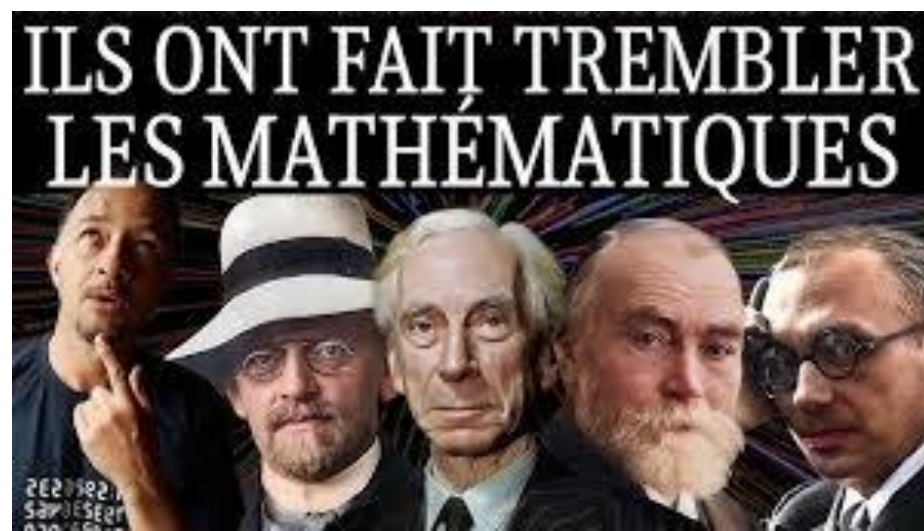




Culture(s) mathématique(s) : regards depuis l'histoire des mathématiques

Rossana Tazzioli
Journées Académiques 2026

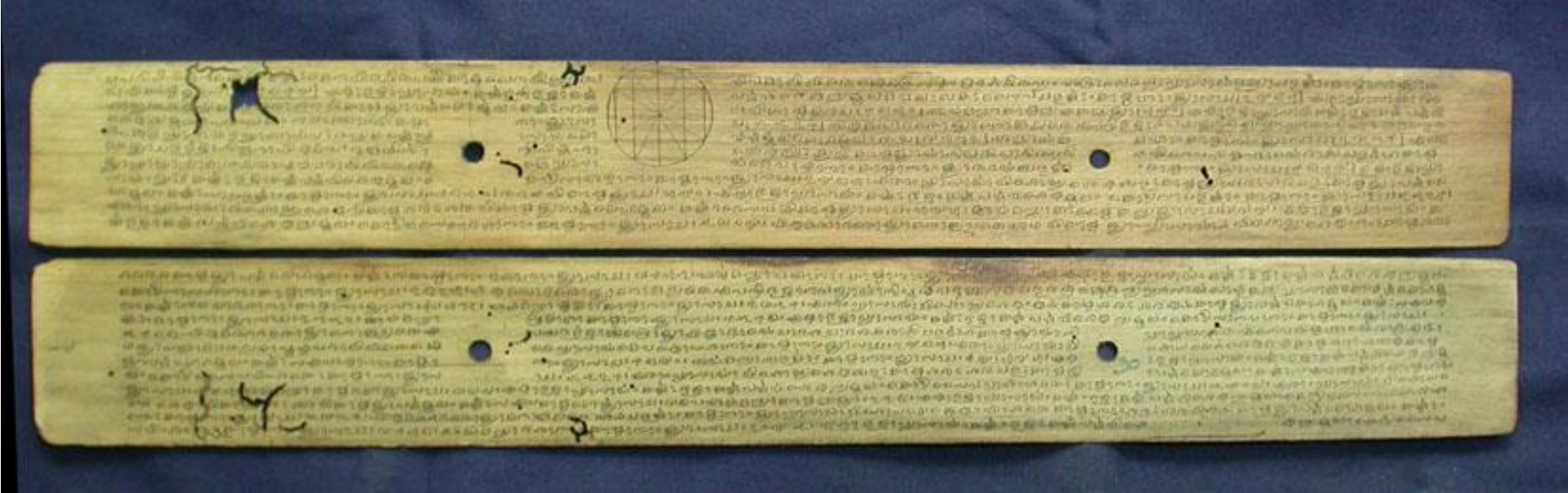
Michèle Artigue, APMEP Caen 2 avril 2022: « Une culture commune en mathématique? »

Une éducation mathématique de qualité doit permettre :

- De se forger une image positive et appropriée des mathématiques. Pour cela, elle doit être fidèle aux mathématiques, tant en ce qui concerne les contenus que les pratiques.
- De comprendre à quels besoins répondent les mathématiques qui leur sont enseignées, et aussi que celles-ci s'inscrivent dans une longue histoire qui se conjugue avec celle de l'humanité.
- De comprendre que les mathématiques ne sont pas un corpus de connaissances figé mais au contraire une science vivante en pleine expansion, dont l'évolution se nourrit de celle des autres champs scientifiques et les nourrit en retour.
- De voir les mathématiques comme une science qui peut et doit contribuer à la résolution des problèmes majeurs auxquels le monde doit aujourd'hui faire face.
- De vivre les mathématiques à la fois comme une expérience individuelle et collective, et faire sentir ce qu'apportent l'échange, le débat avec d'autres. Elle doit savoir stimuler par des défis tout en cultivant des valeurs de solidarité.
- Elle doit aussi montrer une école ouverte sur le monde et être en phase avec les pratiques mathématiques scientifiques et sociales hors de l'école, et savoir notamment s'appuyer de façon pertinente sur les moyens technologiques qui instrumentent ces pratiques.

