

Journées académiques de l'IREMS de Lille

Analyse en Composantes Principales

Fabrice Eudes - Jean-Marc Duquesnoy

IREMS de Lille-Groupe ArCSiN



Version 13 février 2026

Objectifs de l'atelier

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

Les objectifs de cet atelier seront, entre autres, de

- présenter l'**Analyse en Composantes Principales (ACP)** ;

Objectifs de l'atelier

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

Les objectifs de cet atelier seront, entre autres, de

- présenter l'**Analyse en Composantes Principales (ACP)** ;
- découvrir plusieurs exemples d'**ACP** et de **Clustering** ;

Objectifs de l'atelier

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

Les objectifs de cet atelier seront, entre autres, de

- présenter l'**Analyse en Composantes Principales (ACP)** ;
- découvrir plusieurs exemples d'**ACP** et de **Clustering** ;
- vérifier sur un exemple de données à trois variables, que la matrice de corrélation associée, matrice symétrique à coefficients réels, est alors diagonalisable, et que, les vecteurs propres forment une base orthonormée ;

Objectifs de l'atelier

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

Les objectifs de cet atelier seront, entre autres, de

- présenter l'**Analyse en Composantes Principales (ACP)** ;
- découvrir plusieurs exemples d'**ACP** et de **Clustering** ;
- vérifier sur un exemple de données à trois variables, que la matrice de corrélation associée, matrice symétrique à coefficients réels, est alors diagonalisable, et que, les vecteurs propres forment une base orthonormée ;
- s'appropriier les *scripts.R* mis à disposition pour réaliser différentes **ACP** sous R ;

Objectifs de l'atelier

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

Les objectifs de cet atelier seront, entre autres, de

- présenter l'**Analyse en Composantes Principales (ACP)** ;
- découvrir plusieurs exemples d'**ACP** et de **Clustering** ;
- vérifier sur un exemple de données à trois variables, que la matrice de corrélation associée, matrice symétrique à coefficients réels, est alors diagonalisable, et que, les vecteurs propres forment une base orthonormée ;
- s'approprier les *scripts.R* mis à disposition pour réaliser différentes **ACP** sous R ;
- revoir quelques notions mathématiques nécessaires à la compréhension de la théorie de l'**ACP**.

Sur quel tableau de données va-t-on réaliser une ACP ?

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

On dispose d'un tableau de données brutes X comportant n individus (en lignes) et p variables (en colonnes).

- On centre et réduit chaque variable pour éliminer les effets des unités de mesure.

Sur quel tableau de données va-t-on réaliser une ACP ?

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

On dispose d'un tableau de données brutes X comportant n individus (en lignes) et p variables (en colonnes).

- On centre et réduit chaque variable pour éliminer les effets des unités de mesure.
- On obtient donc un tableau de données centrées et réduites Z .

Sur quel tableau de données va-t-on réaliser une ACP ?

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

On dispose d'un tableau de données brutes X comportant n individus (en lignes) et p variables (en colonnes).

- On centre et réduit chaque variable pour éliminer les effets des unités de mesure.
- On obtient donc un tableau de données centrées et réduites Z .
- On assimile le tableau de données Z à la matrice $Z = \left(z_i^j \right)$, de taille $n \times p$.

Sur quel tableau de données va-t-on réaliser une ACP ?

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

On dispose d'un tableau de données brutes X comportant n individus (en lignes) et p variables (en colonnes).

- On centre et réduit chaque variable pour éliminer les effets des unités de mesure.
- On obtient donc un tableau de données centrées et réduites Z .
- On assimile le tableau de données Z à la matrice $Z = (z_i^j)$, de taille $n \times p$.
- Les colonnes de la matrice Z ont pour moyenne arithmétique 0 et écart-type 1.

Sur quel tableau de données va-t-on réaliser une ACP ?

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

On dispose d'un tableau de données brutes X comportant n individus (en lignes) et p variables (en colonnes).

- On centre et réduit chaque variable pour éliminer les effets des unités de mesure.
- On obtient donc un tableau de données centrées et réduites Z .
- On assimile le tableau de données Z à la matrice $Z = \left(z_i^j \right)$, de taille $n \times p$.
- Les colonnes de la matrice Z ont pour moyenne arithmétique 0 et écart-type 1.
- La matrice de corrélation R est égale à $\frac{1}{n} Z^t Z$, où Z^t est la matrice transposée de la matrice Z . La matrice R est symétrique dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre p .

