Périmètre d'une ellipse

Aslı Grimaud

Docteure et ingénieure en informatique

Professeure agrégée d'informatique (ex-mathématiques)

Professeure d'informatique en MP2I/MPI

Informatique

MP2I

Cours complets, exercices corrigés et projets guidés
pour les classes préparatoires

ellipses

septembre 2025

Grimaud & Grimaud

Journées Académiques de l'IREM de Lille

28 Mars 2025

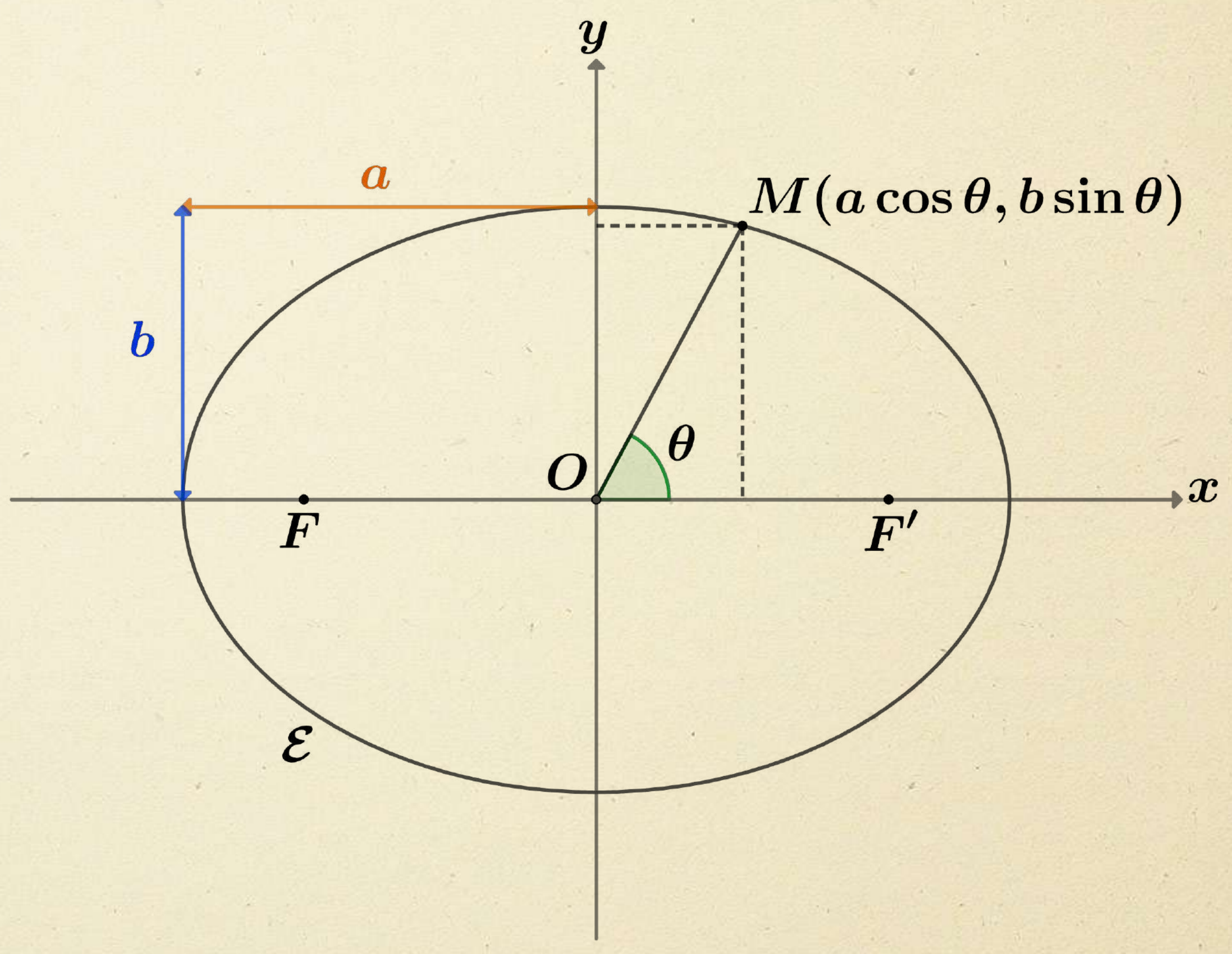
asli.grimaud@ac-lille.fr

Nombres flottants

$$\frac{1}{n} \times n \stackrel{?}{=} 1$$

multiplication binaire

Ellipse



addition binaire

- *programmation impérative*
- *programmation fonctionnelle*

Réels vs Nombres flottants

$$\frac{1}{n} \times n \stackrel{?}{=} 1$$

Mathématiques

Réels $\mathbb{R}$

notion abstraite

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \times n = 1$$

Informatique

Nombres flottants

représentation des nombres réels

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \times n \stackrel{?}{=} 1$$

Nombres flottants (8 octets)

$$\frac{1}{3} \times 3 = 1$$

$$\frac{1}{24} \times 24 = 1$$

$$\frac{1}{7} \times 7 = 1$$

$$\frac{1}{151} \times 151 = 1$$

$$\frac{1}{49} \times 49 \neq 1$$

$$\frac{1}{103} \times 103 \neq 1$$

$$\frac{1}{98} \times 98 \neq 1$$

$$\frac{1}{n} \times n \stackrel{?}{=} 1$$

Nombres flottants

Python : **`float`** (8 octets)
C : **`float`** (4 octets), **`double`** (8 octets)
OCaml : **`float`** (8 octets)

