

Activité : Ensembles de nombres

I. Les nombres rationnels

Exercice 1 :

1) a) Calculer $\frac{1}{3} \times 3$

b) Poser la division : $1 \div 3$

On note alors la période (la partie qui se répète) avec une «barre» ex : $0,3 = 0,3333333...$

2) a) En déduire l'arrondi de $\frac{1}{3}$ à 10^{-5} près. Puis multiplier cette valeur par 3.

b) Que pensez-vous de l'écriture $1 = 0,9\overline{9}$?

Exercice 2 :

De la même façon si on pose la division $727 \div 495$ on obtient

$1,4686868...$ ainsi $\frac{727}{495} = 1,468\overline{68}$.

(On dit que la longueur de la période est 2).

1) Vérifier ce résultat à la calculatrice. Que constatez-vous ?

2) Calculer avec la calculette $\frac{727}{495} \times 2$. Donner l'arrondi du résultat à 10^{-5} près.

3) Calculer $1,468 \times 2$

4) Conclure

5) En utilisant la calculatrice, donner la longueur de la période de l'écriture décimale de :

a) $\frac{2}{7}$

b) $\frac{5}{74}$

Théorème : Tout nombre rationnel possède une écriture décimale finie ou périodique.

Exercice 3 :

Calculer avec la calculatrice $\frac{76}{17}$. Que remarque-t-on ? Que

peut-on en déduire ?

→ On constate sur ces exemples la nécessité de savoir faire les calculs « à la main » et d'avoir à l'esprit un ordre de grandeur des valeurs à obtenir. La calculette (tout comme l'ordinateur) a ses limites : la taille de l'écran ne nous permet pas toujours d'avoir la période entière par exemple. La notion d'infini a mis beaucoup de temps à s'éclaircir et à s'imposer dans l'histoire. Elle renvoyait à des considérations religieuses, le monde humain étant fini...

Exercice 4 :

Trouver l'écriture fractionnaire de $12,37373737... = 12,37\overline{37}$

Histoire : Procédure pour l'extraction de la racine carrée d'un nombre dans les neufs chapitres

La **racine carrée** d'un nombre est un sujet important traité de nombreuses façons et durant plusieurs siècles à travers l'histoire. La date à laquelle la notion d'irrationalité a été découverte n'est pas connue avec certitude. La question se pose sur le statut de ces «nouveaux nombres», on peut évoquer la crise provoquée par la découverte des irrationnels notamment chez les mathématiciens grecs. Les nombres irrationnels étant difficiles à définir, jusqu'à la fin XIX^e siècle, leur existence et leurs propriétés sont admises sans qu'en soit proposée de définition rigoureuse.

Dans le chapitre 4 intitulé *Shao guano* (=courte largeur), du livre les *Neuf Chapitres*, ouvrage important de mathématiques de la Chine ancienne compilé par plusieurs auteurs au cours de la dynastie des Han (-206 ; +220), une partie est consacrée, à ce qu'on appelle aujourd'hui, le calcul des racines carrées. Le mode de présentation de ce livre consiste en général à poser une question en termes concrets (c'est-à-dire avec des valeurs numériques déterminées). Puis la solution est donnée comme «la réponse» suivie de la «procédure». Pour comprendre les résultats obtenus il faut

souvent se reporter aux commentaires. Liu Hui est l'un des commentateurs (le plus célèbre). Les réponses sont exprimées sous forme de solution exacte (ex : $7 + \frac{427}{3064}$ travailleurs¹), ce qui montre que l'auteur se soucie d'une précision qui dépasse la réalité matérielle du problème, au-delà du nécessaire. Les mathématiciens chinois n'ont pas utilisé une approche axiomatique² mais plutôt une méthode algorithmique³.

La dynastie des Han qui régna quatre siècles correspond à une période considérée comme un des « âges d'or » de l'histoire de la Chine. C'est durant cette période que fut ouverte la route de la soie, on peut retenir également l'invention du papier et de la sismographie.