Objectifs de l'ACP ?

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

Dans l'espace à p dimensions (une dimension par variable), chaque individu est un point (ou un vecteur car les données ont été centrées et réduites). L'ensemble des points forme un nuage de centre de gravité O^p .

L'ACP **normée** va permettre, entre autres,

- d'identifier des groupes de variables fortement ou faiblement corrélées linéairement,

Objectifs de l'ACP ?

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

Dans l'espace à p dimensions (une dimension par variable), chaque individu est un point (ou un vecteur car les données ont été centrées et réduites). L'ensemble des points forme un nuage de centre de gravité O^p .
L'**ACP normée** va permettre, entre autres,

- d'identifier des groupes de variables fortement ou faiblement corrélées linéairement,
- de déterminer dans quelles directions s'étire le nuage des individus, et quelles sont les directions, appelées **axes factoriels**, dont l'allongement est maximal,

Objectifs de l'ACP ?

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

Dans l'espace à p dimensions (une dimension par variable), chaque individu est un point (ou un vecteur car les données ont été centrées et réduites). L'ensemble des points forme un nuage de centre de gravité O^p .

L'ACP **normée** va permettre, entre autres,

- d'identifier des groupes de variables fortement ou faiblement corrélées linéairement,
- de déterminer dans quelles directions s'étire le nuage des individus, et quelles sont les directions, appelées **axes factoriels**, dont l'allongement est maximal,
- de déterminer quels sont les individus et les variables qui contribuent le plus à la construction de ces axes ?

Objectifs de l'ACP ?

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

Dans l'espace à p dimensions (une dimension par variable), chaque individu est un point (ou un vecteur car les données ont été centrées et réduites). L'ensemble des points forme un nuage de centre de gravité O^p .

L'ACP **normée** va permettre, entre autres,

- d'identifier des groupes de variables fortement ou faiblement corrélées linéairement,
- de déterminer dans quelles directions s'étire le nuage des individus, et quelles sont les directions, appelées **axes factoriels**, dont l'allongement est maximal,
- de déterminer quels sont les individus et les variables qui contribuent le plus à la construction de ces axes ?
- de déterminer un sous-espace de dimension inférieure à p qui conserve au maximum l'information contenue dans les données.

Inertie du nuage d'individus.

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

- L'inertie du nuage d'individus, notée I_g , est égale à la moyenne des carrés des distances au centre de gravité du nuage, donc à l'origine O^p , les données ayant été centrées et réduites.

$$I_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(z_i, O^p)$$

Inertie du nuage d'individus.

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

- L'inertie du nuage d'individus, notée I_g , est égale à la moyenne des carrés des distances au centre de gravité du nuage, donc à l'origine O^p , les données ayant été centrées et réduites.

$$I_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(z_i, O^p)$$

- On démontre que cette inertie est égale au nombre de variables, donc $I_g = p$.

Inertie d'un axe

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

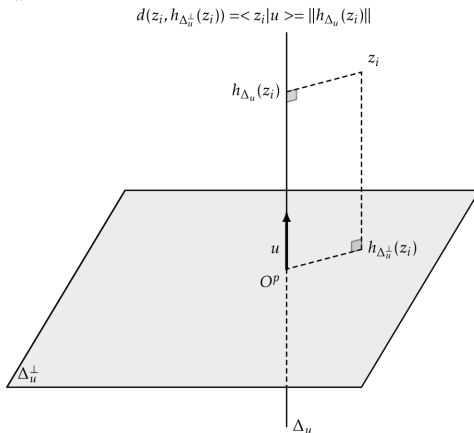
- Soit Δ_u un axe (sous-espace vectoriel de dimension 1, donc une droite !) de vecteur unitaire u . L'inertie de cet axe, notée I_{Δ_u} , est égale à la moyenne des carrés des distances des individus z_i à leurs projetés orthogonaux $h_{\Delta_u}(z_i)$ sur cet axe.

$$I_{\Delta_u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(z_i, h_{\Delta_u}(z_i))$$

- Si $\Delta_u^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de Δ_u dans $\mathbb{R}^p$, alors l'inertie $I_{\Delta_u^\perp}$ permet de mesurer l'allongement du nuage d'individus selon l'axe Δ_u .
 $I_{\Delta_u^\perp}$ est appelée **Inertie portée** ou **Inertie expliquée** par l'axe Δ_u .