L'histoire des maths peut nous aider!

- Montrer que plusieurs approches peuvent conduire à un même résultat.
- Mettre en évidence la présence de la géométrie là où l'on s'attend à trouver de l'algèbre, et inversement. Plusieurs exemples peuvent être tirés de l'histoire des mathématiques : le carré d'un binôme, le théorème de Pythagore, etc.
- L'histoire des nombres chez les Anciens : plusieurs systèmes de numération sont possibles, plusieurs interprétations peuvent coexister, et plusieurs démarches peuvent mener à une même solution — ou plutôt, la solution est identique, mais les chemins pour y parvenir sont différents.
- Les fondements de la géométrie : la géométrie d'Euclide est-elle un « cas particulier » parmi les géométries axiomatisées à la manière de Hilbert ? Comment les mathématiques évoluent-elles ? Le besoin d'axiomatiser une théorie, de la réorganiser pour la rendre plus rigoureuse... mais attention : axiomatiser ne signifie pas figer une théorie dans le marbre.

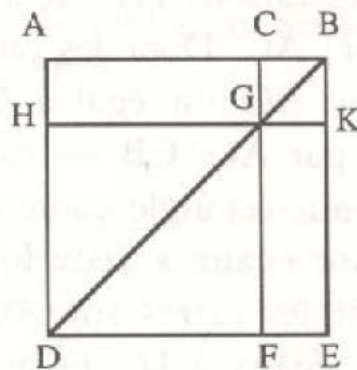


Algèbre et/ou géométrie.
Une seule mathématique?

Les Éléments d'Euclide, Livre II

4

Si une ligne droite est coupée au hasard, le carré sur la droite entière est égal aux carrés sur les segments et deux fois le rectangle contenu par les segments.

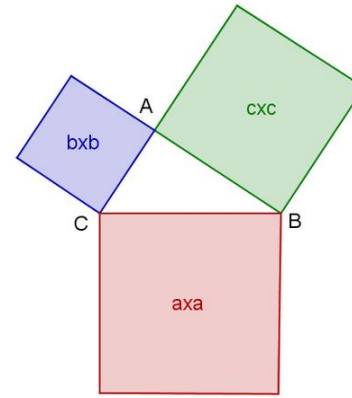


En effet, que la droite AB soit coupée au hasard en C. Je dis que le carré sur AB est égal aux carrés sur AC et sur CB et deux fois le rectangle contenu par AC, CB.

En effet, que le carré ADEB soit décrit sur AB (I. 46); et que BD soit jointe; et d'une part, que par C soit menée CF parallèle à l'une ou l'autre des droites AD, EB; d'autre part, que par G soit menée HK parallèle à l'une ou l'autre des droites AB, DE.

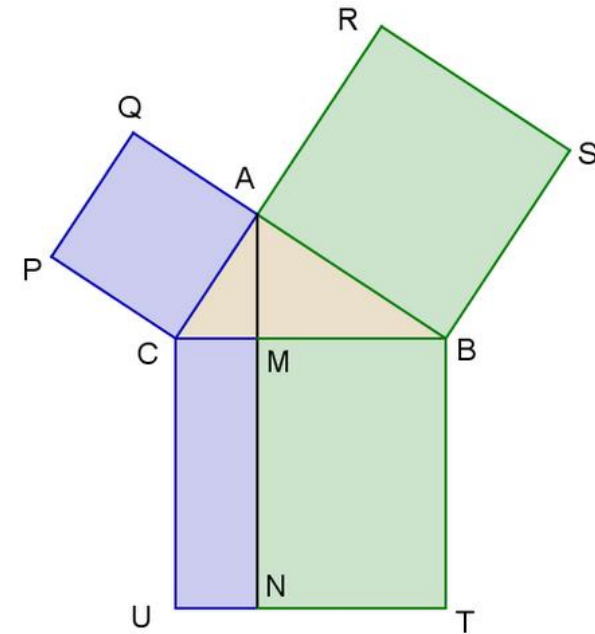
Les Éléments d'Euclide. Proposition 47, Livre I

« Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit »



Proposition 48, Livre I

« Si dans un triangle, le carré de l'un des côtés est égal aux carrés des deux côtés restants du triangle, l'angle compris par les deux côtés restants du triangle est droit ».



