

Qu'est-ce qu'une connaissance mathématique ?

Une réflexion épistémologique entre évaluation et didactique



Thomas De Vittori

Laboratoire Paul Painlevé – INSPE de Lille
thomas.devittori@univ-lille.fr

PARTIE 1 : CONNAISSANCES ET CONNAISSANCES SCOLAIRES

CONNAISSANCE, COMPETENCE, METHODE, DEMARCHE, STRATEGIE, NOTION, ETC. : TANT DE MOTS DANS LES PROGRAMMES...

LE CAS PARTICULIER DE LA CONNAISSANCE

CONNAISSANCE ET DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

CONNAISSANCES ET AUTOMATISMES

PARTIE 2 : CONNAISSANCES ET EVALUATIONS A GRANDE ECHELLE

LES EVALUATIONS NATIONALES ET INTERNATIONALES : DEFINIR UNE MESURE

PISA 2022

RAPPELS SUR LA MODELISATION DE RASCH : PILIER DE L'EVALUATION PISA ET DE BIEN D'AUTRES...

SYNTHESE SUR UN EXEMPLE (EVALUATION D'ETUDIANT.ES)

UN AUTRE EXEMPLE

LE CADRE DE TIMSS 2027

TIMSS MATHEMATICS CONTENT DOMAINS

TIMSS MATHEMATICS COGNITIVE DOMAINS

PARTIE 3 : D'AUTRES MODELES DE CONNAISSANCES

D'AUTRES MODELES DE CONNAISSANCES PLUS COMPLEXES

LES CDM *COGNITIVE DIAGNOSIS MODELS*

LA Q-MATRIX

LES MODELES DE RESEAUX BAYESIENS

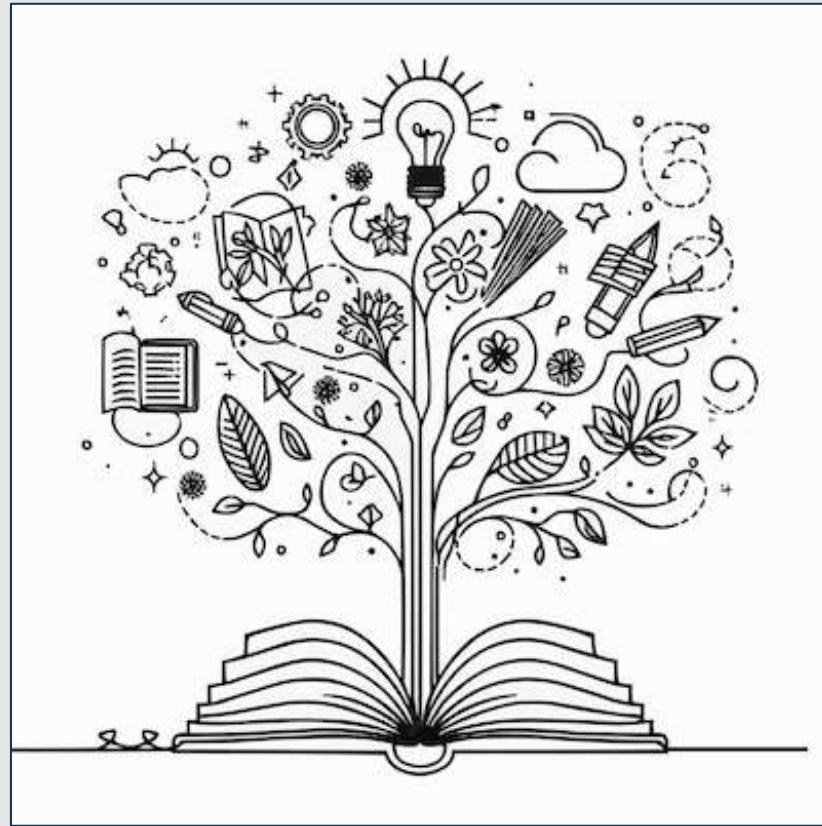
KST = UNE « THEORIE DE LA CONNAISSANCE » ?

LA PLATEFORME ALEKS

PETITE SYNTHESE

CONCLUSION

Partie 1 : Connaissances et connaissances scolaires



Connaissance, compétence, méthode, démarche, stratégie, notion, etc. : tant de mots dans les programmes...