Inertie d'un axe

- La figure qui suit traduit géométriquement l'inertie portée par l'axe Δ_u :



- On démontre que

$$I_{\Delta_u^\perp} = u^t R u$$

Recherche du premier axe factoriel

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

**Recherche du
premier axe factoriel**

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

- On cherche l'axe Δ_u dont l'inertie expliquée est la plus grande.
On cherche donc à résoudre le problème de maximisation suivant :

$$\begin{cases} \max u^t R u \\ u^t u = 1 \end{cases}$$

Recherche du premier axe factoriel

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duchesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

- On cherche l'axe Δ_u dont l'inertie expliquée est la plus grande.
On cherche donc à résoudre le problème de maximisation suivant :
$$\begin{cases} \max u^t R u \\ u^t u = 1 \end{cases}$$
- On rappelle que la matrice R est symétrique, donc diagonalisable, ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, rangées dans l'ordre décroissant, sont alors positives, et les vecteurs propres $(v_1, \dots, v_p)$ associés forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^p$.

Recherche du premier axe factoriel

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

- On cherche l'axe Δ_u dont l'inertie expliquée est la plus grande.
On cherche donc à résoudre le problème de maximisation suivant :
$$\begin{cases} \max u^t R u \\ u^t u = 1 \end{cases}$$
- On rappelle que la matrice R est symétrique, donc diagonalisable, ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, rangées dans l'ordre décroissant, sont alors positives, et les vecteurs propres $(v_1, \dots, v_p)$ associés forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^p$.
- On démontre que cet axe est le sous-espace propre, noté D_1 , associé à la plus grande valeur propre λ_1 et de vecteur propre v_1 de la matrice R .

Recherche du premier axe factoriel

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

- On cherche l'axe Δ_u dont l'inertie expliquée est la plus grande.
On cherche donc à résoudre le problème de maximisation suivant :
$$\begin{cases} \max u^t R u \\ u^t u = 1 \end{cases}$$
- On rappelle que la matrice R est symétrique, donc diagonalisable, ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, rangées dans l'ordre décroissant, sont alors positives, et les vecteurs propres $(v_1, \dots, v_p)$ associés forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^p$.
- On démontre que cet axe est le sous-espace propre, noté D_1 , associé à la plus grande valeur propre λ_1 et de vecteur propre v_1 de la matrice R .
- Cette valeur propre est alors égale à l'inertie expliquée par l'axe D_1 .

Recherche du premier axe factoriel

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

- On cherche l'axe Δ_u dont l'inertie expliquée est la plus grande.
On cherche donc à résoudre le problème de maximisation suivant :
$$\begin{cases} \max u^t R u \\ u^t u = 1 \end{cases}$$
- On rappelle que la matrice R est symétrique, donc diagonalisable, ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, rangées dans l'ordre décroissant, sont alors positives, et les vecteurs propres $(v_1, \dots, v_p)$ associés forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^p$.
- On démontre que cet axe est le sous-espace propre, noté D_1 , associé à la plus grande valeur propre λ_1 et de vecteur propre v_1 de la matrice R .
- Cette valeur propre est alors égale à l'inertie expliquée par l'axe D_1 .
- La part d'inertie expliquée par l'axe D_1 est égale à $\frac{\lambda_1}{p}$

Recherche des axes factoriels suivants

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

**Recherche des axes
factoriels suivants**

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

- Nous cherchons cette fois un vecteur unitaire u , orthogonal au vecteur v_1 précédent, et maximisant la quantité $u^t R u$.

Recherche des axes factoriels suivants

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

**Recherche des axes
factoriels suivants**

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

- Nous cherchons cette fois un vecteur unitaire u , orthogonal au vecteur v_1 précédent, et maximisant la quantité $u^t R u$.
- Le vecteur u maximisant cette quantité n'est autre que v_2 , le vecteur propre associé à la seconde plus grande valeur propre λ_2 de la matrice R , pour lequel on a donc $I_{\Delta_2^\perp} = \lambda_2$.

Recherche des axes factoriels suivants

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-1}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-1}

Exemples d'ACP

- Nous cherchons cette fois un vecteur unitaire u , orthogonal au vecteur v_1 précédent, et maximisant la quantité $u^t R u$.
- Le vecteur u maximisant cette quantité n'est autre que v_2 , le vecteur propre associé à la seconde plus grande valeur propre λ_2 de la matrice R , pour lequel on a donc $I_{\Delta_2^\perp} = \lambda_2$.
- On vient ainsi de construire un processus de recherche itérative des axes principaux D_k successifs, pour k variant de 1 à p .

