M}m^2 = \mathrm{O}m \times m\mathrm{I}$.

Or $\overrightarrow{NM'} = \overrightarrow{MO}$ et les points O, M, N et M′ sont alignés, on peut donc écrire l'égalité $\mathrm{OM'} = \mathrm{MN}$.

Dans le triangle ONI, les droites $(\mathrm{M}m)$ et $(\mathrm{M'}m')$ étant parallèles, on peut alors en déduire l'égalité des proportions $\dfrac{\mathrm{O}m'}{m\mathrm{I}} = \dfrac{\mathrm{OM'}}{\mathrm{MN}} = 1$ d'où l'égalité $m\mathrm{I} = \mathrm{O}m'$.
De l'égalité $\mathrm{M}m^2 = \mathrm{O}m.m\mathrm{I}$, on peut alors en déduire l'égalité $\mathrm{M}m^2 = \mathrm{O}m \times \mathrm{O}m'$.
Les différentes égalités précédentes permettent alors d'en déduire que $\dfrac{\mathrm{O}m'}{\mathrm{O}m} = \dfrac{\mathrm{M}m^2}{\mathrm{O}m^2} = \dfrac{\mathrm{M'}m'^2}{\mathrm{O}m'^2}$ et $\dfrac{\mathrm{O}m'^3}{\mathrm{O}m} = \mathrm{M'}m'^2$.
En notant $x = \mathrm{O}m'$ et $y = \mathrm{M'}m'$, on a $\mathrm{O}m = m'\mathrm{I} = 1 - x$ et on obtient l'équation de la cissoïde $y^2 = \dfrac{x^3}{1-x}$.
Dans le cas où M′ est « au-dessus » de l'axe des abscisses, on peut étudier la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$
Pour étudier cette fonction, on pourra utiliser le logiciel de calcul formel WXMAXIMA (consulter 6.4).

Pour obtenir une construction de $\sqrt[3]{2}$, il suffit maintenant de placer sur un axe perpendiculaire en O à la droite (OI) le point B tel que OB = 2. On note M′ le point d'intersection de la droite (IB) et de la cissoïde. On peut alors montrer que $\mathrm{IN} = \sqrt[3]{2}$.

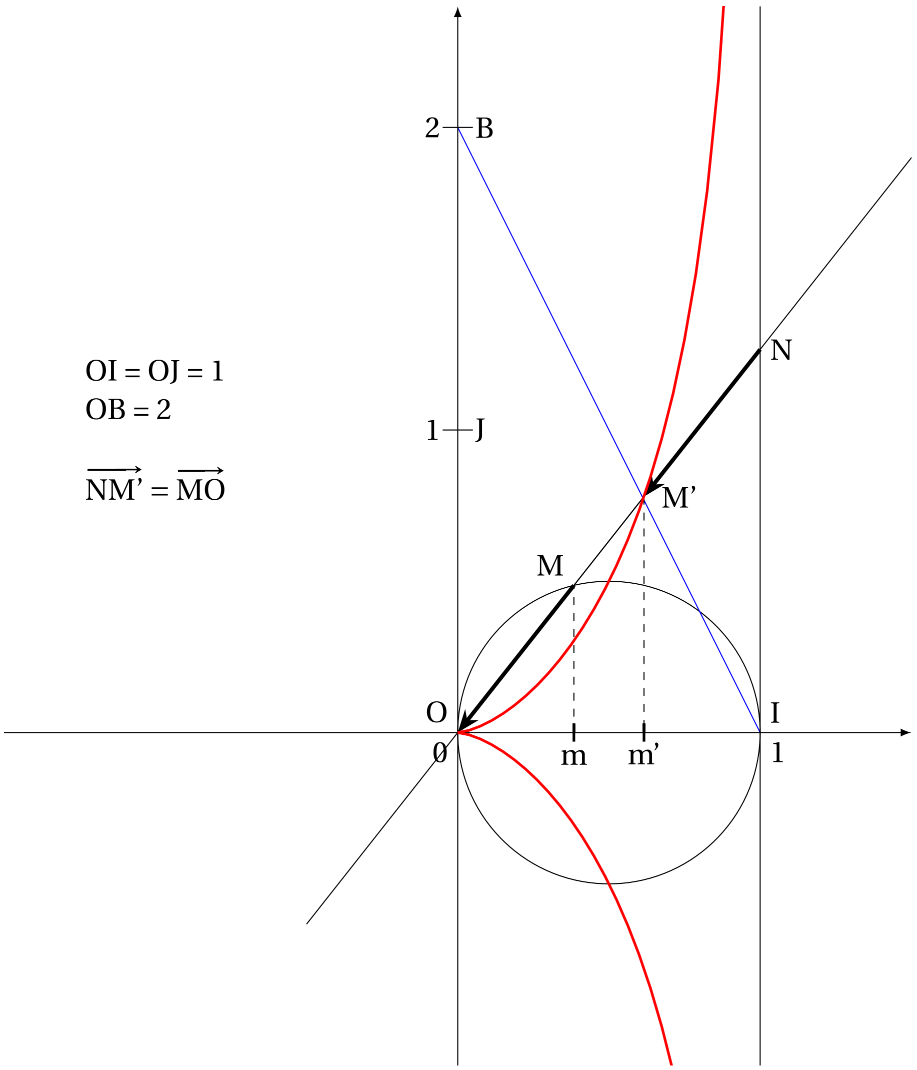


FIGURE 5 – La cissoïde

Démontrons cette propriété de façon analytique.

Dans le repère $(\text{O}; \overrightarrow{\text{OI}}, \overrightarrow{\text{OJ}})$ le point N a pour coordonnées $(1; t)$.

Le point M$'$ est le point d'intersection de la droite (IB) et de la droite (ON) qui ont pour équation réduite respective $y = -2x + 2$ et $y = tx$.

Si x et y sont les coordonnées du point M$'$, alors x et y vérifient $-2x + 2 = tx$, d'où $x = \dfrac{2}{t+2}$.

M$'$ a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{t+2}; \dfrac{2t}{t+2}\right)$.

Nous savons d'autre part que le point M vérifie l'égalité $\overrightarrow{\text{OM}} = \overrightarrow{\text{M'N}}$ $(*)$.

Or $\overrightarrow{\text{M'N}} \left(1 - \dfrac{2}{t+2}\,;\, t - \dfrac{2t}{t+2}\right)$, d'où $\overrightarrow{\text{M'N}} \left(\dfrac{t}{t+2}\,;\, \dfrac{t^2}{t+2}\right)$.

Si M a pour coordonnées $(x_{\text{M}}; y_{\text{M}})$, alors l'égalité $(*)$ donne $x_{\text{M}} = \dfrac{t}{t+2}$ et $y_{\text{M}} = \dfrac{t^2}{t+2}$.

D'autre part, M appartient au cercle d'équation $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$.

Donc t est solution de l'équation $\left(\dfrac{t}{t+2} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{t^2}{t+2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

t est donc solution de l'équation $\left(\dfrac{t-2}{2(t+2)}\right)^2 + \dfrac{t^4}{(t+2)^2} = \dfrac{1}{4}$.

Ce qui donne, après simplification $(t-2)^2 + 4t^4 = (t+2)^2$.

Donc t est solution de l'équation $t^4 - 2t = 0 \Leftrightarrow t(t^3-2) = 0$.

t ne pouvant être égal à 0, on en déduit que t vérifie $t^3 - 2 = 0$, d'où $t^3 = 2$.

Finalement $t = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$.

On montre ainsi l'existence de la solution; toutefois, on ne peut tracer qu'un nombre fini de points de la cissoïde et il s'agit, là aussi, d'une solution approchée.

5 La racine cubique de 2 est-elle constructible à la règle et au compas?

Théorème de Wantzel

On pourra consulter ce qui se trouve à l'adresse http://serge.mehl.free.fr/chrono/Wantzel.html pour découvrir le théorème de Wantzel.
Wantzel déduit de son théorème une condition nécessaire pour qu'un nombre a soit constructible :
Si le réel a est constructible alors le degré de son polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ est une puissance de 2.
La contraposée est donc :
Si le degré du polynôme minimal de a sur $\mathbb{Q}$ n'est pas une puissance de 2 alors a n'est pas constructible.
Le polynôme minimal de $\sqrt[3]{2}$ dans $\mathbb{Q}[X]$ est $X^3 - 2$.
Cela permet d'affirmer que la duplication du cube n'est pas réalisable à la règle et au compas.
Il en est de même pour la trisection de l'angle.
Toutefois, cette condition nécessaire n'est pas suffisante.
Par exemple, le polynôme $X^4 + 2X - 2$, de degré 4 , est bien irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, mais ses racines ne sont pas constructibles.
Le critère d'Eisenstein permet de donner une justification de l'irréductibilité.
Pour plus d'informations, on pourra consulter
https://fr.wikipedia.org/wiki/Crit%C3%A8re_d%27Eisenstein et
https://agreg-maths.fr/uploads/versions/3081/Crit%C3%A8re%20d'Eisenstein.pdf.

6 Activités proposées, le fil rouge étant la racine cubique de 2

Remarque

Sont proposées dans cette section plusieurs activités que l'on pourra soumettre aux élèves séparément selon la progression choisie par le professeur et à des niveaux différents du cycle Terminal.