Le programme de mathématiques définit un ensemble de **connaissances** et de **compétences** qui s'appuie sur le programme de collège, en réactivant les **notions** déjà étudiées et en y ajoutant un nombre raisonnable de nouvelles **notions**, à étudier de manière suffisamment approfondie.

[...]

La résolution de problèmes est un cadre privilégié pour développer, mobiliser et combiner plusieurs de ces **compétences**. Cependant, pour prendre des initiatives, imaginer des pistes de solution et s'y engager sans s'égarer, l'élève doit disposer d'automatismes. Ceux-ci facilitent en effet le travail intellectuel en libérant l'esprit des soucis de mise en œuvre technique et élargissent le champ des **démarches** susceptibles d'être engagées.

L'acquisition de ces réflexes est favorisée par la mise en place d'activités rituelles, notamment de calcul (mental ou réfléchi, numérique ou littéral). Elle est menée conjointement avec la résolution de problèmes motivants et substantiels, afin de stabiliser **connaissances**, **méthodes** et **stratégies**.

[...]

La mise en œuvre du programme doit permettre aux élèves d'acquérir des **connaissances**, des **méthodes** et des **démarches** spécifiques.

Programme de seconde générale et technologique, Preamble, BO spécial n° 1 du 22 janvier 2019



Le cas particulier de la connaissance

Gingras, Y. (2025). Qu'est-ce qu'une connaissance ? *Argument*, 27(2) printemps-été, 122-126.

Les mots « connaissance » et « savoir » — essentiellement synonymes en français, l'anglais n'ayant d'ailleurs qu'un seul mot : *knowledge* — qui sont eux aussi rarement définis.

Il existe pourtant en philosophie des sciences, et ce depuis Platon (dans *Théétète*), une définition relativement simple de la notion de connaissance. Elle consiste, selon Platon, en une « croyance vraie et justifiée », c'est-à-dire (de nos jours) validée par des méthodes généralement acceptées et potentiellement accessibles à toute personne raisonnable, quelle que soit par ailleurs son origine ethnique, son sexe ou la couleur de sa peau.

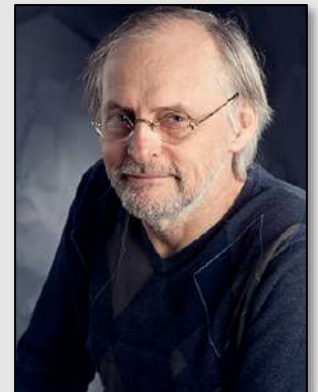
Selon cette définition, une connaissance est donc potentiellement universelle et ne peut être caractérisée par un qualificatif relié aux propriétés des personnes car c'est là confondre l'*origine* d'une connaissance et sa *validité*, laquelle ne dépend que des procédures de confirmation généralement acceptées.

Cette confusion entre origine et validité est analogue à celle entre le « contexte de recherche », déterminé par les diverses raisons subjectives qui influent sur le choix d'un thème de recherche particulier et le « contexte de justification » qui, lui, exige des arguments rationnels pour convaincre de la validité des théories et de la réalité des faits soumis à la discussion.

Cette distinction essentielle a été mise en avant par le philosophe allemand Hans Reichenbach en 1938 dans son ouvrage *Experience and Prediction*. En d'autres mots, on ne peut véritablement parler d'une « connaissance » sur un sujet donné avant d'avoir établi sa validité, ce qui la distinguera alors d'une croyance, d'une hypothèse ou d'une théorie.

Ainsi, toute connaissance véritable est en principe transmissible, intersubjective et transnationale. Il est ainsi des domaines où l'absence de clarification philosophique d'une idée apparemment simple peut avoir des conséquences politiques et sociales déplorables.

Gingras, Y. (2025). Qu'est-ce qu'une connaissance ? *Argument*, 27(2) printemps-été, 122-126.