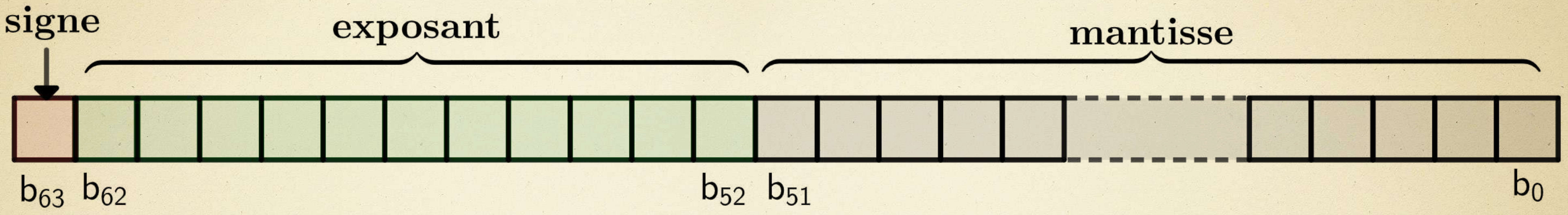
IEEE 754
précision simple « binary32 »
précision double « binary64 »

Notation scientifique d'un nombre réel en base 2

$$x = S \times 2^E \times M$$

- $S = \pm 1$ représente le signe ;
- $E \in \mathbb{Z}$ représente l'exposant ;
- $M \in [1;2[$ représente la partie significative (en binaire) appelé la mantisse.

Nombres flottants (8 octets)



- *Entier S (s=1 bit) : Le bit du poids plus fort est le signe du bit*
- *Entier E (e=11 bits) : L'exposant biaisé pour stocker sous forme d'entier non signé*

$$1 \leq E' = E + 2^{e-1} - 1 \leq 2^e - 2$$

- *Nombre M (m=52 bits) : La mantisse stockée par les premiers bits après la virgule*
- *Si* $E' = M = 0$ *alors* $x = \pm 0$
- *Si* $E' = 2^e - 1$ *et* $M = 0$ *alors* $x = \pm \infty$
- *Si* $E' = 2^e - 1$ *et* $M \neq 0$ *alors* $x = NaN$

$$x = \frac{1}{3}$$

Nombres flottants (8 octets)

$$x = (-1)^0 \times 2^{-2} \times \frac{4}{3}$$

$S = 1$ *puisque* $x > 0$	*Le bit de signe vaut* `0`.
$E = -2$	$E' = -2 + 1023 = 1021$
$M = \frac{4}{3} \in [1;2[$	$M = \frac{4}{3} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}}$

`0 01111111101 0101010101010101010101010101010101010101010101010101|0101…`

0.333333333333333314829616256247390992939472198486328125

$y = 3$

Nombres flottants (8 octets)

$$y = (-1)^0 \times 2^1 \times \frac{3}{2}$$

$S = 1$ *puisque* $y > 0$	*Le bit de signe vaut* `0`.
$E = 1$	$E' = 1 + 1023 = 1024$
$M = \frac{3}{2} \in [1;2[$	$M = 1 + \frac{1}{2}$

`0  00010000000 10000000000000000000000000000000000000000000000000000|0000…`

Nombres flottants (8 octets)

$$x \times y = \frac{1}{3} \times 3 = \left((-1)^0 \times (-1)^0\right) \times \left(2^{-2} \times 2^1\right) \times \left(\frac{4}{3} \times \frac{3}{2}\right)$$

  1,0101010101010101010101010101010101010101010101010101

$\times$ 1,1

   10101010101010101010101010101010101010101010101010101

$+$10101010101010101010101010101010101010101010101010101

  111111111111111111111111111111111111111111111111111111

~~1,1111111111111111111111111111111111111111111111111111~~1

10,0000000000000000000000000000000000000000000000000000

$$x \times y = \frac{1}{3} \times 3 = \left((-1)^0 \times (-1)^0\right) \times \left(2^{-2} \times 2^1\right) \times 2^1 = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Nombres flottants (4 octets)

$$x = (-1)^0 \times 2^{-2} \times \frac{4}{3}$$

$S = 1$ *puisque* $x > 0$	*Le bit de signe vaut* `0`.
$E = -2$	$E' = -2 + 127 = 125$
$M = \frac{4}{3} \in [1; 2[$	$M = \frac{4}{3} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}}$