6.1 Activité 1 : Cube et Racine cubique. Prise en main de GEOGEBRA.

Le but de cette activité est la prise en main de quelques fonctions du logiciel : symétrie, trace, lieu et le tracé de la représentation graphique d'une fonction sur un intervalle donné. Il est entendu que la démonstration de l'existence de $\sqrt[3]{y}$ se fera de manière rigoureuse par la suite.

1. Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath}\right)$, tracer la courbe représentative C_f de la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x^3$ ainsi que la droite Δ d'équation : $y=x$.
2. Placer un point M sur C_f d'abscisse a variant entre 0 et 3 (on pourra utiliser un curseur).
3. Construire le symétrique, noté M$'$, du point M par rapport à la droite Δ.
4. Faire apparaître à l'écran les coordonnées des points M et M$'$ (5 chiffres significatifs).
5. Faire varier le réel a dans l'intervalle $[0;3]$. Que constate-t-on pour les coordonnées des deux points ?
6. Faire apparaître la trace du point M$'$ lorsque M se déplace sur C_f.

6.2 Activité 2 : Méthode de Platon. Prise en main de GEOGEBRA (suite)

1. Placer les points A$(1;0)$ et B$(0;2)$ dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath}\right)$.
2. Placer un point M sur l'axe des ordonnées, l'ordonnée du point M étant négative, puis tracer le segment [AM] ainsi que la droite perpendiculaire au segment [AM] passant par le point M. Cette droite coupe l'axe des abscisses en un point N.

   La droite perpendiculaire à la droite (MN) passant par N coupe l'axe des ordonnées en un point P.

   Ouvrir la fenêtre d'algèbre, ce qui permet de lire les coordonnées des deux points N et P, ainsi que les coordonnées du point M.
3. Déplacer le point M de telle manière que les points B et P soient visuellement confondus. Dans ce cas, lire la valeur de l'ordonnée du point M (on pourra faire varier le nombre de décimales dans le menu *Outils*), puis déterminer géométriquement sa valeur exacte.

6.3 Activité 3 : la Cissoïde

Soit I le point de coordonnées $(1;0)$ dans le repère $\left(\mathrm{O};\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath}\right)$ et Δ la droite perpendiculaire à (OI) passant par I. On note $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [OI].
On place un point M sur $\mathscr{C}$, distinct de O. On nomme $\mathscr{D}$ la droite (OM), elle coupe la droite Δ en N.
Au point M on associe le point M$'$ appartenant au segment [ON] et vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{NM}'}=\overrightarrow{\mathrm{MO}}$.
On note respectivement m et m' les projetés orthogonaux de M et M$'$ sur l'axe des abscisses.

1. Faire la figure à l'aide du logiciel GEOGEBRA.
2. Tracer le lieu des points M$'$ lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$. On notera $\mathscr{C}'$ ce lieu.
3. Placer sur la figure le point B$(0;2)$. Tracer le segment [IB].
4. Déplacer M pour que M$'$ soit confondu avec l'intersection de [IB] et $\mathscr{C}'$.
5. Démontrer que dans cette configuration on a $\mathrm{IN}=\sqrt[3]{2}$.

6.4 Activité 4 : Étude de la fonction $f : x \longmapsto x\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$

Ce qui suit va permettre, à l'aide du logiciel WXMAXIMA, d'étudier la fonction $f : x \longmapsto x\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$.

1. Quelles sont les valeurs du réel x pour lesquelles $f(x)$ existe ?
2. Déterminer les limites de $f(x)$ aux bornes de son ensemble de définition. Que peut-on en déduire graphiquement pour C_f, courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$?
3. Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0. En déduire une équation de la tangente à la courbe représentative C_f de f au point d'abscisse 0.
4. Étudier les variations de la fonction f.
5. Tracer la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Voici une solution[3] faisant appel au logiciel de calcul formel WXMAXIMA .

Session wxMaxima

Déclarons l'ensemble de définition.

```
--> assume(x>=0 and x<1);
```

$[x \geq 0, x < 1]$ (%o1)

Définissons la fonction.

```
--> f(x):=x*sqrt(x/(1-x));
```

$\mathrm{f}(x) := x\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ (%o2)

Calculons la limite de f à droite en 1.

```
--> limit(f(x),x,1,minus);
```

∞ (%o3)

Calculons la dérivée de f, factorisons l'expression , puis déterminons-en le signe sur $[0;1[$.

```
--> diff(f(x),x);factor(%);sign(%);
```

$\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}}$ (%o4)

$\dfrac{\sqrt{x}\,(2x-3)}{2\sqrt{1-x}\,(x-1)}$ (%o5)

pz (%o6)

Étudions la dérivabilité de f en 0.

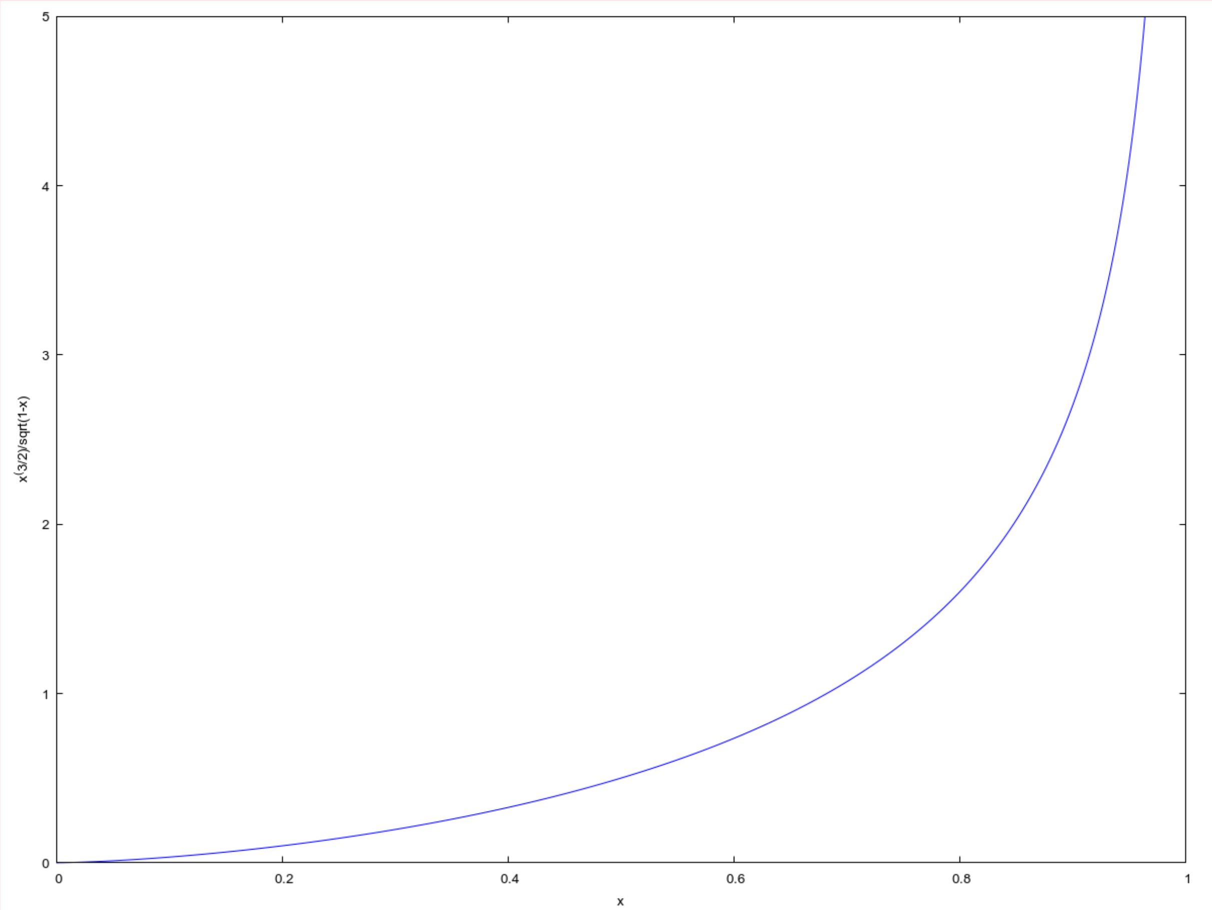
```
--> limit((f(x)-f(0))/x,x,0,plus);
```

0 (%o7)

3. Permet à l'élève de valider ses calculs, de trouver une solution s'il bloque sur une question, ou au professeur de présenter un corrigé.

Les deux limites calculées permettent d'en déduire l'existence d'une asymptote d'équation $x = 1$ et, à l'origine, d'une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
Traçons la représentation graphique de f.

−> wxplot2d([f(x)], [x,0,1],[y,0,5]);



(% t9)

(% o9)

6.5 Activité 5 : Existence de la racine cubique de 2

On considère la fonction f qui, à tout nombre réel x, associe $f(x) = x^3$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
On affiche la courbe (C_f) à l'écran d'une calculatrice ou à l'aide du logiciel GeoGebra.
Que signifie graphiquement l'expression « Résoudre l'équation $x^3 = 2$ » ?
La lecture graphique[4] permet de dire qu'il existe un **unique** nombre réel, que l'on notera α, vérifiant $\alpha^3 = 2$, soit $\alpha^3 - 2 = 0$.
La continuité et la stricte monotonie de la fonction cube sur $\mathbb{R}$ permettent de démontrer rigoureusement l'existence de α.