Connaissance et didactique des mathématiques

Le modèle cK ϵ de Balacheff

- Le cadre théorique dans lequel le didacticien Nicolas Balacheff travaille est la Théorie des Situations Didactiques (TSD) de Brousseau (1998) avec pour projet le rapprochement de l'intelligence artificielle et de la didactique des mathématiques afin d'améliorer la conception des environnements d'apprentissage informatisés (Balacheff, 2013).
- Cherchant à étendre les apports de Vergnaud (1990) sur les champs conceptuels, l'idée principale de Balacheff est un nouveau travail sur les conceptions. Ce qui est nouveau chez Balacheff apparaît lorsqu'il fait de la conception une notion opérationnelle (pour l'apprentissage par ordinateur par exemple). Voici la caractérisation qu'il propose :

Une « conception » est caractérisée par un quadruplet (P, R, L, Σ) composé de :

P : un ensemble de problèmes

R : un ensemble d'opérateurs

L : un système de représentation

Σ : une structure de contrôle. (Balacheff & Margolinas, 2005)

Une « conception » est caractérisée par un quadruplet (P, R, L, Σ) composé de :

P : un ensemble de problèmes

R : un ensemble d'opérateurs

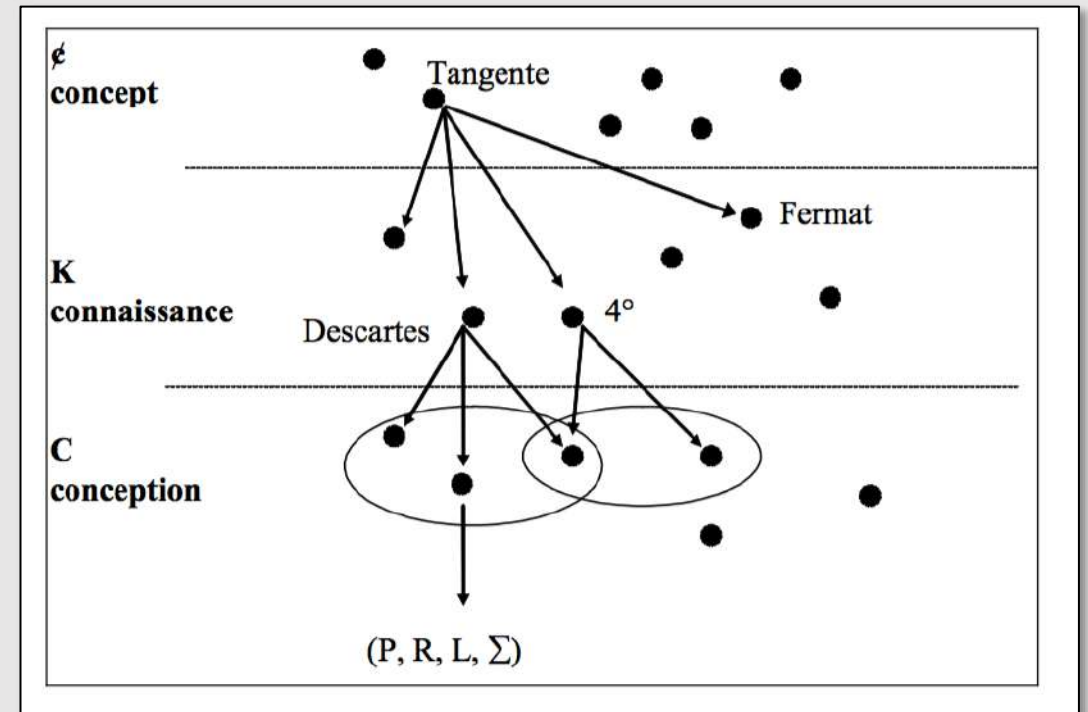
L : un système de représentation

Σ : une structure de contrôle. (Balacheff & Margolinas, 2005)

- **P, l'ensemble des problèmes**, est directement inspiré par le contexte épistémologique de la TSD. Selon Brousseau, et donc pour Balacheff, une connaissance mathématique est élaborée comme une réponse à un problème ou une catégorie de problèmes.
- **R, l'ensemble des opérateurs**, vise à rendre compte de toutes les techniques qui permettent la transformation du problème. En effet, lors de la résolution d'un problème, il convient généralement de modifier la situation initiale, étape par étape, pour la rendre finalement compatible avec un théorème connu ou une procédure de calcul. Dans l'analyse d'une conception, l'ensemble des opérateurs contient donc toutes les procédures mathématiques disponibles pour l'apprenant.
- Le troisième item du quadruplet, **le système de représentation L**, est peut-être le plus simple des quatre car il fait référence à la façon dont un problème est présenté.
- Le dernier point est **Σ , la structure de contrôle**. Comme l'explique Balacheff (2013), c'est quelque chose qu'il introduit afin de rendre visible ce qui est en jeu lorsque l'élève identifie à quel point il est proche de la solution. En d'autres termes, chaque fois que quelqu'un résout un problème mathématique, consciemment ou non, il utilise des éléments qui l'aident à contrôler ce qui est fait.