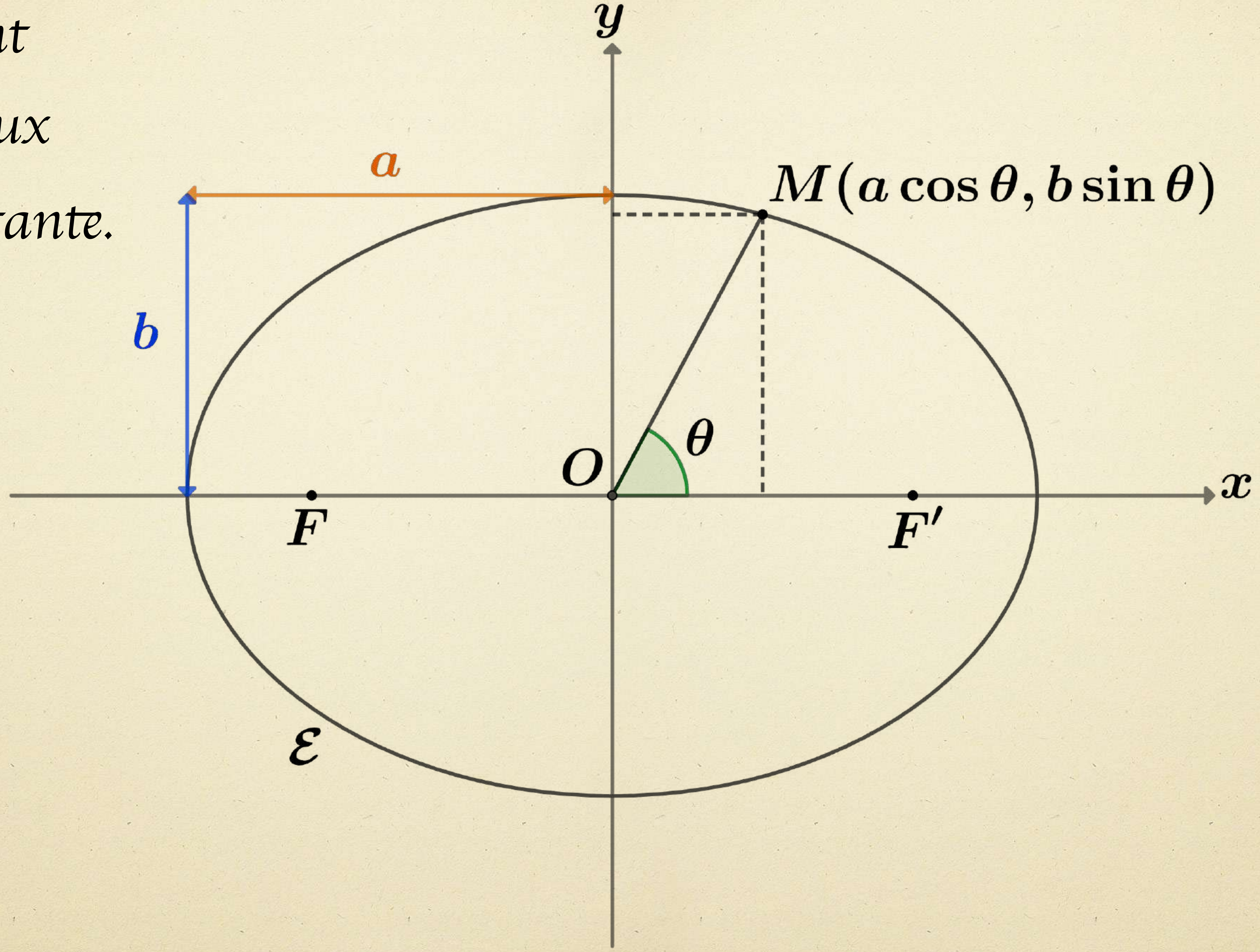
`0  01111101  ~~01010101010101010101010~~|1010…`

`             01010101010101010101011`

0.3333333333333331482962

Ellipse

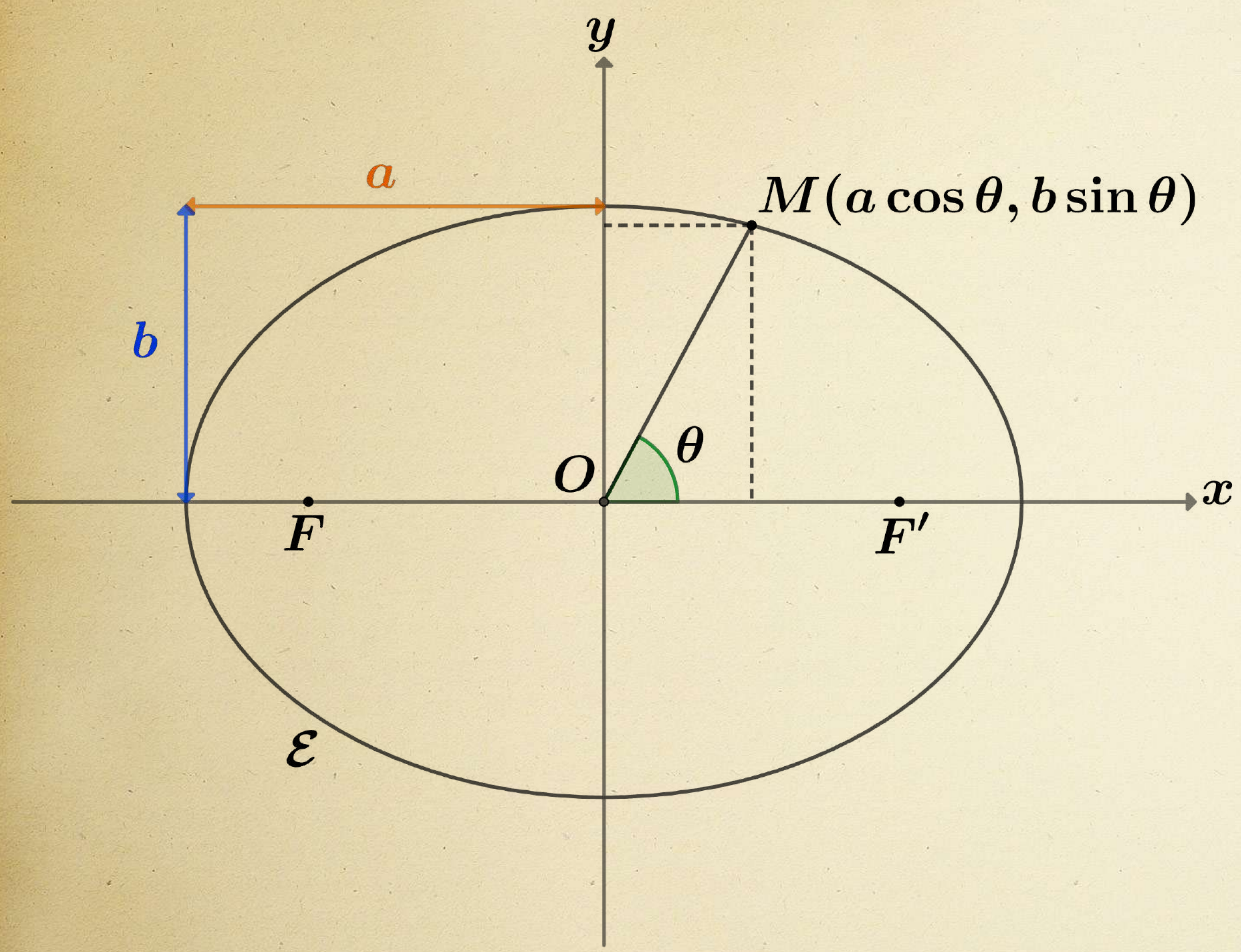
Ensemble des points dont
la somme des distances aux
deux foyers F et F' est constante.