4. On peut localiser α entre 1 et 2.

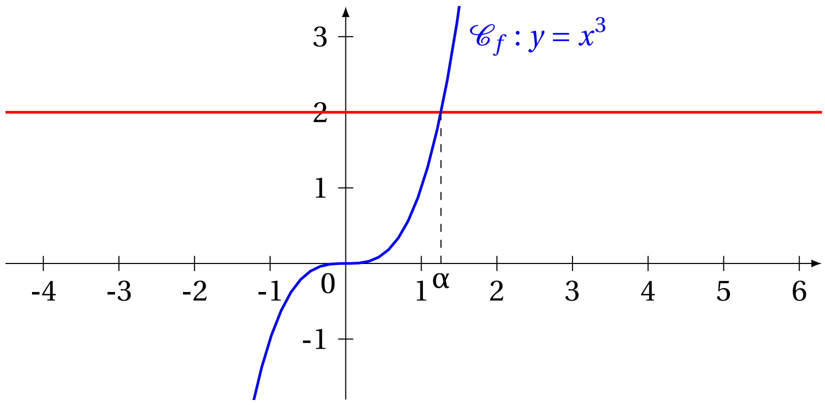


FIGURE 6 – La fonction cube

6.6 Activité 6 : Comment localiser α ?

On se propose d'utiliser la méthode de dichotomie.
Voici un algorithme, écrit en pseudo-code :

Algorithme 1 : Recherche par dichotomie

Données : Bornes de l'intervalle initial $[a; b]$ et précision ε souhaitée
Résultat : Affichage de l'intervalle obtenu

1 Saisir a
2 Saisir b $(b > a)$
3 **si** $(a^3 - 2) \times (b^3 - 2) \geqslant 0$ **alors**
4   Afficher « $\alpha \notin [a; b]$ »
5 **sinon**
6   Saisir ε `(ε est un nombre réel strictement positif)`
7   **tant que** $b - a \geq \varepsilon$ **faire**
8         $c \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$
9   **si** $(a^3 - 2) \times (c^3 - 2) \leqslant 0$ **alors**
10             $b \leftarrow c$
11   **sinon**
12             $a \leftarrow c$
13   **fin si**
14   **fin tant que**
15   Afficher « $\alpha \in [a; b]$ »
16 **fin si**

1. Interpréter la ligne 3 de l'algorithme.
2. Coder en langage PYTHON l'algorithme précédent, l'implémenter sur machine, puis l'exécuter plusieurs fois en saisissant à chaque exécution $a = 1$, $b = 2$, puis successivement $\varepsilon = 0,1$, $\varepsilon = 0,01$, et $\varepsilon = 0,001$.
   Quelle conclusion peut-on tirer de l'affichage en sortie de chacune des trois compilations ?
3. Déterminer une valeur approchée par défaut de α à 10^{-10} près.

Pour la suite, on notera $\alpha = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$.

Éléments de correction

1. Interpréter la ligne 3 de l'algorithme.

   Cette ligne de code teste si les valeurs de a^3 et b^3, les valeurs de a et b ayant été saisies à l'exécution de l'algorithme, sont toutes les deux à droite de 2 ou à gauche de 2, auquel cas la méthode de dichotomie ne peut s'appliquer pour localiser α.

2. Coder en langage PYTHON l'algorithme précédent, l'implémenter sur machine, puis l'exécuter plusieurs fois en saisissant à chaque exécution $a = 1$, $b = 2$, puis successivement $\varepsilon = 0,1$, $\varepsilon = 0,01$, et $\varepsilon = 0,001$.

   Le script PYTHON qui suit traduit l'algorithme précédent, codé en pseudo-code :

   Code PYTHON

```python
a=float(input("saisir la valeur de a "))
b=float(input("saisir la valeur de b, avec b>a "))
if (a**3-2)*(b**3-2)>=0:
    print(f"alpha n'appartient pas à l'intervalle [{a};{b}].")
else:
    epsilon=float(input("saisir la valeur de epsilon "))
    while b-a>=epsilon:
        c=(a+b)/2
        if (a**3-2)*(c**3-2)<=0:
            b=c
        else:
            a=c
    print(f"alpha appartient à l'intervalle [{a};{b}].")
```

   Pour $a = 1$, $b = 2$ et $\varepsilon = 0,1$, cela donne :

   Sortie PYTHON

   alpha appartient à l'intervalle [1.25;1.3125].

   Pour $a = 1$, $b = 2$ et $\varepsilon = 0,01$, cela donne :

   Sortie PYTHON

   alpha appartient à l'intervalle [1.2578125;1.265625].

   Pour $a = 1$, $b = 2$ et $\varepsilon = 0,001$, cela donne :

   Sortie PYTHON

   alpha appartient à l'intervalle [1.259765625;1.2607421875].

   Quelle conclusion peut-on tirer de l'affichage en sortie de chacune des trois compilations?

   Plus ε est petit, plus l'intervalle dans lequel α se trouve est d'amplitude petite.

   Autrement dit la localisation de α est de plus en plus précise dès que ε est de plus en plus proche de 0.

3. Déterminer une valeur approchée par défaut de α à 10^{-10} près.
   Il suffit d'affecter à ε la valeur 10^{-10}.
   Ce qui donne

   Sortie PYTHON

   alpha appartient à l'intervalle [1.2599210498738103;1.259921049932018].

Pour la suite, on notera $\alpha = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$.

6.7 Activité 7 : $\sqrt[3]{2}$ est un nombre irrationnel

Démontrer[5] que $\sqrt[3]{2}$ ne peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers naturels premiers entre eux.

Éléments de correction

Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons qu'il existe deux entiers p et q, premiers entre eux, autrement dit $\text{PGCD}(p,q) = 1$, tels que $\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}$.

Alors $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2 = \left(\frac{p}{q}\right)^3 = \frac{p^3}{q^3}$.
On peut alors écrire que $2 \times q^3 = p^3 (**)$.
Cela signifie que p^3 est un entier pair, autrement dit qu'il existe un entier k tel que $p^3 = 2 \times k$.
Si p était un entier impair, cela signifierait qu'il existe un entier m tel que $p = 2 \times m + 1$.
On aurait alors[6]

$$p^3 = (2 \times m + 1)^3 = 8 \times m^3 + 12 \times m^2 + 6 \times m + 1 = 2 \times (4 \times m^3 + 6 \times m^2 + 3 \times m) + 1.$$

Or $4 \times m^3 + 6 \times m^2 + 3 \times m$ est un entier, par conséquent p^3 serait impair, ce qui est contradictoire.
Donc l'entier p est pair.
Autrement dit, il existe n entier tel que $p = 2 \times n$.
Ce qui implique que

$$p^3 = (2 \times n)^3 = 8 \times n^3 = 2 \times q^3 \text{ d'après } (**).$$

D'où $2 \times q^3 = 8 \times n^3$, et par conséquent $q^3 = 4 \times n^3$, autrement dit q^3 est un entier pair, donc q aussi (voir plus haut).
Ce qui signifie qu'il existe un entier r tel que $q = 2 \times r$.
Par conséquent $\text{PGCD}(p,q) = \text{PGCD}(2 \times n, 2 \times r) \geq 2$.
Cela contredit l'hypothèse que p et q sont premiers entre eux.
Conclusion : $\sqrt[3]{2}$ ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, avec p et q premiers entre eux.
Donc $\sqrt[3]{2}$ est irrationnel.

5. En enseignement de l'option *Mathématiques expertes*.
6. Pour tous nombres réels a et b, donc en particulier si a et b sont des entiers, $(a+b)^3 = a^3 + 3 \times a^2 \times b + 3 \times a \times b^2 + b^3$.

6.8 Activité 8 : Étude d'une suite qui converge vers α

6.8.1 Une version algorithmique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 6$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$, où g est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \frac{2}{3} \times \left(x + \frac{1}{x^2}\right)$, et Δ la droite d'équation $y = x$.

1. (a) Compléter le graphique de la figure 7 afin d'afficher sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u (on laissera les traits de construction apparents).