Quelques idées?

Se poser des questions spécifiques faisant intervenir à la fois la géométrie et l'algèbre afin d'aboutir à une « bonne » solution, c'est-à-dire une solution que l'on puisse à la fois **calculer** et **visualiser**.

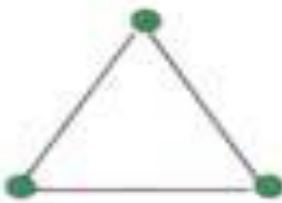
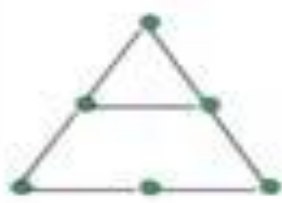
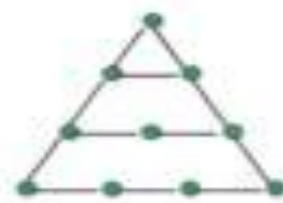
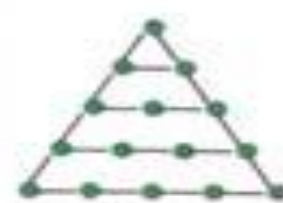
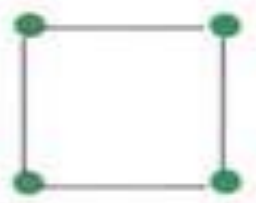
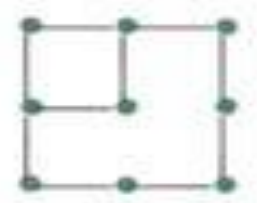
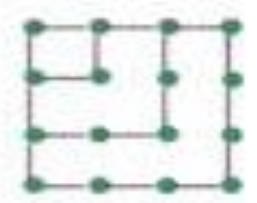
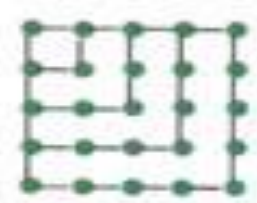
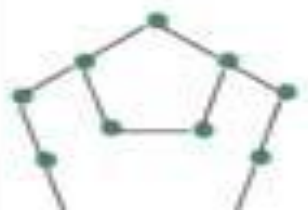
Par exemple : qu'est-ce qu'un point ? Un segment est-il constitué de ses points ? Quel est le rapport entre le côté d'un carré et sa diagonale ? Est-ce qu'il existe un lien entre ces questions et les définitions de nombres rationnels et irrationnels? (Pythagore et/ou Euclide peuvent nous donner des idées)

<https://images-des-maths.pages.math.cnrs.fr/freeze/Celui-qui-n-a-rien.html>

L' Ecole de Pythagore (vers 580-495 a. J.C.)

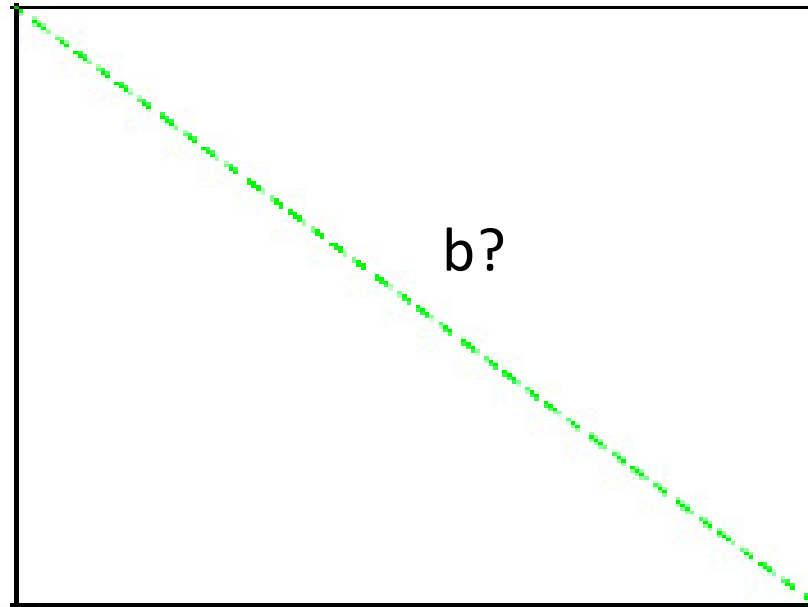
- Deux grandeurs A et B (segments par exemple) sont « commensurables » entre eux s'il existe une commune mesure C t.q. :
 $A = mC$ et $B = nC$ où m, n sont entiers positifs.
- Les pythagoriciens connaissaient l'énoncé du « théorème de Pythagore ».
- Le côté d'un carré et sa diagonale sont-elles des grandeurs commensurables?

Les nombres comme figures

NUMERI	ORDINE				
	1	2	3	4	5
TRIANGOLARI					
QUADRATI					
PENTAGONALI					

Le carré et sa diagonale

$a=1$



Grandeurs commensurables et nombres irrationnels ?