$a, b \in \mathbb{R}^{+*}$

$$M(x, y) \in \mathscr{E} \Leftrightarrow \exists \theta \in [0,2\pi[, x = a\cos\theta \text{ et } y = b\sin\theta$$

Ellipse



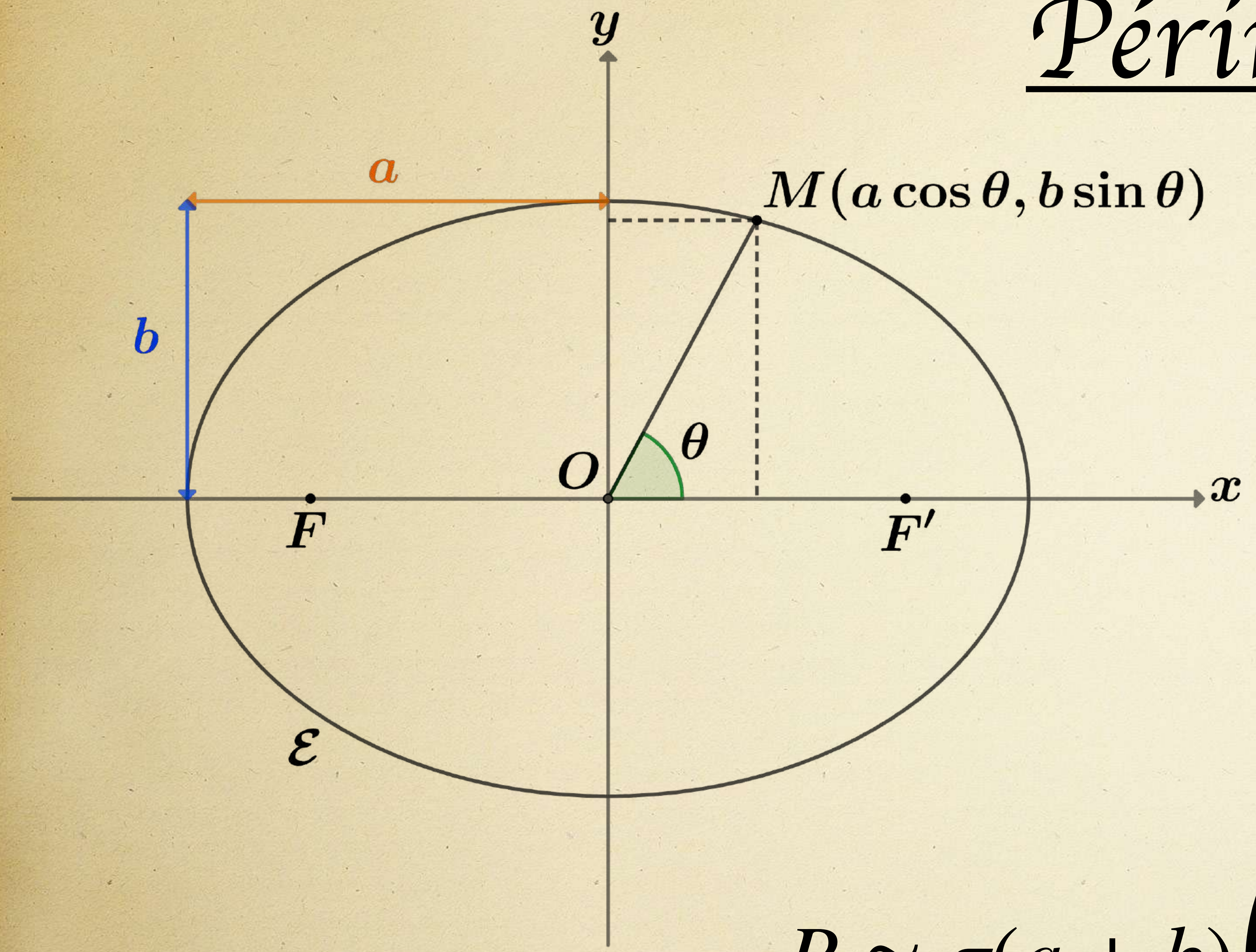
Aire

$$\pi \times a \times b$$

Périmètre

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\sin^2\theta\,d\theta}$$

Périmètre d'une ellipse



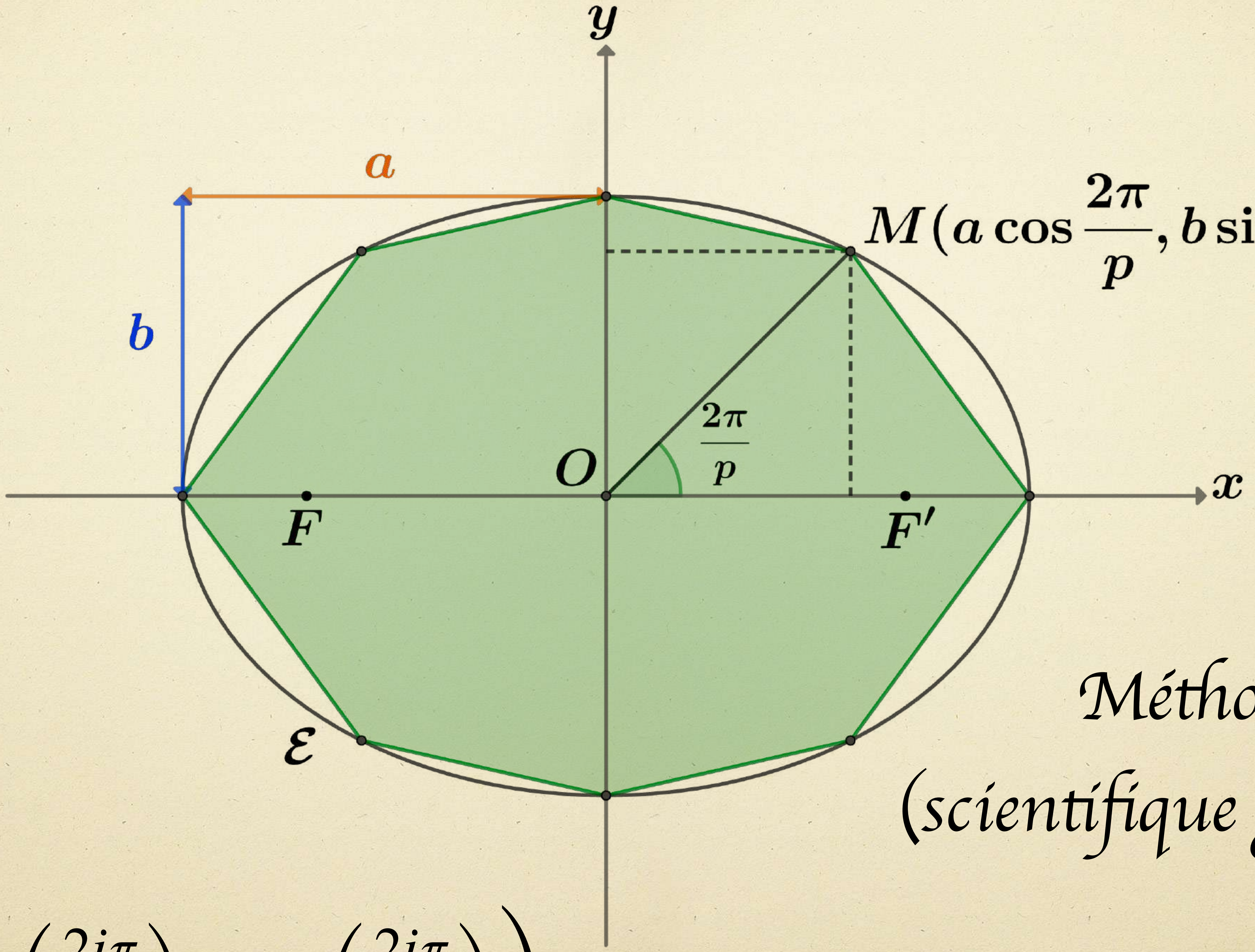
Formule de Ramanujan
(mathématicien indien, 1887-1920)

$$P \approx \pi(a+b)\left(1+\frac{3h}{10+\sqrt{4-3h}}\right) \quad \textit{avec} \quad h=\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$$