Figure 1 : carte du monde

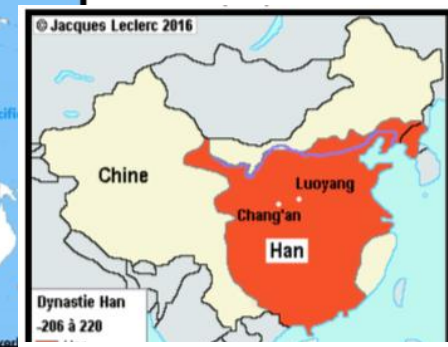


Figure 2 : carte du territoire de la dynastie des Han

¹ Dans le problème (5.5)

² Approche qui repose sur des affirmations considérées comme évidente et qui n'ont pas besoin d'être démontré ex : $1 + 0 = 1$

³ Suite finie d'instruction, d'opérations.

Voici un extrait du livre les Neuf chapitres :

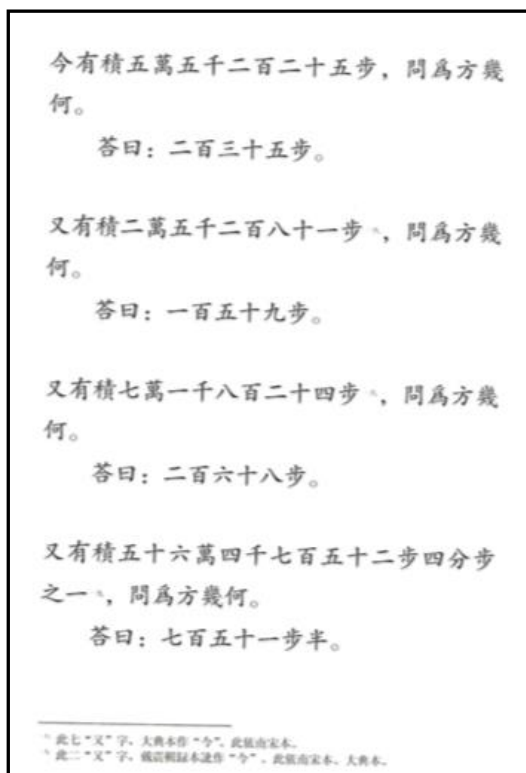


Figure 4 : Extrait du chapitre 4 intitulé Shao guano



Figure 3 : page de couverture du livre

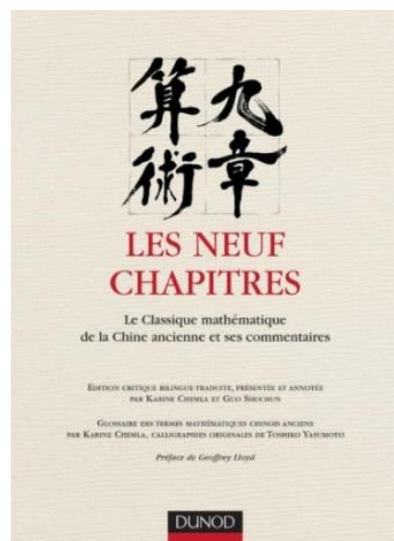


Figure 5 : Première de couverture les neuf chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires

On trouve dans le livre (figure 5), une traduction de cet extrait :

(4.12)

SUPPOSONS QU'ON AIT UN NOMBRE-PRODUIT (JI) DE 55 225 BU. ON DEMANDE COMBIEN FAIT LE CÔTÉ DU CARRÉ (FANG)²⁷.

RÉPONSE : 235 BU.

PROCÉDURE POUR L'EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE :

pour chercher le côté (mian) de la surface d'un carré (fang mi)

ON PLACE LE NOMBRE-PRODUIT (JI) COMME DIVIDENDE. ON EMPRUNTE UNE BAGUETTE ET ON LA FAIT PROGRESSER EN SAUTANT UNE COLONNE²⁹.