- Le terme « grandeur » est un terme géométrique, pas clairement défini. Un segment est un exemple de grandeur.
- Deux grandeurs sont dites « commensurables » si elles sont mesurées par une même grandeur. (Mesurer par une règle par exemple).
- Des exemples de grandeurs commensurables? Et incommensurables (c.a.d. qui n'ont aucune mesure commune)?
- En terme moderne: si on attribue un nombre à une grandeur, qu'est ce que ça signifie en terme de commensurabilité ou incommensurabilité?
- Quels sont les liens qu'aujourd'hui nous pouvons repérer entre grandeurs commensurables et nombres entiers, rationnels, ou irrationnels?
- Des exemples

Preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

Preuve que $\sqrt{2}$ n'est pas entier :

On a: $1 < 2 < 4 \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2$ (car la fonction racine carrée est croissante)

$\sqrt{2}$ est donc compris strictement entre deux entiers consécutifs; $\sqrt{2}$ n'est pas un entier.

Preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$:

Supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel positif.

Il existe alors un couple d'entier naturel (p;q) tel que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$.

On pose a et b tel que $PGCD(p;q) \times a = p$ et $PGCD(p;q) \times b = q$.

a et b sont alors premiers entre eux et de plus :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{PGCD(p;q) \times a}{PGCD(p;q) \times b} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

En passant au carré on a: $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2$

a et b sont des entiers premiers entre eux donc a^2 et b^2 sont aussi des entiers premiers entre eux.

Comme a^2 et b^2 sont entiers, on remarque que a^2 est divisible par b^2 .

Or a^2 et b^2 sont aussi premiers entre eux donc $b^2=1$ ce qui implique que $b=1$ car b est un entier naturel.

On trouve donc que $\sqrt{2} = a$ ce qui est absurde puisque $\sqrt{2}$ n'est pas un entier contrairement à a.

$\sqrt{2}$ n'est donc pas rationnel, il est irrationnel. $\square$

Aristote (384-322 a JC)

- Etude de la « nature ».
- Contribution à la logique (et donc à la démonstration): syllogisme, le principe du tiers exclus (démonstration par l'absurde); distinction entre postulats et notions communes.
- « Continu »: « ce qui est divisible en parties toujours divisibles ». Le « point » est l'extrémité d'une ligne et l'« instant » est l'extrémité d'un intervalle de temps. Donc « le point » et « l'instant » ne sont pas des grandeurs, ils sont les deux indivisibles.

<https://images-des-maths.pages.math.cnrs.fr/freeze/Celui-qui-n-a-rien.html>

il est impossible qu'un continu soit formé par des indivisibles, par exemple qu'une ligne soit formée de points....

Aristote, *La Physique* [1]

Euclide, Définition 1, Livre I

Le point est ce dont la partie est nulle

Je ne suis que le fruit peut-être
De deux lignes qui se rencontrent.

Je n'ai rien.

On dit : partir du point,
Y arriver.

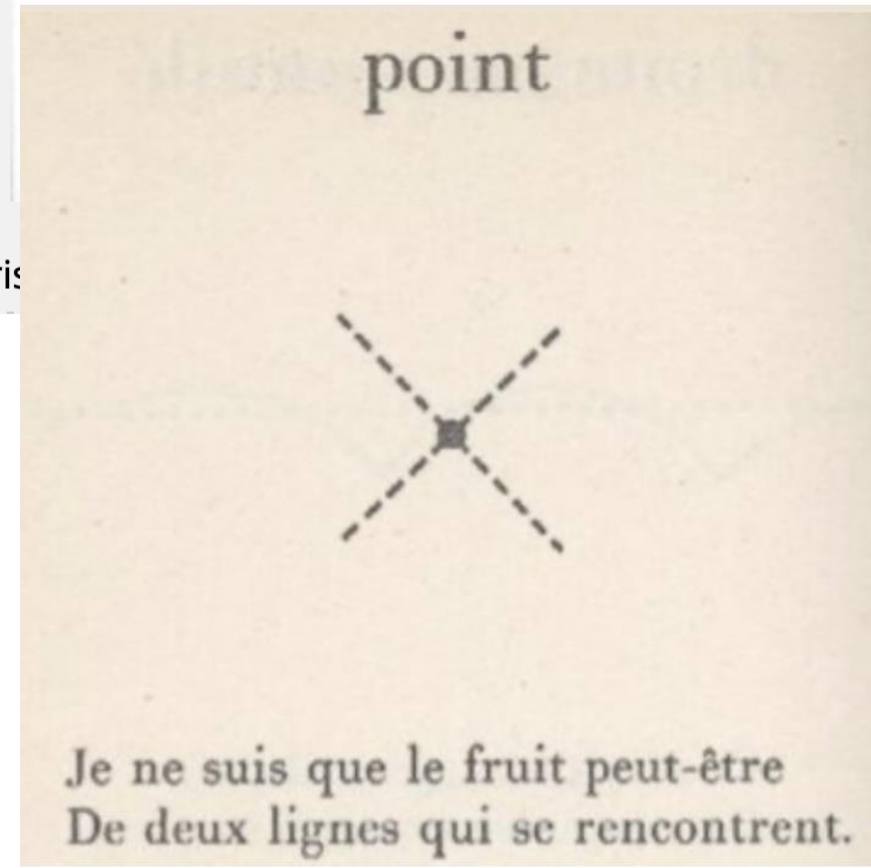
Je n'en sais rien.