Périmètre d'une ellipse - implémentation

$p = 2^n$ côtés

$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

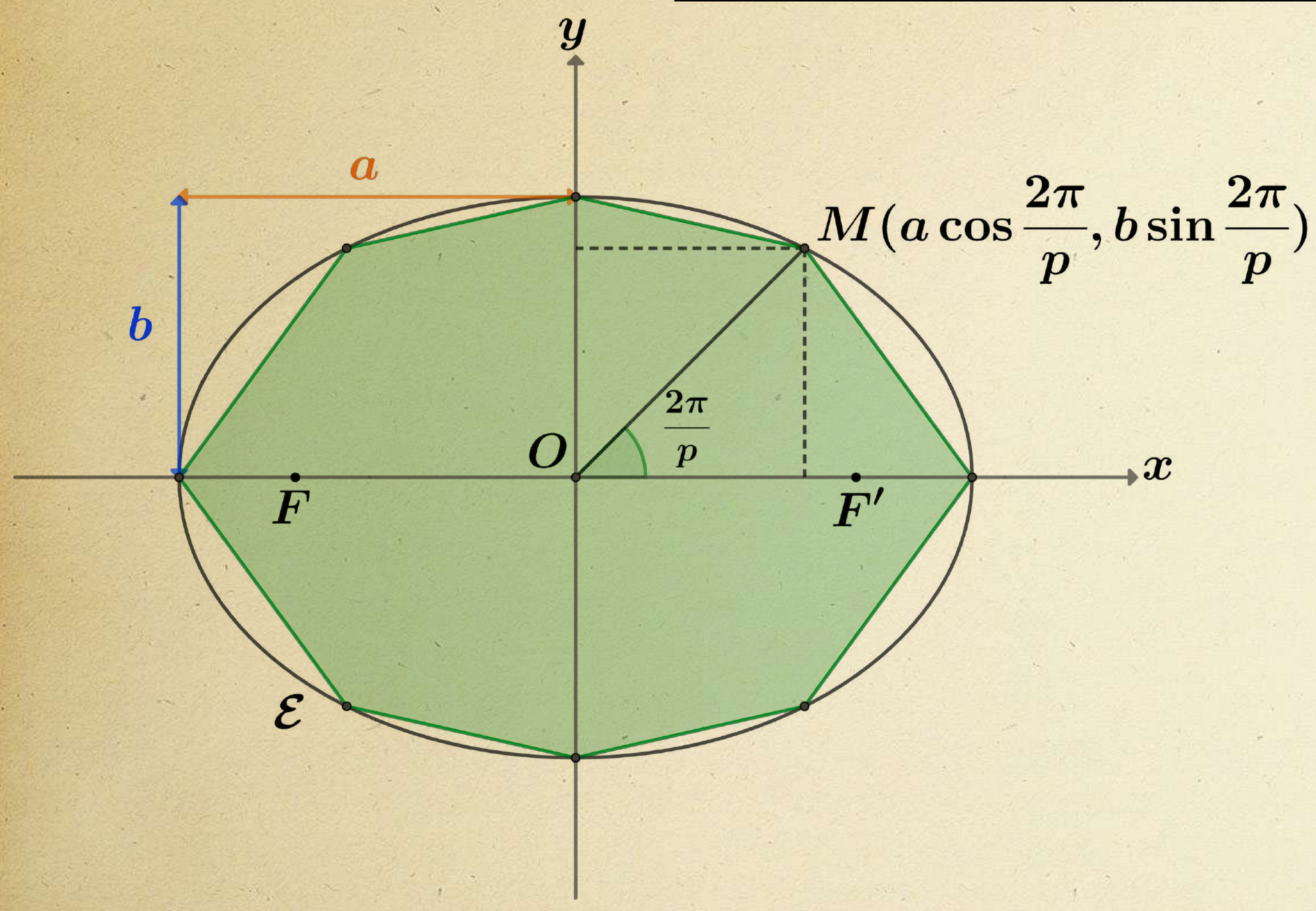


Méthode d'Archimède

(scientifique grec, 287-212 av.J.C.)

$\forall i \in [\![0, 2^n - 1]\!], M_i\left(a\cos\left(\frac{2i\pi}{p}\right), b\sin\left(\frac{2i\pi}{p}\right)\right)$ et $\forall i \in [\![0, 2^n - 1]\!], l_i = M_iM_{i+1}$ *avec* $M_{2^n} = M_0$