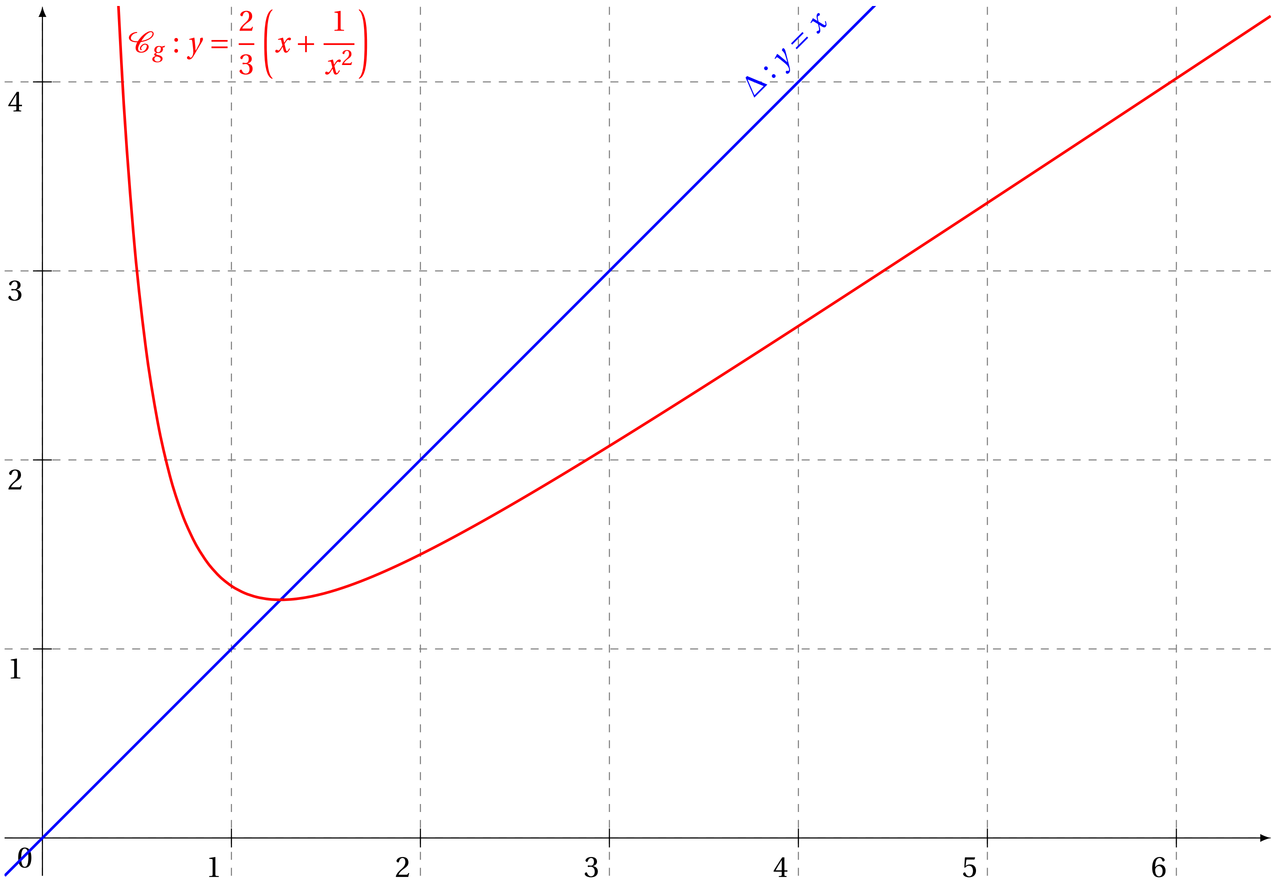


FIGURE 7 – Faire apparaître les premiers termes de la suite u

   (b) Coder en langage PYTHON un algorithme, appelé ALGO2, qui sera implémenté sur machine, et qui, à l'exécution, calcule et affiche les trente premiers termes[7] de la suite u.

   (c) Exécuter le script précédent.

   (d) Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite u ?

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

   (b) Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (c) Démontrer que, pour tout x réel strictement positif, $g(x) \geqslant \sqrt[3]{2}$.

   (d) Démontrer que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant \sqrt[3]{2}$.

   (e) Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x) = g(x) - x$.

   (f) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

   (g) Déduire de ce qui précède que la suite u est convergente. On notera l sa limite.

   (h) Démontrer que l est solution de l'équation $g(l) = l$, puis que $l = \sqrt[3]{2}$.

7. La commande « `print(format(X,'.25g'))` » affiche la valeur de la variable `X` avec 25 chiffres après la virgule.

6.8.2 Une version utilisant le calcul formel

Dans ce qui suit, les justifications des résultats affichés demanderont à l'élève une recherche plus approfondie.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}\left(u_n + \frac{1}{u_n^2}\right)$

Étudier le comportement de la suite (u_n).

Commençons par définir la fonction associée à cette suite, $g : x \mapsto \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{x^2}\right)$.

Session wxMaxima

Commençons par définir la fonction associée à cette suite, $g : x \mapsto \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{x^2}\right)$.

(% i2) `g(x) :=(2/3)*(x+1/x^ 2);assume(x>0);`

$$\mathrm{g}(x) := \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{x^2}\right) \qquad (\%\ o1)$$

$$[x > 0] \qquad (\%\ o2)$$

L'intervalle $]0,+\infty[$ est *stable* par g, *i.e.* si $x \in]0,+\infty[$ alors $g(x)$ est défini et $g(x) \in]0,+\infty[$ (facile à établir). Ceci permet de justifier l'*existence* de la suite u.

(% i4) `u[n] :=g(u[n-1]);u[0] :2;`

$$u_n := \mathrm{g}(u_{n-1}) \qquad (\%\ o3)$$

$$2 \qquad (\%\ o4)$$

Calculons les premiers termes de la suite u.

(% i5) `premierstermes :makelist(u[i],i,0,5);`

$$\left[2, \frac{3}{2}, \frac{35}{27}, \frac{125116}{99225}, \frac{2935497269576521}{2329904227757400}, \frac{37943380578780749660907745506866964214190468761}{30115681122980687780402191130514181955575820100}\right] \qquad (\%\ o5)$$

La machine renvoie des nombres rationnels, demandons lui d'afficher des *flottants*.

(% i6) `float(premierstermes);`

$$[2.0, 1.5, 1.296296296296296, 1.260932224741749, 1.259921860565926, 1.259921049895395] \qquad (\%\ o6)$$

La suite u semble converger. Déterminons un éventuel *point fixe* de la fonction g.

(% i7) `pointsfixes :solve(g(x)=x,x);`

$$\left[x = \frac{2^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}\%i - 2^{\frac{1}{3}}}{2}, x = -\frac{2^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}\%i + 2^{\frac{1}{3}}}{2}, x = 2^{\frac{1}{3}}\right] \qquad (\%\ o7)$$

Nous constatons que la fonction g admet un unique point fixe réel (la troisième solution). Déterminons une valeur approchée de ce point fixe.

(% i8) float(pointsfixes[3]);

$$x = 1.259921049894873 \quad (\% o8)$$

Nous constatons que cette valeur ($\sqrt[3]{2}\dots$) est assez proche de u_5 tout en restant inférieure. Regardons de plus près la fonction g, en particulier le signe de sa dérivée lorsque $x \geqslant \sqrt[3]{2}$, c'est à dire $x^3 \geqslant 2$.

(% i10) assume(x^3-2>=0);sign(diff(g(x),x));

$$[x^3 >= 2] \quad (\% o9)$$

$$\text{pz} \quad (\% o10)$$

La dérivée de la fonction g est positive sur $\mathrm{I} = [\sqrt[3]{2}, +\infty[$, g est donc croissante sur cet intervalle. De plus, la borne inférieure de I est un point fixe et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, par conséquent, I est stable par la fonction g. Autrement dit, tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle I, dans la mesure où le premier d'entre eux y est (on peut mettre en place un raisonnement par récurrence).
D'où $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \sqrt[3]{2}$.
Déterminons le signe de $g(x) - x$, toujours pour $x \geqslant \sqrt[3]{2}$.

(% i11) sign(g(x)-x);

$$\text{nz} \quad (\% o11)$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, la suite (u_n) est donc décroissante.
Sachant que la suite (u_n) est décroissante et minorée, d'après le théorème de convergence monotone, on conclut qu'elle est convergente. Sa limite est la seule limite possible : $\sqrt[3]{2}$.

6.9 Activité 9 : Étude de deux suites qui convergent vers $\sqrt[3]{2}$

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{2}{{u_n}^2}$ où (u_n) est la suite définie dans l'activité 6.8.

1. Compléter l'algorithme ALGO2 de l'activité 6.8.1 afin d'afficher graphiquement les trente premiers termes des deux suites u et v.
2. Quelles conjectures peut-on émettre quant à la position relative des deux suites ainsi qu'au sens de variation et à la convergence de la suite v ?
3. Démontrer que la suite (v_n) est croissante.
4. Montrer que, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{g^3(u_n) - 2}{g^2(u_n)}.$$
5. En déduire que, pour tout entier naturel n,
$$0 \leqslant u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant (2)^{-\frac{2}{3}}(g^3(u_n) - 2).$$
6. Que peut-on dire de $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - v_{n+1})$?