Quand on dit 100, son côté est 10 ; quand on dit 10 000, son côté est 100.

UNE FOIS LE QUOTIENT OBTENU, ON EN MULTIPLIE UNE FOIS LA BAGUETTE EMPRUNTÉE, CE QUI FAIT LE DIVISEUR, PUIS ON DIVISE PAR CECI³⁰.

On obtient d'abord un côté de Jia jaune³¹ ; qu'en haut et en bas soient multipliés en place l'un par l'autre, c'est qu'il est multiplié par lui-même, puis éliminé³².

APRÈS AVOIR DIVISÉ, ON DOUBLE LE DIVISEUR, CE QUI FAIT LE DIVISEUR DÉTERMINÉ.

La raison pour laquelle on double ceci, c'est que l'on déploie à l'avance la longueur déterminée des deux surfaces (mi) vermillon³³, de sorte à se préparer à « diviser à nouveau », c'est pourquoi on dit le « diviseur déterminé »³⁴.

Question sur le texte :

- Que signifie « nombre-produit » ?
- Que remarque-t-on concernant les unités ?
- Que signifient les mots « FANG » et « JI » ?

Exercice I : Vérifions, dans la suite, la réponse du

problème (4.12), autrement dit que la racine de 55 225 est 235 en utilisant la procédure du livre.

Approche géométrique :

On cherche la longueur du côté du carré d'aire 55 225.

Compléter le texte, les tableaux et les figures :

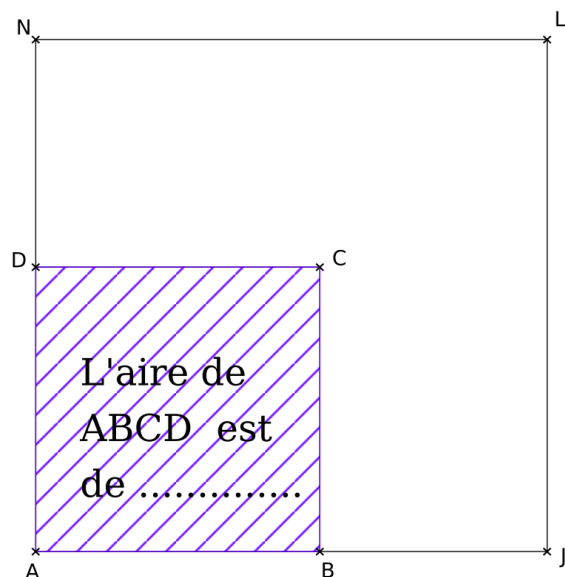
A. Recherche du chiffre des centaines

On cherche le côté du carré d'aire inférieur et le plus proche de 50 000.

Ici c'est, il représente l'aire du carré ABCD noté A_{ABCD} ($= A_{Phase1}$).

La longueur AB est donc de unités.

Il reste unités d'aires.



Approche algorithmique :

1. Découper le nombre en « tranches » de deux chiffres (regrouper les unités avec les dizaines ; les centaines avec les unités de mille... de droite à gauche)

Remarque : si le nombre a une partie décimale : regrouper de même les dixièmes avec les centièmes... de gauche à droite.

Ici :

5	52	25
---	----	----

2. Positionner une baguette au-dessus de la 1ère tranche pour indiquer la partie que l'on va étudier. (De GAUCHE à DROITE).

I		
5	52	25

Ici la **baguette** correspond à 10 000 soit 10^4

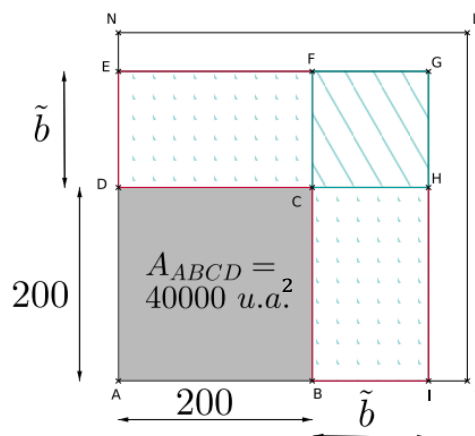
On cherche le carré le plus proche de ce nombre (ici de 5, la réponse est 22 = 4). On l'inscrit dans le « FANG » (ici 2), on multiplie le carré (ici 4) par la valeur de la baguette que l'on soustrait au JI (ici 55 225).