Périmètre d'une ellipse - version impérative



$$P_{a=b=1} = 2\pi \approx l_0 + l_1 + l_2 + l_3 \ldots + l_{2^n-1}$$

- *impérative : pour n=23, on s'approche π de*

`0.00000000000000532907`

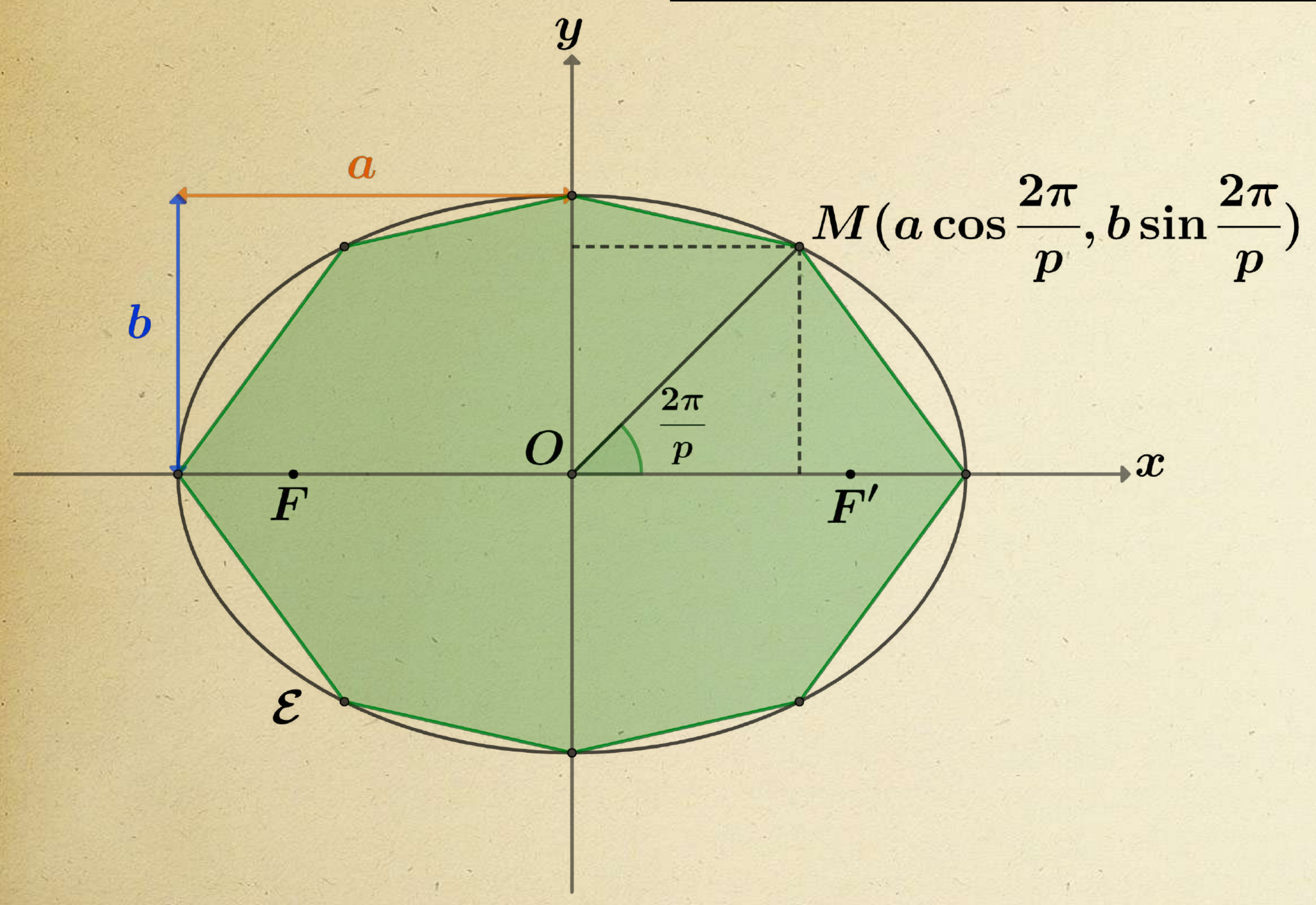
$p = 2^n$ côtés

$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Erreurs dues aux nombres flottants :