7. Déduire de ce qui précède que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \sqrt[3]{2}$.

Conclusion : La suite u est décroissante, la suite v est croissante et, pour tout entier naturel n, $u_n \geq u_n$. Nous dirons que les deux suites u et v sont ***adjacentes***.
Remarque : Nous venons de montrer que $\sqrt[3]{2}$ est un nombre irrationnel qui est limite de deux suites u et v de rationnels. On peut montrer que tout nombre irrationnel est limite de suites de rationnels.
On dit que $\mathbb{Q}$ est ***dense*** dans $\mathbb{R}$

6.10 Activité 10 : Étude de deux suites qui convergent vers $\sqrt[3]{2}$

Pour cette activité, on fait le choix de questions ouvertes laissant l'initiative aux élèves quant aux méthodes et aux logiciels à utiliser. Il faudra, pour ce type d'activité, donner aux élèves suffisamment de temps pour qu'ils puissent produire un travail exploitable. Cela peut faire l'objet d'un travail en groupe, avec exposé devant la classe.
On se pose les questions suivantes :

1. Justifier l'existence de $\sqrt[3]{2}$.
2. Irrationalité de $\sqrt[3]{2}$ (pour les élèves qui suivent l'enseignement de spécialité).
3. Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$ où
$$g(x) = \frac{2}{3}\left(x + \frac{2}{x^2}\right).$$
4. Étude de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{2}{u_n^2}$.
5. Conjecturer les propriétés des deux suites (u_n) et (v_n).

6.11 Activité 11 : Volume d'un parallélépipède rectangle

Partie A : Étude d'une suite auxiliaire

On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :
$u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et, pour tout k entier naturel, $u_{k+2} = \dfrac{1}{2}(u_k + u_{k+1})$.

1. Proposer un algorithme, écrit en pseudo-code ou en langage PYTHON, qui déclare une procédure, appelée « `Suite` », qui prend pour argument un entier naturel N, puis calcule et affiche les N premiers termes de la suite (u_k).
2. Afficher les vingt premiers termes de la suite (u_k), puis conjecturer la limite de la suite (u_k).
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel k, $u_k = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{(-1)^k}{2^{k-1}}\right)$.
4. Déduire de ce qui précède $\lim\limits_{k \to +\infty} u_k$.

Éléments de correction

1. Proposer un algorithme, écrit en pseudo-code ou en langage PYTHON, qui déclare une procédure, appelée « `Suite` », qui prend pour argument un entier naturel N, puis calcule et affiche les N premiers termes de la suite (u_k).
   Ci-dessous un script codé en langage PYTHON qui répond à la question :

Code PYTHON

```
def Suite(N):
        u=1
        v=0
        for i in range(N):
                print(f"u({i})={u}","\n")
                w=0.5*(u+v)
                u=v
                v=w
```

2. Afficher les vingt premiers termes de la suite (u_k), puis conjecturer la limite de la suite (u_k).

Sortie PYTHON

```
u(0)=1
u(1)=0
u(2)=0.5
u(3)=0.25
u(4)=0.375
u(5)=0.3125
u(6)=0.34375
u(7)=0.328125
u(8)=0.3359375
u(9)=0.33203125
u(10)=0.333984375
u(11)=0.3330078125
u(12)=0.33349609375
u(13)=0.333251953125
u(14)=0.3333740234375
u(15)=0.33331298828125
u(16)=0.333343505859375
u(17)=0.3333282470703125
u(18)=0.33333587646484375
u(19)=0.3333320617675781
```

On conjecture que la suite (u_k) converge vers $0,3333333$, donc vers $\frac{1}{3}$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel k, $u_k = \frac{1}{3}\left(1+\frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\right)$.

Initialisation :

$$\frac{1}{3}\left(1+\frac{(-1)^0}{2^{0-1}}\right) = \frac{1}{3}(1+2) = 1 = u_0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{3}\left(1+\frac{(-1)^1}{2^{1-1}}\right) = \frac{1}{3}(1-1) = 0 = u_1$$

Hérédité :

Supposons que, pour un entier k donné, $u_k = \frac{1}{3}\left(1+\frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\right)$ et $u_{k+1} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{2^k}\right)$.

Montrons qu'alors $u_{k+2} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{(-1)^{k+2}}{2^{k+1}}\right)$.

Par définition de la suite u

$$u_{k+2} = \frac{1}{2}(u_k + u_{k+1}) = \frac{1}{6}\left(\left(1 + \frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\right) + \left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}\right)\right)$$

d'où

$$u_{k+2} = \frac{1}{6}\left(2 + \frac{(-1)^k}{2^{k-1}} + \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}\right) = \frac{1}{6}\left(2 + \frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\right)$$

d'où

$$u_{k+2} = \frac{2}{6}\left(1 + \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}\right)$$

d'où

$$u_{k+2} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^{k+2}}{2^{k+1}}\right)$$

Conclusion :

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel k, $u_k = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{(-1)^k}{2^{k-1}}\right)$.

4. Déduire de ce qui précède $\lim\limits_{k \to +\infty} u_k$.

Pour tout entier naturel k, on a

$$\frac{-1}{2^{k-1}} \leq \frac{(-1)^k}{2^{k-1}} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

or

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 0$$

donc, en utilisant le *théorème des gendarmes*

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k-1}} = 0$$

par conséquent

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\right) = \frac{1}{3}(1+0) = \frac{1}{3}$$

Ce résultat valide la conjecture émise à la question 2.

Partie B : Étude d'une suite de parallélépipèdes rectangles

On va étudier dans cette partie une suite de parallélépipèdes rectangles $(\mathscr{P}_k)$ construits suivant le processus qui suit.

— On fixe n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

— $\mathscr{P}_0$ est le parallélépipède rectangle associé aux dimensions $y_0 = n$ et $y_1 = 1$. On note $\mathrm{P}_0 = (y_0, y_1, y_1)$ le triplet de longueurs définissant le pavé droit $\mathscr{P}_0$. Celui-ci a deux faces carrées de côté $y_1 = 1$.

— Pour tout entier naturel k, $\mathscr{P}_k$ est le parallélépipède rectangle associé aux dimensions y_k et y_{k+1}. On note $\mathrm{P}_k = (y_k, y_{k+1}, y_{k+1})$ le triplet de longueurs définissant le pavé droit $\mathscr{P}_k$. Il a deux faces carrées de côté y_{k+1}.
La suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sera définie par récurrence de la façon suivante :

$$y_0 = n,\ y_1 = 1 \text{ et, pour tout entier } k \geq 0,\ y_{k+2} = \sqrt{y_k \times y_{k+1}}.$$

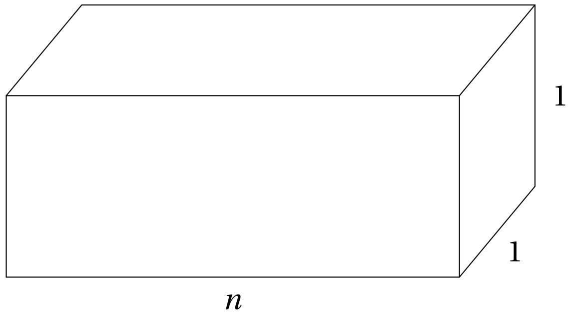


FIGURE 8 – Parallélépipède rectangle $\mathscr{P}_0$

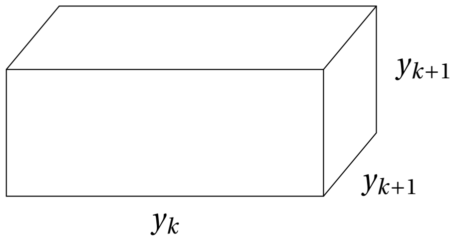


FIGURE 9 – Parallélépipède rectangle $\mathscr{P}_k$

1. Déterminer les cinq premières valeurs de la suite (y_k).
2. En déduire les triplets $\mathrm{P}_k = (y_k, y_{k+1}, y_{k+1})$ respectifs associés aux quatre premiers parallélépipèdes rectangles $\mathscr{P}_k$.
3. Quel est le volume de chacun de ces quatre parallélépipèdes rectangles $\mathscr{P}_k$?
4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel k, le parallélépipède $\mathscr{P}_k$ a pour volume n.
5. Pour tout entier naturel k, on pose $y_k = n^{\alpha_k}$.
   (a) Justifier que $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$ et, pour tout entier naturel k, $\alpha_{k+2} = \dfrac{1}{2}(\alpha_k + \alpha_{k+1})$.
   (b) Que peut-on en déduire pour la suite (α_k) ? *(On pourra utiliser les résultats de la Partie 6.11.)*
   (c) Déduire de ce qui précède $\lim\limits_{k\to+\infty} y_k$.
6. Lorsque k tend vers $+\infty$, vers quel type de parallélépipède rectangle la suite $(\mathscr{P}_k)$ converge-t-elle ?
7. Dans cette question, on pose $n = 2$. En utilisant les résultats des questions précédentes, proposer un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée de $\sqrt[3]{2}$.

Conclusion

En choisissant k suffisamment grand, on obtient ainsi une approximation, construite À LA RÈGLE ET AU COMPAS, de l'arête de longueur $\sqrt[3]{2}$, avec une précision aussi grande que l'on veut.
En effet, si on applique dix fois la transformation à partir du parallélépipède $\mathscr{P}_0$, on obtient le parallélépipède $\mathscr{P}_{10}$ dont l'un des côtés a pour longueur $\mathrm{Y}_{11} = 2^{\alpha_{11}}$, avec $\alpha_{11} = \dfrac{1}{3} \times \left(1 - \dfrac{1}{2^{10}}\right)$.
Si on confond le côté du parallélépipède $\mathscr{P}_{10}$ avec l'arête du cube de longueur $\sqrt[3]{2}$, on commet sur l'exposant de 2 une erreur absolue de $\dfrac{1}{3\times 2^{10}}$, voisine de 3×10^{-4}. Le même calcul avec $\mathscr{P}_{20}$ donne une erreur de $\dfrac{1}{3\times 2^{20}}$, voisine de 3×10^{-7}.
Il pourra être intéressant de consulter
J.-C. Carréga. *Théorie des corps. La règle et le compas.* Hermann 2001.