I				
5	52	25	← JI	2 ← FANG
-4	00	00		
1	52	25		

Il reste donc 15 225 unités d'aires.

B. Recherche du chiffre des dizaines

On va à présent chercher à compléter cette aire avec deux rectangles identiques (ici CDEF et BCHI) dont leur longueur ici est : 200 et leur largeur, notée $\tilde{b}$, est une dizaine c'est à dire un multiple de 10 (donc 0 ; 10 ; 20 ; 30 ; 40 ; 50 ; 60 ; 70 ; 80 ou 90).



On cherche $\tilde{b}$, tel que : $A_{Phase2} = A_{CDEF} + A_{BCHI} + A_{CFGH}$
 $= 2 \times A_{CDEF} + A_{CFGH}$
 soit inférieur (dans ce cas le plus proche possible) ou égale à 15225.

C'est-à-dire que $A_{Phase2} = 2 \times 200 \times \tilde{b} + \tilde{b}^2$ soit inférieur mais le plus proche possible de 15225 avec $\tilde{b}$ une dizaine. Autrement dit : $\tilde{b} = 10b$, avec b un nombre entier compris entre 0 et 9 inclus.

Développons :

$$\begin{aligned} A_{Phase2} &= 2 \times 200 \times \tilde{b} + \tilde{b}^2 \\ &= 2 \times 200 \times 10 \times b + (10 \times b)^2 \\ &= 4000 \times b + 100b^2 \\ &= 100(40b + b^2) \\ &= 10^2 \times (40 + b) \times b \end{aligned}$$

3. a) Doubler le « FANG ».

Ici on obtient 4. Qu'on inscrit dans le « Fang fa ».

5	52	25	← JI (étape 1)	2	← FANG
-4	00	00		4	← Fang fa (étape1)
1	52	25	← JI (étape 2)	(x 10000 position de la baguette)	

b) Pour passer à l'étape suivante, on emprunte la baguette et on la fait progresser en sautant une colonne. Ici on s'intéresse maintenant à 152.

5	52	25	← JI (étape 1)	2	← FANG
-4	00	00		4	← Fang fa (étape1)
1	52	25	← JI (étape 2)		

b	40 + b	(40 + b) x b	A _{Etape2}
0	40	0	0
1	41	41	4 100
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			

..... < 15225 <

Donc b =

Ainsi $\tilde{b}$ =

c) On cherche à présent un chiffre tel que ce soit à la fois le chiffre des unités du « Fang fa » et que multiplier par ce dernier on soit le plus près possible tout en étant inférieur ou égal au **Jl** (dernière étape ici 152).

C'est à dire ici on cherche 4...×...

Exemples :

$$41 \times 1 = 41$$

$$42 \times 2 = \dots\dots\dots$$

$$43 \times 3 = \dots\dots\dots$$

$$44 \times 4 = \dots\dots\dots$$

On trouve donc que le chiffre cherché est le « » on l'inscrit dans le « FANG » On écrit le calcul dans le « Fang fa » et on réalise la différence entre 152 et 129.