Recherche des axes factoriels suivants

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-1}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-1}

Exemples d'ACP

- Nous cherchons cette fois un vecteur unitaire u , orthogonal au vecteur v_1 précédent, et maximisant la quantité $u^t R u$.
- Le vecteur u maximisant cette quantité n'est autre que v_2 , le vecteur propre associé à la seconde plus grande valeur propre λ_2 de la matrice R , pour lequel on a donc $I_{\Delta_2^\perp} = \lambda_2$.
- On vient ainsi de construire un processus de recherche itérative des axes principaux D_k successifs, pour k variant de 1 à p .
- La part d'inertie expliquée par le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs propres $v_1, v_2, \dots, v_k$ est égale à

$$\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{p}$$

Qualité de représentation des individus sur un axe D_k

- Les axes factoriels $D_1, \dots, D_p$ ont été déterminés par diagonalisation de la matrice de corrélation R .

On projette les individus sur un axe D_k . Comment mesurer leurs qualités de représentation sur cet axe ?

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

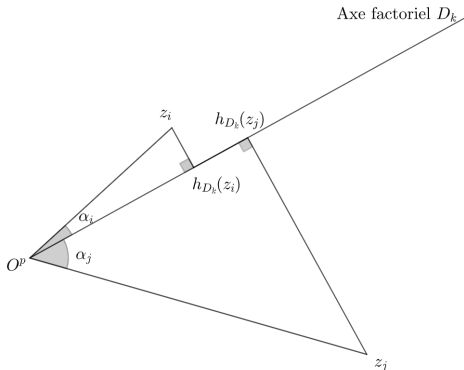
Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

Qualité de représentation des individus sur un axe D_k

- Les axes factoriels $D_1, \dots, D_p$ ont été déterminés par diagonalisation de la matrice de corrélation R .

On projette les individus sur un axe D_k . Comment mesurer leurs qualités de représentation sur cet axe ?

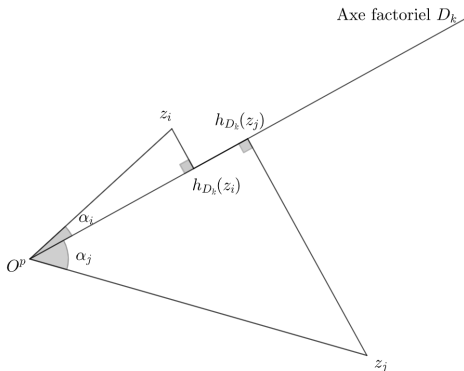


-

Qualité de représentation des individus sur un axe D_k

- Les axes factoriels $D_1, \dots, D_p$ ont été déterminés par diagonalisation de la matrice de corrélation R .

On projette les individus sur un axe D_k . Comment mesurer leurs qualités de représentation sur cet axe ?



- $\cos^2(\alpha_i)$ et $\cos^2(\alpha_j)$ donnent des précisions quant à la qualité de représentation de ces deux individus.

Qualité de représentation des individus sur le plan

$$P_{k-l}$$

- On projette les individus sur un plan P_{k-l} engendré par les axes orthogonaux D_k et D_l . Comment mesurer leurs qualités de représentation sur ce plan ?

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

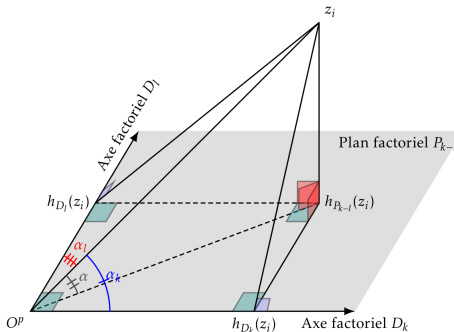
Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

Qualité de représentation des individus sur le plan

P_{k-l}

- On projette les individus sur un plan P_{k-l} engendré par les axes orthogonaux D_k et D_l . Comment mesurer leurs qualités de représentation sur ce plan ?



•

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

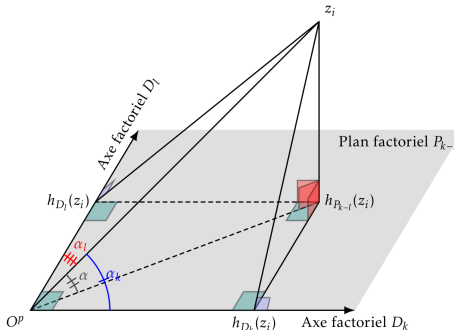
Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

Qualité de représentation des individus sur le plan

P_{k-l}

- On projette les individus sur un plan P_{k-l} engendré par les axes orthogonaux D_k et D_l . Comment mesurer leurs qualités de représentation sur ce plan ?