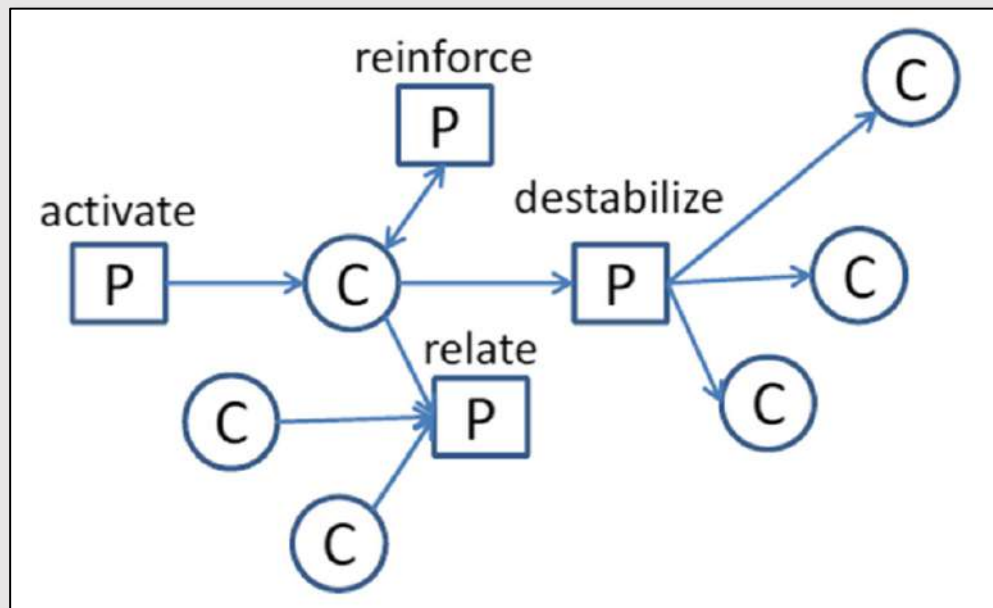
Les trois lettres de cK $\emptyset$

- Le modèle ainsi présenté est appelé cK $\emptyset$ par son concepteur et chacune des trois lettres est soigneusement définie.
- Le nom cK $\emptyset$ vient des trois piliers du modèle : conception (conception en anglais), connaissance (Knowledge en anglais), concept (concept en anglais).
- Le savoir K désigne une conception qui est identifiée et formalisée par une institution (Balacheff, 2013).
- Quant à $\emptyset$, le concept, c'est l'ensemble de toutes les conceptions ayant un même objet.



ckg : liens entre conceptions et problèmes

- Dans le modèle ckg, problèmes et conceptions sont profondément liés. Comme cela a été rappelé au début de ce paragraphe, le travail de Balacheff prend appui sur la TSD de Brousseau dans laquelle la connaissance mathématique est une réponse à certains problèmes. Pour Balacheff (2013), les relations entre les problèmes et les conceptions sont multiples ; un problème pouvant activer, renforcer, déstabiliser ou simplement se rapporter à une ou plusieurs conceptions.



Ce schéma correspond assez bien aux différentes situations scolaires

Activate : cas typique de l'activité de découverte d'une notion comme par exemple les vecteurs, ou les petits nombres à l'école maternelle

Reinforce : exercices/problèmes d'entraînement

Relate : combinaison de plusieurs cadres, par exemple algébrique et graphique pour une fonction

Destabilize : modification d'une conception comme par exemple pour les opérations avec l'introduction des nombres négatifs ou complexes

Connaissances et automatismes

Résolution de problèmes et automatismes

[...]

Progressivement, l'élève procède par analogie en rattachant une situation particulière à une classe plus générale de problèmes ou en adaptant une méthode connue à la situation étudiée. La disponibilité d'esprit nécessaire à ces étapes essentielles suppose **des connaissances, des procédures et des stratégies automatisées**. Ainsi, l'installation de réflexes intellectuels en matière de calcul et d'interprétation des données facilite la résolution de problèmes, en libérant l'esprit des considérations de mise en œuvre technique.