Diagram illustrating a square lattice structure with a total width of 200 and a total height of 200. The lattice is divided into four regions:

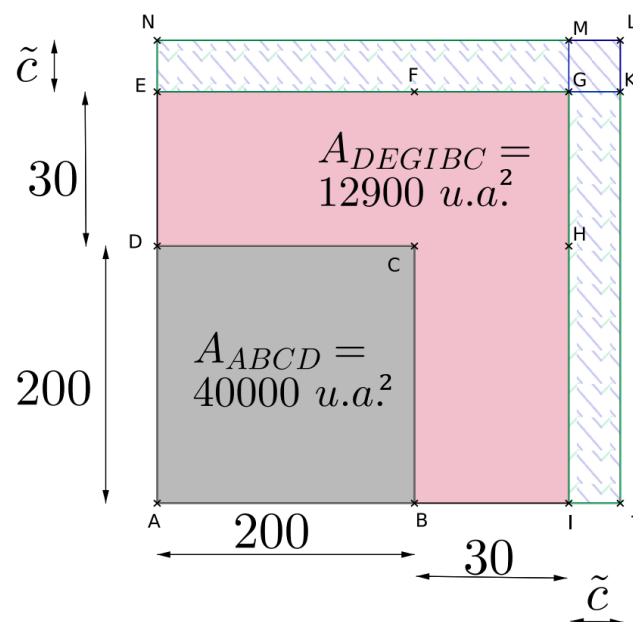
- A gray square region $ABCD$ with area $A_{ABCD} = 40000 \text{ u.a.}^2$.
- A red-outlined rectangle $DEFC$ with area A_{DEFC} .
- A blue-outlined rectangle $CFGH$ with area A_{CFGH} .
- A white-outlined rectangle $BCHI$ with area A_{BCHI} .

The width of the red and blue rectangles is labeled 200 , and the width of the white rectangle is labeled 200 . The height of the red and blue rectangles is labeled 200 , and the height of the white rectangle is labeled 200 . The total height is labeled 400 . The diagram illustrates the decomposition of a large square into four smaller squares, each with a side length of 200 units.

	I			
5	52	25	← JI (étape 1)	23 ← FANG
-4	00	00		43 × 3 ← Fang fa (étape 1)
1	52	25	← JI (étape 2)	(× 10000 position de la baguette)
-1	29	00		
	23	25		

C. Recherche du chiffre des unités

Recommençons l'étape précédente, nous cherchons de nouveau à compléter le carré avec deux rectangles identiques (ici ENMG et GIJK) dont leur longueur ici est : 200 et leur largeur, notée $\tilde{c}$, est une unité c'est à dire un entier compris entre 0 et 9.



On cherche $\tilde{c}$ tel que l'aire $A_{Phase3} = A_{ENMG} + A_{GMLK} + A_{IGKJ}$
 $= 2 \times A_{ENMG} + A_{GMLK}$

soit inférieur (dans ce cas le plus proche possible) ou égale à 2325.

C'est à dire que $2 \times 230 \times \tilde{c} + \tilde{c}^2$ soit inférieur mais le plus proche possible de 2325.

5) On recommence l'étape 4 autant de fois que nécessaire

Ici :

a) On double de « FANG » ($23 \times 2 = 46$)

b) On descend le «25» et on fait progresser la baguette en sautant une colonne.

Calculons : $A_{Phase3} = 2 \times A_{ENMG} + A_{GMLK}$
 $= 2 \times 230 \times \tilde{c} + \tilde{c}^2$
 $= (460 + \tilde{c}) \times \tilde{c}$

$\tilde{c}$	$460 + \tilde{c}$	$A_{Phase3} = (460 + \tilde{c}) \times \tilde{c}$
0	460	0
1	461	461
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

On trouve donc que le côté du carré d'aire 55225 u.a² est de.....

c) On cherche le nombre tel que 46... × ... soit le plus proche de façon inférieur ou égale au JI.