Éléments de correction

1. Déterminer les cinq premières valeurs de la suite (y_k).
Le script suivant, codé en langage PYTHON

Code PYTHON

```
from sympy import *
n=Symbol("n")
def Y(p):
        u=n
        v=1
        for i in range(p):
                print(f"y({i})={u}",'\n')
                w=sqrt(u*v)
                u=v
                v=w
Y(5)
```

affiche à l'exécution :

Sortie PYTHON

```
y(0)=n
y(1)=1
y(2)=sqrt(n)
y(3)=n**(1/4)
y(4)=n**(3/8)
```

2. En déduire les triplets (y_k, y_{k+1}, y_{k+1}) respectifs associés aux quatre premiers parallélépipèdes rectangles $\mathscr{P}_k$. On a :
$P_0 = (y_0, y_1, y_1) = (n, 1, 1)$
$P_1 = (y_1, y_2, y_2) = (1, n^{\frac{1}{2}}, n^{\frac{1}{2}})$
$P_2 = (y_2, y_3, y_3) = (n^{\frac{1}{2}}, n^{\frac{1}{4}}, n^{\frac{1}{4}})$
$P_3 = (y_3, y_4, y_4) = (n^{\frac{1}{4}}, n^{\frac{3}{8}}, n^{\frac{3}{8}})$
3. Quel est le volume de chacun de ces quatre parallélépipèdes rectangles $\mathscr{P}_k$?
$\mathscr{P}_0$ a pour volume $n \times 1^2 = n$.
$\mathscr{P}_1$ a pour volume $1 \times \left(n^{\frac{1}{2}}\right)^2 = n$
$\mathscr{P}_2$ a pour volume $n^{\frac{1}{2}} \times \left(n^{\frac{1}{4}}\right)^2 = n^{\frac{1}{2}} \times n^{\frac{1}{2}} = n$
$\mathscr{P}_3$ a pour volume $n^{\frac{1}{4}} \times \left(n^{\frac{3}{8}}\right)^2 = n^{\frac{1}{4}} \times n^{\frac{3}{4}} = n$
4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel k, le parallélépipède $\mathscr{P}_k$ a pour volume n.
Initialisation :
Nous avons démontré dans la question précédente que $\mathscr{P}_0$ a pour volume n.
Hérédité :

Supposons que, pour un entier naturel k, $\mathscr{P}_k$ ait pour volume n, autrement dit, $y_k \times \left(y_{k+1}\right)^2 = n$.
$\mathscr{P}_{k+1}$ a pour volume $y_{k+1} \times \left(y_{k+2}\right)^2 = y_{k+1} \times \left(\sqrt{y_k \times y_{k+1}}\right)^2 = y_{k+1} \times y_k \times y_{k+1} = y_k \times \left(y_{k+1}\right)^2$.
Or, par hypothèse de récurrence, $y_k \times \left(y_{k+1}\right)^2 = n$, donc $\mathscr{P}_{k+1}$ a pour volume n.
Conclusion :
Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel k, $\mathscr{P}_k$ a pour volume n.

5. Pour tout entier naturel k, on pose $y_k = n^{\alpha_k}$.
   (a) Justifier que $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$ et, pour tout entier naturel k, $\alpha_{k+2} = \dfrac{1}{2}(\alpha_k + \alpha_{k+1})$.
   $y_0 = n$ donc $\alpha_0 = 1$. De même, $y_1 = 1$ donc $\alpha_1 = 0$.
   D'autre part, pour tout entier naturel k, $y_{k+2} = \sqrt{y_k \times y_{k+1}}$.
   Donc $n^{\alpha_{k+2}} = \sqrt{n^{\alpha_k} \times n^{\alpha_{k+1}}} = \sqrt{n^{\alpha_k + \alpha_{k+1}}} = n^{\frac{1}{2}(\alpha_k + \alpha_{k+1})}$.
   D'où, pour tout entier naturel k, $\alpha_{k+2} = \dfrac{1}{2}(\alpha_k + \alpha_{k+1})$.
   (b) Que peut-on en déduire pour la suite (α_k) ? *(On pourra utiliser les résultats de la Partie 6.11.)*
   On peut déduire de ce qui précède que la suite (α_k) est égale à la suite (u_n) de la **Partie A**.
   (c) Déduire de ce qui précède $\lim\limits_{k \to +\infty} y_k$.
   On peut en déduire que, sachant que la suite (α_k) convergeant vers $\dfrac{1}{3}$, la suite (y_k) converge alors vers $n^{\frac{1}{3}}$.
6. Lorsque k tend vers $+\infty$, vers quel type de parallélépipède rectangle la suite $(\mathscr{P}_k)$ converge-t-elle ?
   Cette suite $(\mathscr{P}_k)$ converge vers un cube d'arête $n^{\frac{1}{3}}$.
7. Dans cette question, on pose $n = 2$. En utilisant les résultats des questions précédentes, proposer un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée de $\sqrt[3]{2}$.
   Si n vaut 2, alors la suite des parallélépipèdes $(\mathscr{P}_k)$ converge vers un cube d'arête $2^{\frac{1}{3}}$.
   On peut approximer la valeur exacte de $2^{\frac{1}{3}}$ par la valeur de y_k, pour k suffisamment grand.
   Le script suivant, codé en langage PYTHON, permet d'afficher une valeur approchée de $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$:

Code PYTHON

```python
from math import sqrt

def Y(p):
        u=2
        v=1
        for i in range(p):
                w=sqrt(u*v)
                u=v
                v=w
        print(f"y({p})={float(u)} qui donne une valeur approchée \
        de la racine cubique de 2.")
Y(15)
```

Ce qui affiche à l'exécution :

Sortie PYTHON

```
y(15)=1.259903282467999 qui donne une valeur approchée de la racine cubique de 2.
```

6.12 Activité 12 : La racine cubique de 2 dans un triangle

On considère la configuration géométrique ci-dessous, dans laquelle :

— les points A, D et C sont alignés ;

— les points A, F, E et B sont alignés.

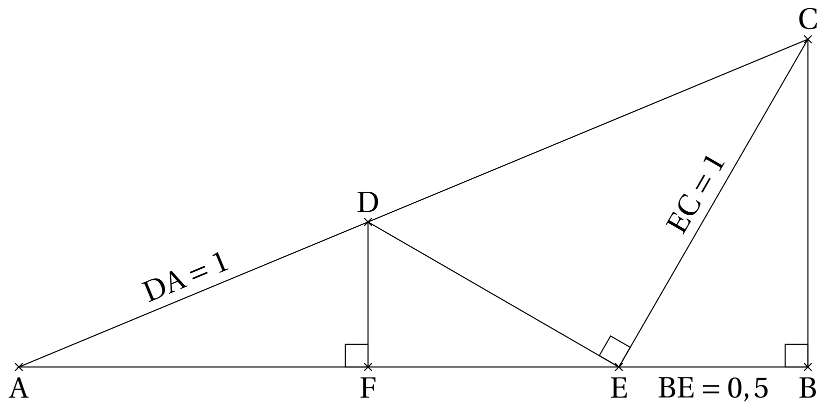


FIGURE 10 – Construction au compas et à la règle *graduée*

L'objectif de cette activité est de calculer la distance DC.

1. Montrer l'égalité $\widehat{FED} = \widehat{BCE}$.
2. Démontrer que $DE = 2 \times DF$.
3. Dans la suite du problème on note $DC = x$ et $DF = y$.
   (a) Démontrer que $x^2 = 4y^2 + 1$.
   (b) Démontrer que $BC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   (c) Démontrer que $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2(1+x)}$.
4. Déduire des questions précédentes que $x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0$.
5. Développer le produit $(x+2)(x^3-2)$.
6. En déduire la valeur exacte de x.

Éléments de correction

1. Montrer l'égalité $\widehat{FED} = \widehat{BCE}$.
   Comme F, E et B sont alignés, on a $\widehat{FED} + \widehat{CEB} = 180° - \widehat{DEC} = 90°$,
   et comme la somme des angles des triangles vaut 180°, on a aussi $\widehat{BCE} + \widehat{CEB} = 180° - \widehat{EBC} = 90°$,
   on déduit que $\widehat{FED} + \widehat{CEB} = \widehat{BCE} + \widehat{CEB}$,
   puis que $\widehat{FED} = \widehat{BCE}$.
2. Démontrer que $DE = 2 \times DF$.
   Notons $\alpha = \widehat{FED} = \widehat{BCE}$.
   Dans les triangles EBC et FED rectangles respectivement en B et en F, on peut écrire
   $$\sin(\alpha) = \frac{BE}{CE} = \frac{FD}{DE} = \frac{0,5}{1}$$
   d'où $\dfrac{FD}{DE} = 0,5$, et par conséquent $DE = \dfrac{FD}{0,5} = 2 \times FD$.