-
- $\cos^2(\alpha)$, $\cos^2(\alpha_k)$ et $\cos^2(\alpha_l)$ donnent des précisions quant à la qualité de représentation de l'individu z_i .

Qualité de représentation des variables sur le plan

P_{k-l}

- Les variables sont centrées et réduites, donc les vecteurs z^j associés, pour j variant de 1 à p , sont unitaires et appartiennent à la p -sphère de centre O^P et de rayon 1.
On projette les variables sur le plan P_{1-2} par exemple. Comment mesurer leurs qualités de représentation sur ce plan ?

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

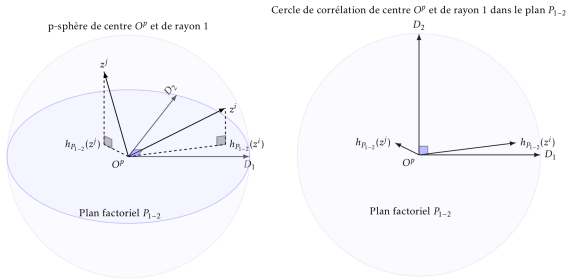
Exemples d'ACP

Qualité de représentation des variables sur le plan

P_{k-l}

- Les variables sont centrées et réduites, donc les vecteurs z^j associés, pour j variant de 1 à p , sont unitaires et appartiennent à la p -sphère de centre O^p et de rayon 1.

On projette les variables sur le plan P_{1-2} par exemple. Comment mesurer leurs qualités de représentation sur ce plan ?



•

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duchesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

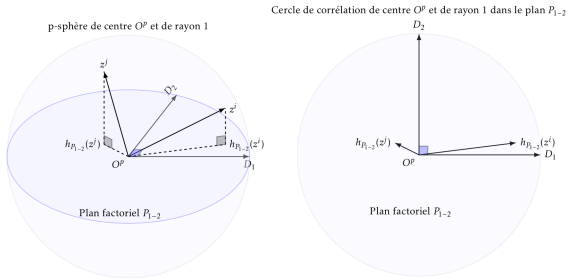
Exemples d'ACP

Qualité de représentation des variables sur le plan

P_{k-l}

- Les variables sont centrées et réduites, donc les vecteurs z^j associés, pour j variant de 1 à p , sont unitaires et appartiennent à la p -sphère de centre O^p et de rayon 1.

On projette les variables sur le plan P_{1-2} par exemple. Comment mesurer leurs qualités de représentation sur ce plan ?



- Les positions dans le cercle de corrélation des projections $h_{P_{1-2}}(z^i)$ et $h_{P_{1-2}}(z^j)$ des variables z^i et z^j donnent des précisions quant à la qualité de représentation de ces deux variables.

Applications

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

- Vont maintenant être projetés trois exemples d'**ACP normées**.

Applications

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

- Vont maintenant être projetés trois exemples d'**ACP normées**.
- Le premier exemple contient quelques interprétations qui suivent les résultats et graphiques affichés.

Applications

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

- Vont maintenant être projetés trois exemples d'**ACP normées**.
- Le premier exemple contient quelques interprétations qui suivent les résultats et graphiques affichés.
- Les deux autres exemples solliciteront de votre part ce que vous avez retenu de l'ensemble de ce qui précède.

Applications

Journées
académiques de
l'IREMS de Lille

Fabrice Eudes -
Jean-Marc
Duquesnoy

Objectifs de l'atelier

Tableaux de
données

Objectifs de l'ACP ?

Inertie du nuage
d'individus

Inertie d'un axe

Recherche du
premier axe factoriel

Recherche des axes
factoriels suivants

Qualité de
représentation des
individus sur un axe
 D_k

Sur le plan P_{k-l}

Qualité de
représentation des
variables sur le plan
 P_{k-l}

Exemples d'ACP

- Vont maintenant être projetés trois exemples d'**ACP normées**.
- Le premier exemple contient quelques interprétations qui suivent les résultats et graphiques affichés.
- Les deux autres exemples solliciteront de votre part ce que vous avez retenu de l'ensemble de ce qui précède.
- À vous de jouer 😊