Exemple :

$461 \times 1 = 461$ $464 \times 4 = \dots\dots$

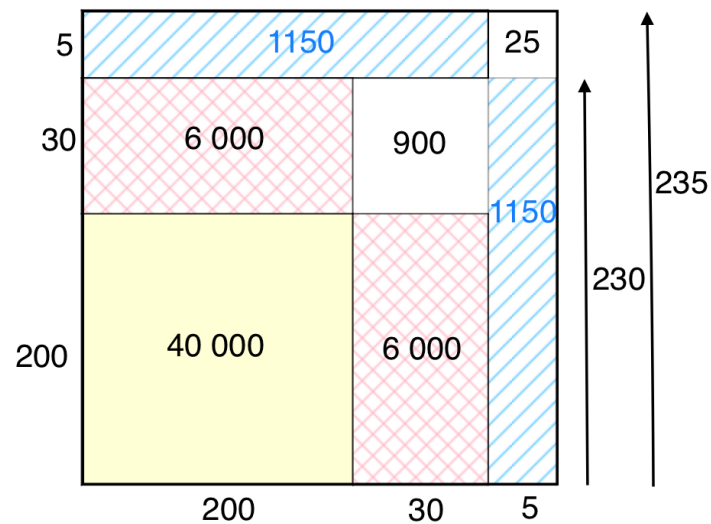
$462 \times 2 = \dots\dots$ $465 \times 5 = \dots\dots$

$463 \times 3 = \dots\dots$

Le chiffre cherché est donc « » que l'on inscrit dans le « FANG »

		I		
5	52	25	← JI (étape 1)	235 ← FANG
−4	00	00		43 × 3 ← Fang fa (étape 1)
1	52	25	← JI (étape 2)	465 × 5 ← Fang fa (étape 2)
−1	29	00		
	23	25	← JI (étape 3)	
	−23	25		
		0		

On trouve donc la racine carrée de 55225 dans le « FANG » qui est



Exercice II : Vérifier les réponses des problèmes suivants extraits des *Neuf Chapitres* :

(4.13)

SUPPOSONS QU'ON AIT À NOUVEAU UN NOMBRE-PRODUIT (JI) DE 25 281 BU. ON DEMANDE COMBIEN FAIT LE CÔTÉ DU CARRÉ (FANG).

RÉPONSE : 159 BU.

(4.14)

SUPPOSONS QU'ON AIT À NOUVEAU UN NOMBRE-PRODUIT (JI) DE 71 824 BU. ON DEMANDE COMBIEN FAIT LE CÔTÉ DU CARRÉ (FANG).

RÉPONSE : 268 BU.

(4.15)

SUPPOSONS QU'ON AIT À NOUVEAU UN NOMBRE-PRODUIT (JI) DE 564 752 BU 1/4 DE BU. ON DEMANDE COMBIEN FAIT LE CÔTÉ DU CARRÉ (FANG).

RÉPONSE : 751 BU ET DEMI²⁸.

Dans le cas où le nombre entier dont on extrait la racine carrée n'est pas épuisé une fois le chiffre des unités atteint, les *Neufs Chapitres* affirment sans ambiguïté « on ne peut pas en extraire une racine ». Par ailleurs, Liu Hui introduit 1 dans ce cas, une alternative aux formes de résultat fractionnaire déjà considérées. Il suggère de repartir de la configuration finale, et tout particulièrement du « diviseur », et de poursuivre l'exécution de l'algorithme. Deux cas se présentent, soit on obtient un résultat décimal soit Liu Hui envisage qu'on peut poursuivre l'opération sans limite... On retrouve dans le livre pour cette situation des nombres nommés « côté de N » (notre $\sqrt{N}$) sur lequel l'auteur des *Neuf Chapitres* fait des manipulations : La formation de Liu est sans ambiguïté : « On ne peut déterminer sa (la racine) valeur. C'est pourquoi c'est seulement quand on le nomme avec « côté » que **l'on ne commet pas d'erreur**. C'est analogue au fait, quand on divise 10 par 3, de prendre son reste comme étant $\frac{1}{3}$: on est alors à nouveau en mesure de restituer sa valeur. »



Exercice III :

Calculer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à près 10^{-5} .

A votre avis, la partie décimale est-elle périodique ?

Quelle conjecture pouvez-vous faire sur le nombre $\sqrt{2}$? (C'est-à-dire : quel est le plus petit ensemble de nombres qui semble le contenir ?)