3. Dans la suite du problème on note $DC = x$ et $DF = y$.
   (a) Démontrer que $x^2 = 4y^2 + 1$.
   Dans le triangle DEC rectangle en E, le *théorème de Pythagore* donne $DE^2 + EC^2 = DC^2$.
   Or $DE = 2y$, donc $(2y)^2 + 1^2 = x^2$, d'où $4y^2 + 1 = x^2$.
   (b) Démontrer que $BC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Le triangle EBC est rectangle en B et le *théorème de Pythagore* donne :
   $$EC^2 = EB^2 + BC^2$$
   d'où
   $1^2 = (0,5)^2 + BC^2$
   $BC^2 = 1 - 0,25$
   $BC^2 = 0,75$
   $BC = \sqrt{0,75}$
   $BC = \sqrt{\dfrac{3}{4}}$
   $BC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   (c) Démontrer que $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2(1+x)}$.
   Les droites (BC) et (FD) sont parallèles. On a donc dans le triangle ABC une configuration de *Thalès*. On peut donc écrire :
   $\dfrac{DF}{BC} = \dfrac{AD}{AC}$
   $\dfrac{y}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{1+x}$
   $y = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1+x}$
   $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2(1+x)}$
4. Déduire des questions précédentes que $x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0$.
   De $x^2 = 1 + 4y^2$, on déduit que $x^2 = 1 + 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2(1+x)}\right)^2 = 1 + \dfrac{3}{(1+x)^2}$.
   Donc
   $x^2 = \dfrac{3 + (1+x)^2}{(1+x)^2}$
   $x^2 = \dfrac{4 + 2x + x^2}{1 + 2x + x^2}$
   $x^2 \times (1 + 2x + x^2) = 4 + 2x + x^2$
   $x^2 + 2x^3 + x^4 - 4 - 2x - x^2 = 0$
   $x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0$
   On a donc démontré l'égalité demandée.
5. Développer le produit $(x+2)\left(x^3 - 2\right)$.
   $(x+2)\left(x^3 - 2\right) = x^4 - 2x + 2x^3 - 4$.

6. En déduire la valeur exacte de x.
   $x^4 - 2x + 2x^3 - 4 = 0$ si et seulement si $(x+2)(x^3-2) = 0$,
   donc si et seulement si $x = -2$ ou $x^3 - 2 = 0$.
   Or x est une distance donc un réel strictement positif.
   x est donc solution de $x^3 = 2$ autrement dit $x = 2^{\frac{1}{3}}$.

6.13 Activité 13 : La racine cubique de 2 par la méthode de Newton

Sujet Type bac- 27 mars 2025

Énoncé

Partie A

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 - 2$.

1. Étudier les variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de la fonction h aux bornes de son ensemble de définition.
3. Calculer $h(0)$ et $h(3)$.
4. Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera λ, sur l'intervalle $[0;3]$.
   Le réel λ sera noté $\sqrt[3]{2}$, appelé racine cubique de 2.
5. Déterminer le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}\left(2x + \dfrac{2}{x^2}\right)$.
On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

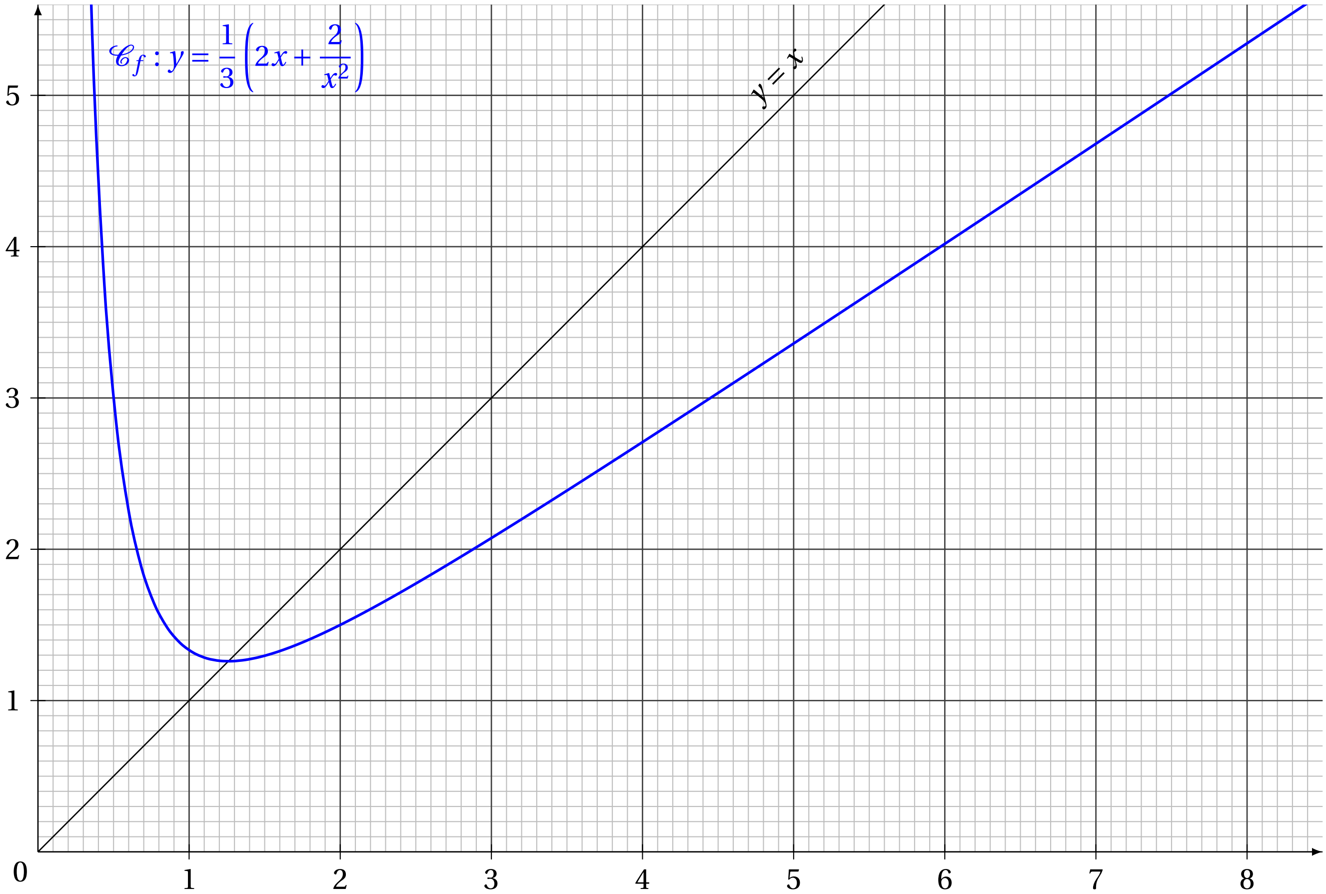
1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
   Donner une interprétation graphique du résultat.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. Justifier que $f(\lambda) - \lambda = 0$.
4. Étudier les variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
5. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe C_f avec la droite Δ d'équation $y = x$.

Partie C

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2u_n + \dfrac{2}{u_n^2}\right)$.

1. Placer sur l'axe des abscisses du graphique donné en Annexe les six premiers termes de la suite (u_n). Laisser les traits de construction apparents.
2. Émettre une conjecture quant au sens de variation de la suite (u_n) et à son éventuelle convergence.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a la propriété $P(n) : \lambda \leq u_{n+1} \leq u_n$.
4. Justifier que la suite (u_n) est convergente. On notera ℓ sa limite.
5. Démontrer que $\ell = \lambda$.
6. Proposer un algorithme, codé en pseudo-code ou en langage PYTHON, qui calcule et affiche les dix premiers termes de la suite (u_n).

Annexe



Éléments de correction

Partie A

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 - 2$.

1. Étudier les variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 3x^2$.
   Donc $h'(x) > 0$ si $x \neq 0$ et $h'(x) = 0$ si $x = 0$. La fonction h est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de la fonction h aux bornes de son ensemble de définition.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - 2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1 - \frac{2}{x^3}\right) = +\infty$.
   De la même manière, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 - 2 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{2}{x^3}\right) = -\infty$.
3. Calculer $h(0)$ et $h(3)$.
   $h(0) = 0^3 - 2 = -2$ et $h(3) = 3^3 - 2 = 25$
4. Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera λ, sur l'intervalle $[0;3]$.
   La fonction h est continue (fonction polynôme) et strictement croissante sur l'intervalle $[0;3]$, or $h(0) < 0$ et $h(3) > 0$, donc, d'après le *Théorème des valeurs intermédiaires*, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution, notée λ.

   Le réel λ sera noté $\sqrt[3]{2}$, appelé racine cubique de 2.