Mais qui
M'effacera ?

Guillevic, « Point », *Euclidiennes*, Paris

GUILLEVIC

Du domaine
Euclidiennes



Hilbert, Grundlagen, 1899 I

« Comme l'arithmétique, la géométrie n'exige pour son élaboration qu'un petit nombre de propositions fondamentales simples. Ces propositions sont les axiomes de la géométrie. Depuis Euclide, l'établissement de ces axiomes et l'étude de leurs relations ont fait l'objet de travaux nombreux et excellents. Ce problème est celui de l'analyse de notre intuition de l'espace.

Le présent travail est un nouvel essai de constituer pour la géométrie un système complet d'axiomes aussi simple que possible et d'en déduire les théorèmes les plus importants, de façon à mettre en évidence le rôle des divers groupes d'axiomes et la portée de chacun d'eux. »

Hilbert, Grundlagen, 1899 II

« Nous pensons trois systèmes différents de choses; nous nommons les choses du premier système de **points**; nous les désignerons par des majuscules A, B, C, ...; nous nommons **droites** les choses du deuxième système et nous les désignons par des minuscules a, b, c ...; nous appelons **plans** les choses du troisième système et nous les désignons par les caractères grecs. Les points constituent les éléments de la géométrie linéaire; les points et les droites sont les éléments de la géométrie plane; enfin les points, les droites et les plans sont ceux de la géométrie de l'espace ou de l'espace lui-même.

Enfin, entre les points, les droites et les plans, nous imaginons certaines relations que nous exprimons par des expressions telles que « être sur », « entre », « congruent »; la description exacte et appropriée au but des mathématiques de ces relations est donnée par les axiomes de la géométrie. »

On peut classer les axiomes de la géométrie en cinq groupes; chacun de ces groupes exprime quelques faits fondamentaux, liés les uns aux autres. Nous désignons comme suit ces groupes d'axiomes:

(I, 1 à 8): axiomes d'appartenance

(II, 1 à 4): axiomes d'ordre

(III, 1 à 5): axiomes de congruence

(IV): axiome des parallèles

(V, 1 et 2): axiomes de continuité (Axiome d'Archimède + axiome d'intégrité ou de complétude)

Les nombres comme produit d'une culture

- Notre système de numération n'est ni le seul possible en théorie, ni le seul qui ait existé en pratique.
D'autres civilisations ont développé des systèmes de numération différents, dont certaines traces subsistent encore aujourd'hui (par exemple la base 60 ou la base 20).
- Ces réflexions permettent de mieux comprendre les avantages et les limites de notre propre système de numération. On peut s'appuyer sur des exemples tirés de l'histoire, tels que l'introduction du « zéro », le système positionnel ou encore les techniques de multiplication.
- Une telle approche se prête naturellement à un enseignement pluridisciplinaire, faisant dialoguer mathématiques, histoire et géographie.

Où sont les lieux des mathématiques anciennes



Tablette babylonienne (2400 a.J.C.)



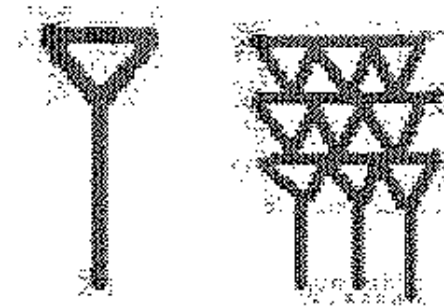
La numération babylonienne



1 10 et 19
s'écrivait 1 chevron + 9 clous

au-delà de 59, l'écriture devenait positionnelle.

le nombre 69 par
exemple s'écrivait :



$(1 \times 60 + 9)$

Les division?

Elles sont des multiplications particulières... il faut les réciproques.

Il y avait de tables des inverses. Des exemples.

Plusieurs ambiguïtés:

1. Les « positions », elles finissent où?
2. L'absence du « 0 » donne lieu à d'autres difficultés!
3. Les fractions existent. Mais comment les distinguer?
Par exemple, quand il s'agit de 30 ou de 30/60?

Quelques problèmes entre *langue* et *mathématique*. Sont-ils algébriques ou géométriques?