- *arrondi au supérieur*
- *perte d'information*

Périmètre d'une ellipse - version impérative




```
let approx_perim_ellipse1 n a b =
  if n<2 then
    failwith "approx_perim_ellipse1. Wrong parameter, need n>=2."
  else
    let p = int_of_float(2.**float_of_int(n)) in
    let perim = ref 0. in
    for i=0 to p-1 do
      let a1 = float_of_int(i) *. 2. *. Float.pi /. float_of_int(p) in
      let a2 = float_of_int(i+1) *. 2. *. Float.pi /. float_of_int(p) in
      let point1 = (a *. (cos a1), b *. (sin a1)) in
      let point2 = (a *. (cos a2), b *. (sin a2)) in
      perim := !perim +. (distance point1 point2);
    done;
    !perim
```

Arrondi au supérieur

Exemple : Addition binaire avec 4 chiffres significatifs après la virgule

$$x = (-1)^0 \times 2^0 \times \mathtt{1{,}0000} = 1$$

$$y = (-1)^0 \times 2^{-3} \times \mathtt{1{,}0110} = 0{,}171875$$

```
  1,0000
+ 0,0010110
  ---------
  ~~1,0010~~|110
  1,0011
```

Cela vaut : 1,1875 > 1,171875

Perte d'information

$$P_{a=b=1} = 2\pi \approx \left(\ldots \left(\left((l_0 + l_1) + l_2 \right) + l_3 \right) \ldots + l_{2^n - 1} \right)$$

Exemple : Addition binaire avec 4 chiffres significatifs après la virgule

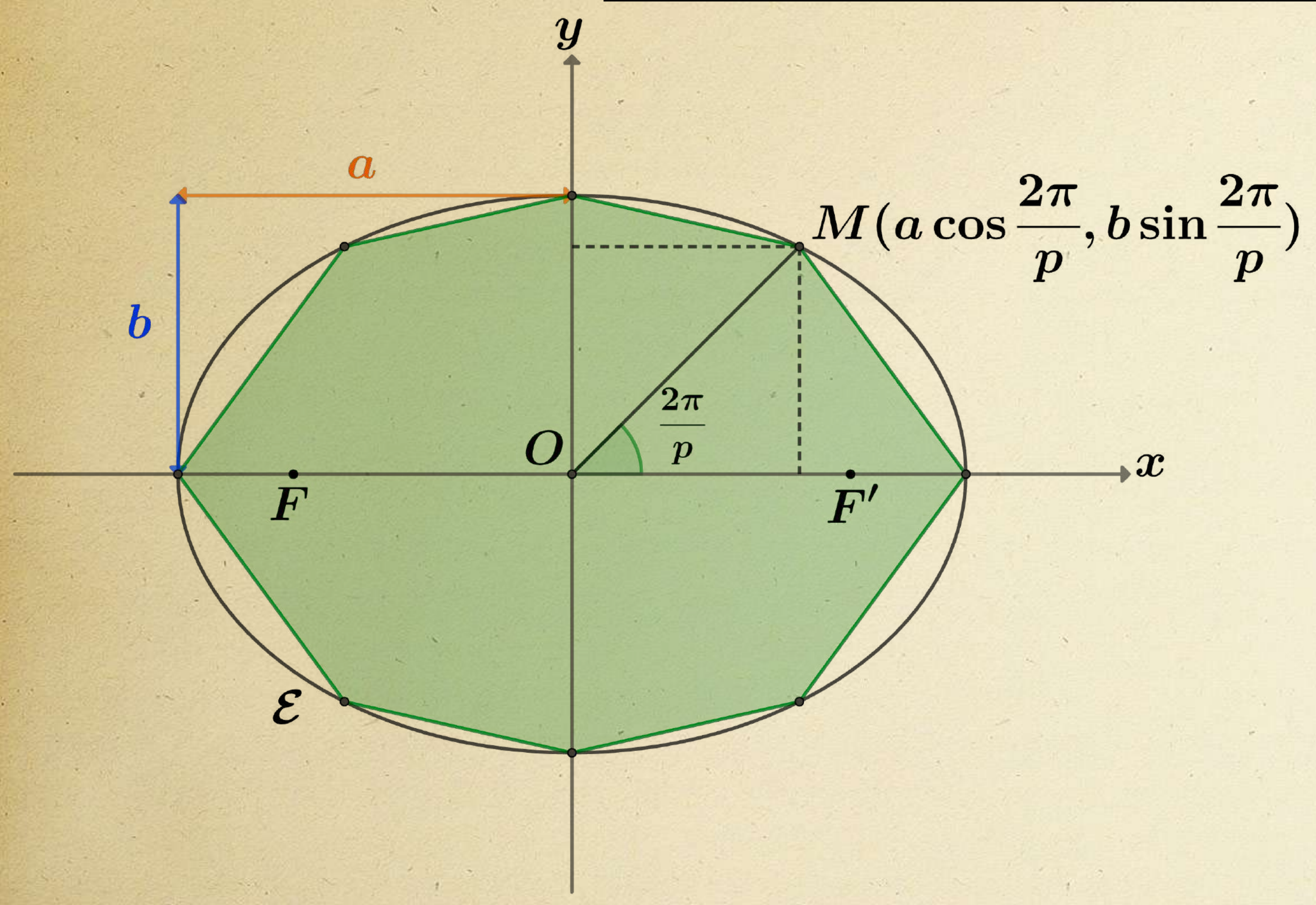
$$x = (-1)^0 \times 2^0 \times \mathtt{1,0000} = 1$$

$$y = (-1)^0 \times 2^{-6} \times \mathtt{1,0110} = 0{,}021484375$$

```
  1,0000
+ 0,0000010110
  1,0000|010110
```

