Problème du dénombrement des Vectominos

Voici l'extrait d'un exposé présenté lors du dernier colloque I.R.E.M. à Tatihou :

« Il y a quatre ans environ, une équipe de chercheurs de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie a découvert l'existence d'êtres bi-cellulaires pouvant être modélisés par un couple de vecteurs de coordonnées entières (x,y) comprises entre –n et n inclus.

Il a été prouvé, par la suite, que les êtres bi-cellulaires (u,v) et (v,u) sont différents, mais pas (u,v) et (-v,-u). De plus, certains ont des cellules qui donnent par addition un vecteur de coordonnées comprises, elles aussi, entre –n et n inclus. Ceux-ci ont été appelés Vectominos, ce sont les plus « sociables ».

Enfin, une étude récente a montré la présence de Vectominos polymorphes (…) »

Selon vous, combien peut-il exister de Vectominos différents non polymorphes ?

Pour ceux qui n'auraient rien compris à l'énoncé précédent, voici une formulation beaucoup plus claire :

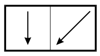
On pose : $Z_n = \{ -n , -n+1, \ldots , n-1, n \}$

$V_n = \{ (x,y) \in Z_n \times Z_n \}$

$W_n = \{ \{ (u,v),(-v,-u) \} \ / \ u + v \in V_n , u \in V_n , v \in V_n \}$

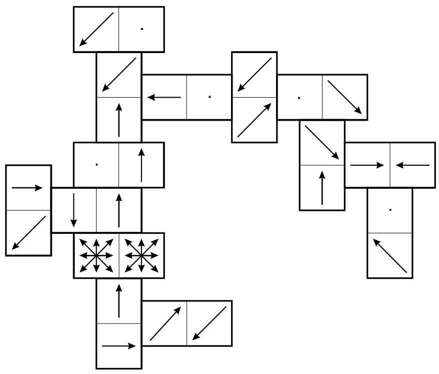
Calculer card W_n .

Problème 1 *(niveau ≥ 3^e^)*

a) Pourquoi n'existe-t-il pas de Vectomino comme celui-ci ? 

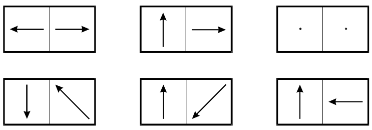
b) Sachant que chaque Vectomino est unique, dessiner sur une feuille à petits carreaux toutes les pièces du jeu.

Problème 2 *(niveau ≥ 3^e^)*



On a représenté ci-contre une partie en cours.

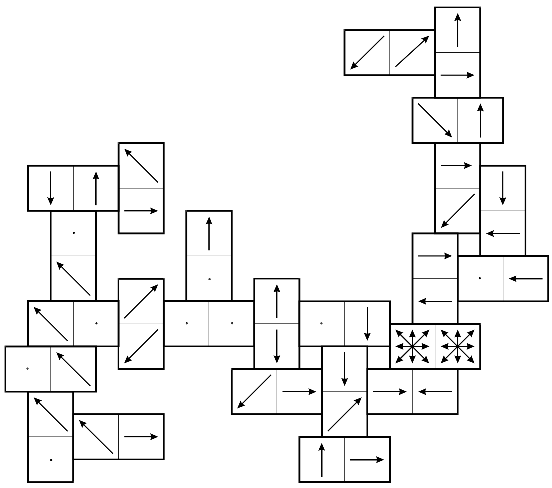
Voici les pièces de Victor.



Victor joue deux Vectominos à suivre et gagne la partie.

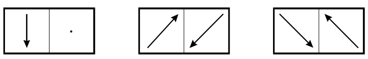
Trouver lesquels et les placer.

Problème 3 *(niveau ≥ 3^e^)*

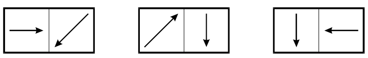


Voici la partie en cours opposant Juliette à Léo.

Voici les pièces de Juliette :



Voici celles de Léo :

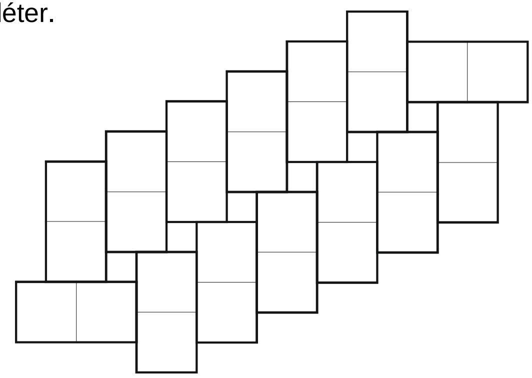


Si c'est à Juliette de jouer, elle peut gagner en un coup ! Lequel ?

Si c'est le tour de Léo, comment va-t-il s'en sortir pour gagner la partie ?

Problème 4 *(niveau ≥ 3e)*

Compléter.

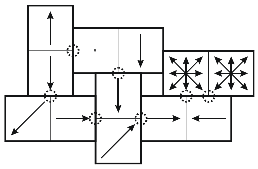


Problème 5 *(niveau ≥ terminale)*

- Les vecteurs considérés dans le jeu des Vectominos ont des coordonnées entières comprises entre –1 et 1 inclus. De façon générale, quel est le nombre V (n) de Vectominos lorsque les coordonnées entières sont comprises entre –n et n inclus (on ne considère pas le polymorphe) ?
- Prouver que V (n) est impair.
- Prouver que le chiffre des unités de V (n) appartient à { 1 ; 3 ; 9 }.
- Prouver que le chiffre des dizaines de V (n) appartient à { 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 }.
- Prouver que V (n) – n ≡ V (n – 1) (mod 9).

Problème 6 *(niveau ≥ 3e)*

Les pièces posées sur la table forment un réseau composé de p Vectominos.
Ce réseau comporte un certain nombre L(p) de liaisons qui correspond au score d'une partie jouée en solitaire. Sur l'exemple ci-contre, le nombre de liaisons est 7.



On définit aussi le coefficient de liaison du réseau C (p) = $\frac{L\,(p)}{p}$. Sur l'exemple, on a C (6) = $\frac{7}{6}$.

Quels sont les maxima de L et de C ?

Problème 7 *(niveau ≥ ?)*

Combien y a-t-il de réseaux différents ?