Tablette BM13901#1. Traduction de Thureau-Dangin, 1936

J'ai additionné la surface et le côté de mon carré : $\frac{3}{4}$ [$x^2 + x = \frac{3}{4}$]

Tu poseras 1, l'unité. [1]

Tu fractionneras en deux 1 : $\frac{1}{2}$ [$\frac{1}{2}$]

Tu croiseras $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{4}$ [$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$]

Tu ajouteras $\frac{1}{4}$ à $\frac{3}{4}$: 1 [$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$]

C'est le carré de 1. [$1 = 1^2$]

Tu soustrairas $\frac{1}{2}$, que tu as croisé, de 1 : $\frac{1}{2}$, le côté du carré. [$x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$]

Une traduction (et donc interprétation) géométrique

Tablette BM 13901 #1 (traduction de J. Hoyrup, 2010)

1. La surface et ma confrontation j'ai empilées : $\frac{3}{4}$. 1, le forjet,
2. tu poses. La demi-part de 1 tu brises, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ fais tenir.
3. $\frac{1}{4}$ à $\frac{3}{4}$ tu ajoutes : auprès de 1, 1 est égal. $\frac{1}{2}$ que tu as fais tenir
4. de l'intérieur de 1 tu arraches : $\frac{1}{2}$ est la confrontation.

Ce que les deux interprétations donnent

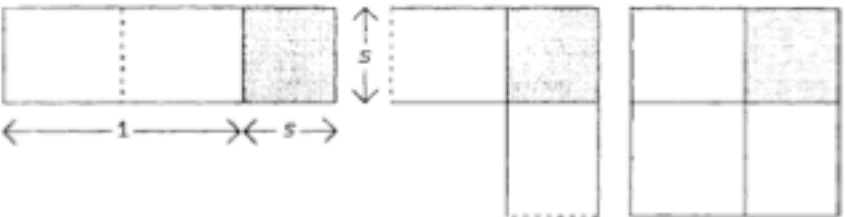
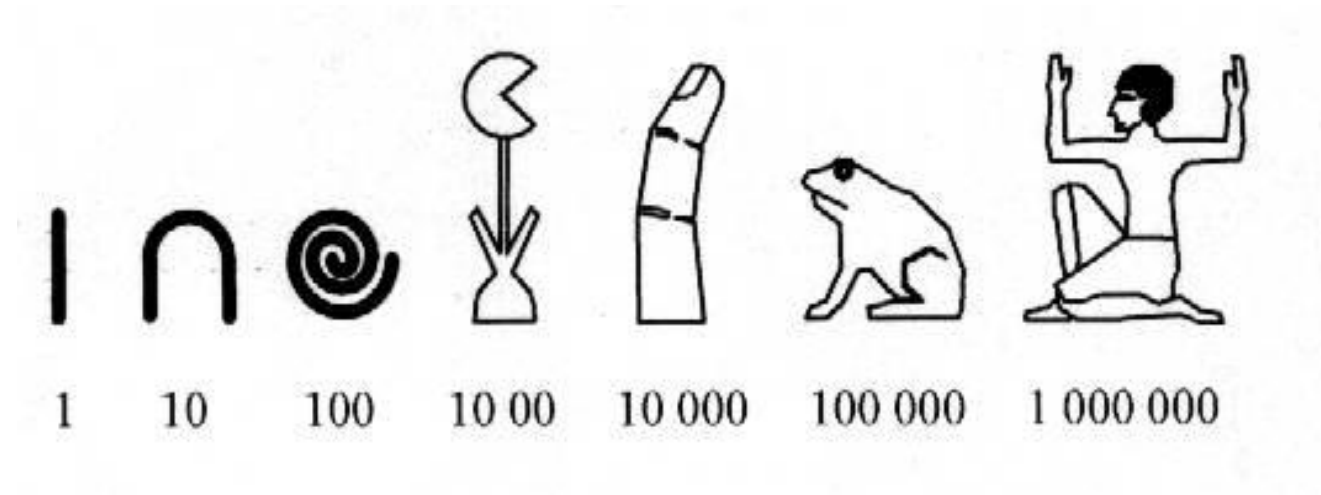
$x^2 + x = 45'$ $x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 45'} - \frac{1}{2} = 30'$ Thureau-Dangin	 Hoyrup
---	---

Table 1 : interprétations du même problème par Thureau-Dangin et Høyrup

Papyrus Rhind (1650 a.J.C.)



Numération égyptienne



Exemple d'addition.
Plus « simple » que la notre?

eeee	nnnn	llll
eee	nnnn	
+ e	nnn	lll
eeee	nnnn	llll
eeee	nnnn	lll
	nnn	
soit: eeee	n	llll
eeee		lll

La multiplication

Comment multiplier **43 x 92**.

43	x	92
Code		Double (x2)
1		92
2		184
4		368
8		736
16		1472
32		2944
64		
128		

Puisque $64 > 43$, il n'est pas obligatoire de continuer après 32.