Cela vaut : 1, y est ignoré

Périmètre d'une ellipse - version fonctionnelle



$$P_{a=b=1} = 2\pi \approx l_0 + l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_{2^n-1}$$

$$P_{a=b=1} = 2\pi \approx \Big(\ldots \big((l_0 + l_1) + (l_2 + l_3) \big) + \ldots + l_{2^n-1} \ldots \Big)$$

$p = 2^n$ côtés

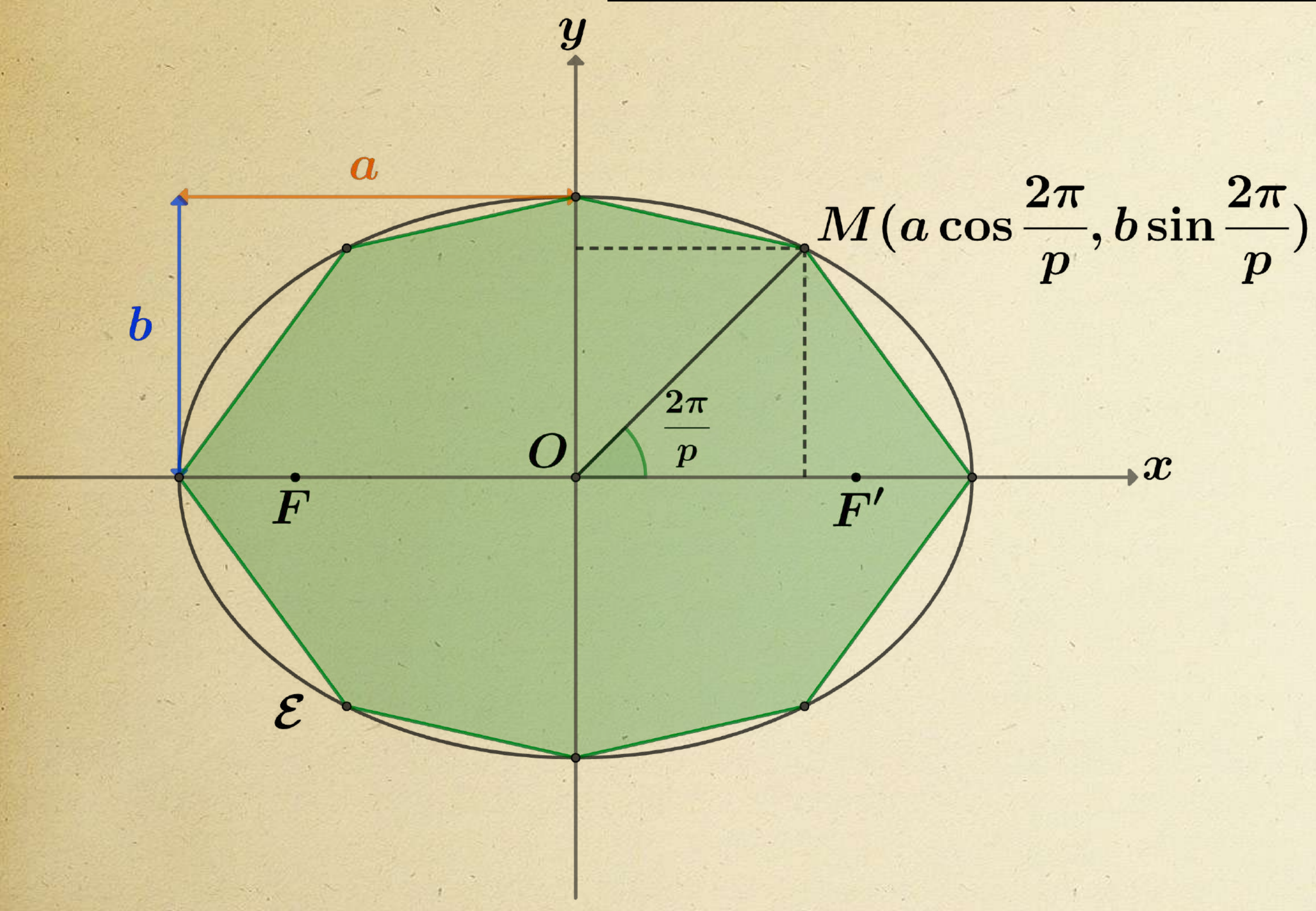
$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

- *impérative : pour n=23, on s'approche π de*

  `0.000000000000000532907`

- *fonctionnelle : pour n=27, on a* `Float.pi`

Périmètre d'une ellipse - version fonctionnelle




```
let approx_perim_ellipse2 n a b =
  if n<2 then
    failwith "approx_perim_ellipse2. Wrong parameter, need n>=2."
  else
    let rec aux n a b theta1 theta2 =
      if n=0 then
        let point1 = (a *. (cos theta1), b *. (sin theta1)) in
        let point2 = (a *. (cos theta2), b *. (sin theta2)) in
        distance point1 point2
      else
        (aux (n-1) a b theta1 ((theta1+.theta2)/.2.)) +.
        (aux (n-1) a b ((theta1+.theta2)/.2.) theta2)
    in
    aux n a b 0. (2. *. Float.pi)
```

Périmètre d'une ellipse

Aslı Grimaud

Docteure et ingénieure en informatique

Professeure agrégée d'informatique (ex-mathématiques)

Professeure d'informatique en MP2I/MPI

Informatique

MP2I

Cours complets, exercices corrigés et projets guidés pour les classes préparatoires

ellipses

septembre 2025

Grimaud & Grimaud

Journées Académiques de l'IREM de Lille

MERCI

Mars 2025

asli.grimaud@ac-lille.fr