5. Déterminer le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}$.
La fonction h étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $h(\lambda) = 0$, on peut en déduire que $h(x) < 0$ sur $]-\infty; \lambda[$, $h(x) > 0$ sur $]\lambda; +\infty[$, et $h(\lambda) = 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}\left(2x + \dfrac{2}{x^2}\right)$.
On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
Donner une interprétation graphique du résultat.
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$
La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe C_f.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
3. Justifier que $f(\lambda) - \lambda = 0$.
$f(\lambda) - \lambda = \dfrac{1}{3}\left(2\lambda + \dfrac{2}{\lambda^2}\right) - \lambda = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2\lambda^3 + 2}{\lambda^2}\right) - \lambda$
d'où $f(\lambda) - \lambda = \dfrac{2\lambda^3 + 2 - 3\lambda^3}{3\lambda^2} = \dfrac{2 - \lambda^3}{3\lambda^2} = 0$.
(La question 4 de la Partie A donne l'égalité $\lambda^3 - 2 = 0$.)
On peut déduire de ce résultat que $f(\lambda) = \lambda$.
4. Étudier les variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
Pour tout $x > 0$,
$$f'(x) = \frac{1}{3} \times \left(2 - \frac{2 \times 2}{x^3}\right) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{x^3 - 2}{x^3}\right)$$
Pour tout $x > 0$, $\dfrac{2}{3} > 0$ et $x^3 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $x^3 - 2$.
Or, d'après la Partie A, $\begin{cases} x^3 - 2 > 0 & \iff x > \lambda \\ x^3 - 2 = 0 & \iff x = \lambda \\ x^3 - 2 < 0 & \iff 0 < x < \lambda \end{cases}$
Ainsi, $\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{sur }]\lambda; +\infty[\\ f'(x) = 0 & \text{si } x = \lambda \\ f'(x) < 0 & \text{si } x \in]0; \lambda[\end{cases}$
Conclusion : f est strictement décroissante sur $]0; \lambda[$ et strictement croissante sur $]\lambda; +\infty[$.
D'où le tableau :

x	0		λ		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\lambda) = \lambda$	↗	$+\infty$

5. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe C_f avec la droite Δ d'équation $y = x$.
   Comme $x > 0$, le point $M(x; y)$ appartient aux deux courbes si et seulement si $y = x$ et $y = f(x)$.
   Il suffit donc de résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation (E) : $\frac{1}{3}\left(2x + \frac{2}{x^2}\right) = x$.

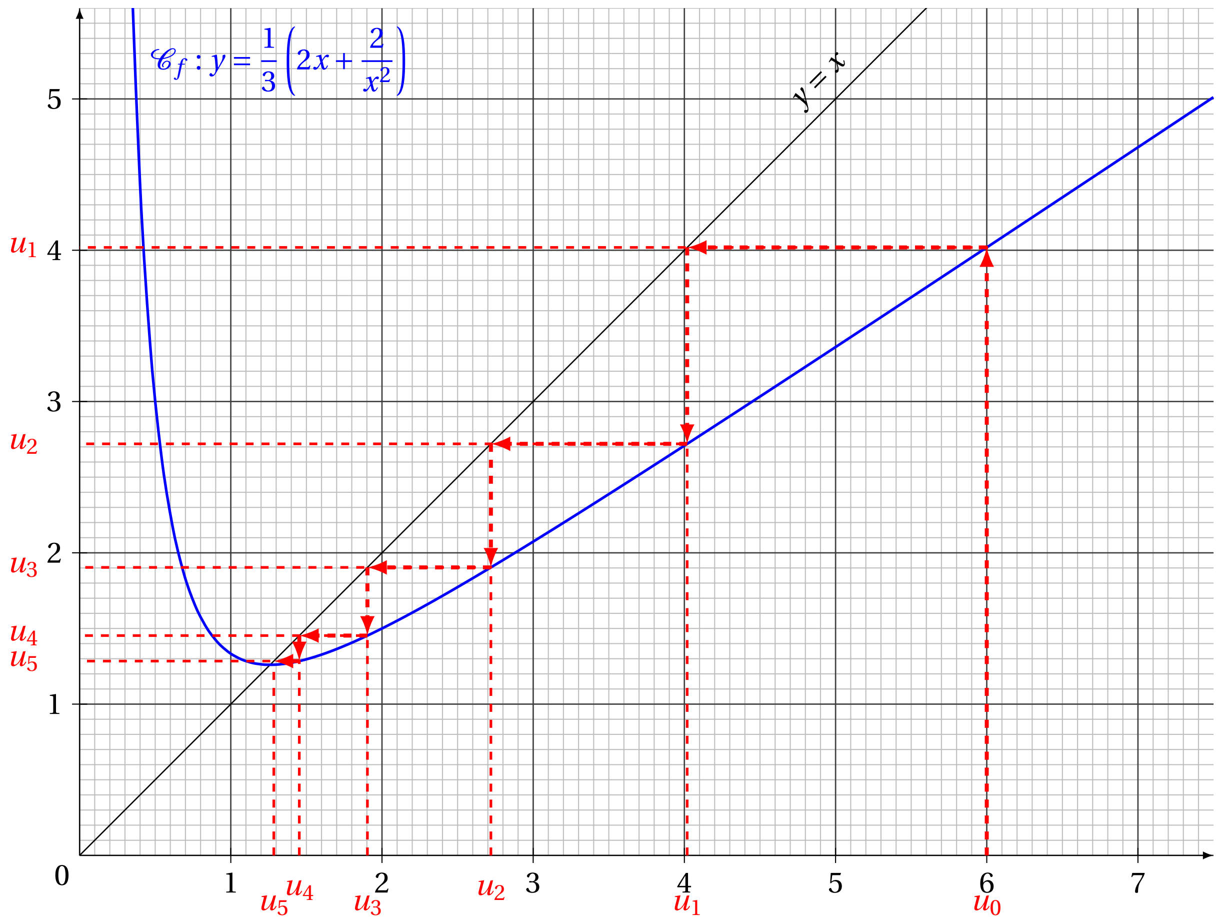
$$(\mathrm{E}) \iff \frac{1}{3}\left(2x + \frac{2}{x^2}\right) - x = 0 \iff \frac{2 - x^3}{3x^2} = 0 \iff 2 - x^3 = 0$$

   La seule solution est donc, d'après la Partie A, $x = \lambda$.
   Les deux courbes se coupent en M de coordonnées $(\lambda; \lambda)$.

Partie C

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2u_n + \frac{2}{u_n^2}\right)$.

1. Placer sur l'axe des abscisses du graphique donné en Annexe les six premiers termes de la suite (u_n). Laisser les traits de construction apparents.



2. Émettre une conjecture quant au sens de variation de la suite (u_n) et à son éventuelle convergence.
   La suite (u_n) semble décroissante et converger vers l'abscisse du point d'intersection M des deux courbes, abscisse qui vaut λ.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a la propriété $P(n) : \lambda \leq u_{n+1} \leq u_n$.
   Initialisation :

$$u_0 = 6 \quad \text{et} \quad u_1 = \frac{1}{3}\left(2 \times 6 + \frac{2}{6^2}\right) = \frac{12 \times 36 + 2}{3 \times 36} \simeq 4{,}018518518518518$$

La Partie A nous indique que $\lambda \in]0;3[$, il est donc évident que $\lambda \leq u_1 \leq u_0$.

Hérédité :

Supposons que, pour un n entier naturel donné, $\lambda \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Or, on a démontré plus haut que la fonction f était strictement croissante sur l'intervalle $[\lambda;+\infty[$, $f(\lambda) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$, soit $\lambda \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

Conclusion : $\mathrm{P}(0)$ est vraie, et, pour tout entier n, $\mathrm{P}(n)$ vraie $\Rightarrow \mathrm{P}(n+1)$ vraie.

Par le *principe de récurrence*, $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Justifier que la suite (u_n) est convergente. On notera ℓ sa limite.

   On vient de démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \leq u_{n+1} \leq u_n$, donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par λ.

   Le *théorème de convergence monotone* nous dit alors que la suite (u_n) est convergente.

5. Démontrer que $\ell = \lambda$.

   Si $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, alors, la fonction f étant continue sur $]0;+\infty[$, ℓ est solution de l'équation $f(\ell) = \ell$.

   D'après ce qui précède, $\ell = \lambda$.

6. Proposer un algorithme, codé en pseudo-code ou en langage Python, qui calcule et affiche les dix premiers termes de la suite (u_n).

   On propose l'algorithme suivant, codé en pseudo-code :

Algorithme 2 : Calculs de termes

Fonction f *(x : réel) : réel*

   retourner $\frac{1}{3} \times \left(2x + \frac{2}{x^2}\right)$

end

$u \leftarrow 6$

pour $i = 0$ **to** 9 **faire**

   Afficher i et u

   $u \leftarrow f(u)$

fin pour

et celui-ci, codé en langage Python

Code Python

```python
def f(x):
        return((1/3)*(2*x+2/x**2))
u=6
for i in range(10):
        print(f"u({i})={u}")
        u=f(u)
```

Si on l'exécute, on obtient alors ce qui suit :

Sortie Python

```
u(0)=6
u(1)=4.018518518518518
u(2)=2.7202958726173625
u(3)=1.9036205545405436
u(4)=1.453050777037291
u(5)=1.2844532805340247
u(6)=1.260386616704656
```

u(7)=1.259921221846688
u(8)=1.2599210498948965
u(9)=1.259921049894873

Remarque : la notation $u(i)$ rappelle que la suite (u_n) est d'abord une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
On peut en déduire que $\sqrt[3]{2}$ a pour valeur approchée 1,259921049894873.