Additionnez les nombres dans la colonne "code" qui totalisent 43 :
 $32 + 8 + 2 + 1 = 43$

Maintenant additionnez les nombres correspondants dans la colonne 92 :
 $92 + 184 + 736 + 2944 = \mathbf{3956}$

Donc $43 \times 92 = 3956$. Pourquoi???

Explication moderne

On décompose le multiplicateur en une somme de puissances de deux (nombres écrits en rouge dans l'animation). ...

L'**explication** tient dans la possibilité de décomposer de façon unique un nombre en somme de puissances de 2.

Les **Egyptiens** en quelque sorte utilisaient déjà le système binaire.

Exemple précédent: $43 = 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0$. Donc $43 \times 92 = 2^5 \times 92 + \dots = 32 \times 92 + 8 \times 92 + 2 \times 92 + 1 = 3956$

René Descartes (1596-1650)

- Fils d'un conseiller du Parlement de Bretagne, et orphelin de mère de sa naissance
- Il étudie chez les Jésuites de la Flèche (près de Mans)
- Il étudie le droit
- Il voyage en Europe et fait connaissance des scientifiques de l'époque
- En 1628 il s'installe en Hollande
- En 1637 il publie le « Discours de la Méthode » en annexe à sa *Géométrie*. Il souhaite réformer l'algèbre et l'unir à la géométrie (géométrie analytique).
- En 1641 il publie les *Méditations métaphysiques*
- En 1644 il publie les *Principes de philosophie*
- En 1649 il publie le *Traité des passions de l'âme*
- En 1649 répond à l'invitation de la reine Christine de Suède

R. Descartes, La Géométrie, 1637

Les quatre préceptes

... Au lieu de ce grand nombre de préceptes dont la logique est composée, je crus que j'aurais assez des quatre suivants, pourvu que je prisse une ferme et constante résolution de ne manquer pas une seule fois à les observer.

Le premier était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne la connusse évidemment être telle ; c'est-à-dire, d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention, et de ne comprendre rien de plus en mes jugements que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit, que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute.

Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais, en autant de parcelles qu'il se pourrait, et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.

Le troisième, de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu comme par degrés jusqu'à la connaissance des plus composés [...].

Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre. Ces longues chaînes de raisons, toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations, m'avaient donné occasion de m'imaginer que toutes les choses qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes s'entresuivent en même façon, et que, pourvu seulement qu'on s'abstienne d'en recevoir aucune pour vraie qui ne le soit, et qu'on garde toujours l'ordre qu'il faut pour les déduire les unes des autres, il n'y en peut avoir de si éloignées auxquelles enfin on ne parvienne, ni de si cachées qu'on ne découvre. Et je ne fus pas beaucoup en peine de chercher par lesquelles il était besoin de commencer : car je savais déjà que c'était par les plus simples et les plus aisées à connaître...

(début de la deuxième partie du *Discours de la Méthode*)

L A
G E O M E T R I E.
LIVRE PREMIER.

*Des problemes qu'on peut construire sans
y employer que des cercles & des
lignes droites.*



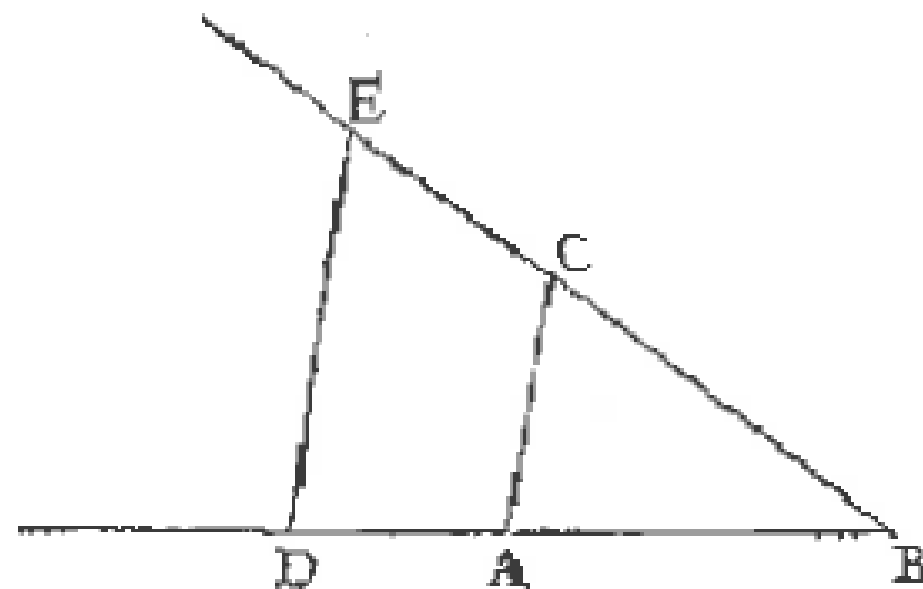
Ou s les Problemes de Geometrie se
peuvent facilement reduire a tels termes,
qu'il n'est besoin par après que de connoi-
stre la longueur de quelques lignes droites,
pour les construire.

21 Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'Arithmétique en la Géométrie, afin de me rendre plus intelligible.

Comment se font géométriquement la multiplication, la division et l'extraction de la racine carrée

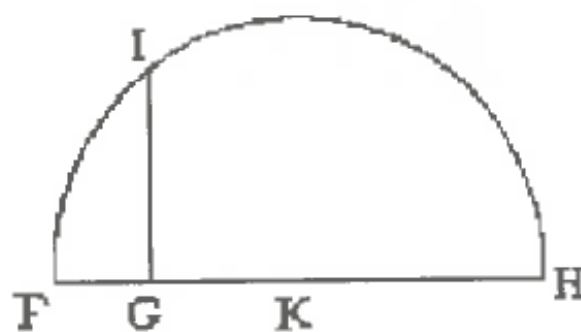
25 La Multiplication

Soit par exemple AB l'unité, et qu'il faille multiplier BD par BC, je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette Multiplication.



L'extraction de la racine carrée

35 Ou s'il faut tirer la racine carrée de
GH, je lui ajoute en ligne droite FG,
qui est l'unité, et divisant FH en deux
parties égales au point K, du centre K
je tire le cercle FIH, puis élevant du
40 point G une ligne droite jusqu'à I à
angles droits sur FH, c'est GI la racine
cherchée. Je ne dis rien ici de la racine
cubique, ni des autres, à cause que j'en
parlerai plus commodément ci-après.



45 Comment on peut user de chiffres en géométrie

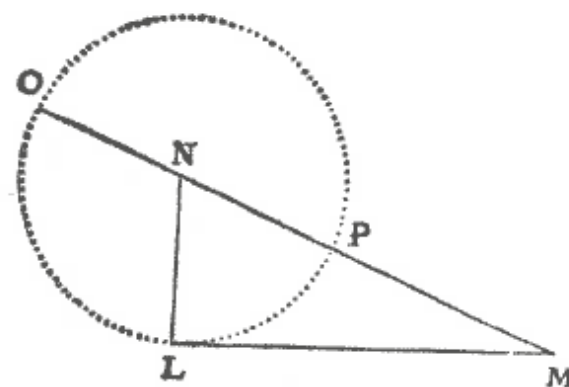
Mais souvent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces lignes sur le papier, et il suffit de les désigner par quelques lettres, chacune par une seule. [...]

! 300 Afin de ne pas manquer à se souvenir des noms de ces lignes, il en faut toujours faire un registre séparé à mesure qu'on les pose ou qu'on les change,

50 écrivant par exemple :

$AB = 1$, $GH = a$. $BD = b$, etc.

Comment ils se résolvent



Et lors cette racine, ou ligne inconnue, se trouve aisément ; car si j'ai par exemple $z^2 = az + bb$, je fais le triangle rectangle NLM, dont le côté LM est égal à b , racine carrée de la quantité connue bb , et l'autre LN est $(1/2)a$, la moitié de l'autre quantité connue qui était multipliée par z , que je suppose être la ligne inconnue ;

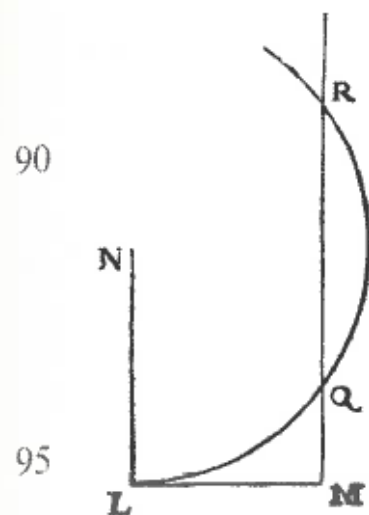
puis prolongeant MN, la base de ce triangle, jusqu'à O, en sorte que NO soit égale à NL, la ligne entière OM est z , la ligne cherchée ; et elle s'exprime en cette sorte :

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$

- 86 Que si j'ai $yy = -ay + bb$, et que y soit la quantité qu'il faut trouver, je fais le même triangle rectangle NLM, et de sa base MN j'ôte NP égale à NL, et le reste PM est y , la racine cherchée.

De façon que j'ai $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ [...]

De façon que j'ai $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ [...]



Enfin si j'ai $z^2 = az - bb$, je fais NL égale à $\frac{1}{2}a$,

et LM égale à b comme devant, puis, au lieu de joindre les points M N je tire MQR parallèle à LN. et du centre N par L ayant décrit un cercle qui la coupe aux points Q et R, la ligne cherchée z est MQ, ou bien MR, car en ce cas elle s'exprime en deux façons, à savoir

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} \quad \text{et} \quad z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}.$$

Et si le cercle, qui ayant son centre au point N, passe par le point L, ne coupe ni ne touche la ligne droite MQR, il n'y a aucune racine en l'équation, de façon qu'on peut assurer que la construction du problème proposé est impossible.