La ritualisation, par exemple au début de chaque séance, d'activités courtes consacrées au calcul ou à la lecture et au traitement de l'information chiffrée favorise la stabilisation des **connaissances** et des **méthodes** étudiées dans les classes antérieures. Il ne s'agit pas de réduire les mathématiques à des activités répétitives, mais de permettre un ancrage solide des fondamentaux immédiatement mobilisables pour résoudre des problèmes.

Dans la partie automatismes du programme sont énumérées les **connaissances** et les capacités relevant du **double objectif d'assurer le fondement d'une culture mathématique nécessaire à chaque futur citoyen et de développer des réflexes mathématiques utiles à la poursuite d'études**.

Programme de Première générale : mathématiques intégrées à l'enseignement scientifique, BO n° 27 du 7 juillet 2022

→ Dans la pratique, il s'agit *in fine* d'une liste d'items dont on postule que le contenu détaillé fait consensus au sein d'une communauté

→ En particulier, l'évaluation de la maîtrise d'une connaissance donnée relève (en première lecture !) de l'entière responsabilité et expertise de l'enseignant.e.

Partie 2 : Connaissances et évaluations à grande échelle



Les évaluations nationales et internationales : définir une mesure

PISA

Programme for International Student Assessment

- Création 1997, passation tous les 3 ans. Première session en 2000.
- Élèves de 15 ans
- Français / Mathématiques / Sciences
- Prochaine session 2029 (session 2025 « sciences » en cours de dépouillement, diffusion prévue en septembre 2026)



TIMSS

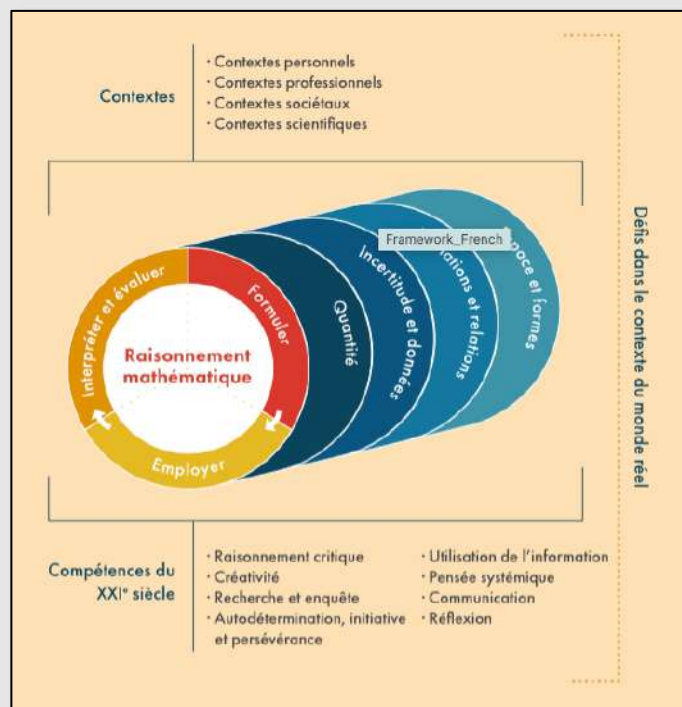
Trends in International Mathematics and Science Study

- Élèves de CM1 (grade 4) et de 4^e (grade 8)
- Mathématiques / Sciences
- Premières ébauches dès 1964, mais premier TIMSS en 1995, puis tous les 4 ans.
- Prochaine session 2027.

Évaluation	Connaissance mathématique mesurée	Approche principale
PISA	Culture mathématique : usage et application dans la vie réelle (raisonnement, interprétation, prise de décision). <i>Rq : En 2029 sera testée la capacité à comprendre l'IA et les informations dans les médias.</i>	<i>Littératie mathématique</i>
TIMSS	Savoirs scolaires + compétences cognitives associées (faits, concepts, procédures)	Basé sur le curriculum et trois domaines cognitifs

- **PISA** valorise davantage *l'utilisation des mathématiques dans des contextes variés du monde réel.*
- **TIMSS** s'appuie sur le *programme d'enseignement officiel* et mesure la maîtrise des connaissances et compétences telles qu'elles sont enseignées.

PISA 2022

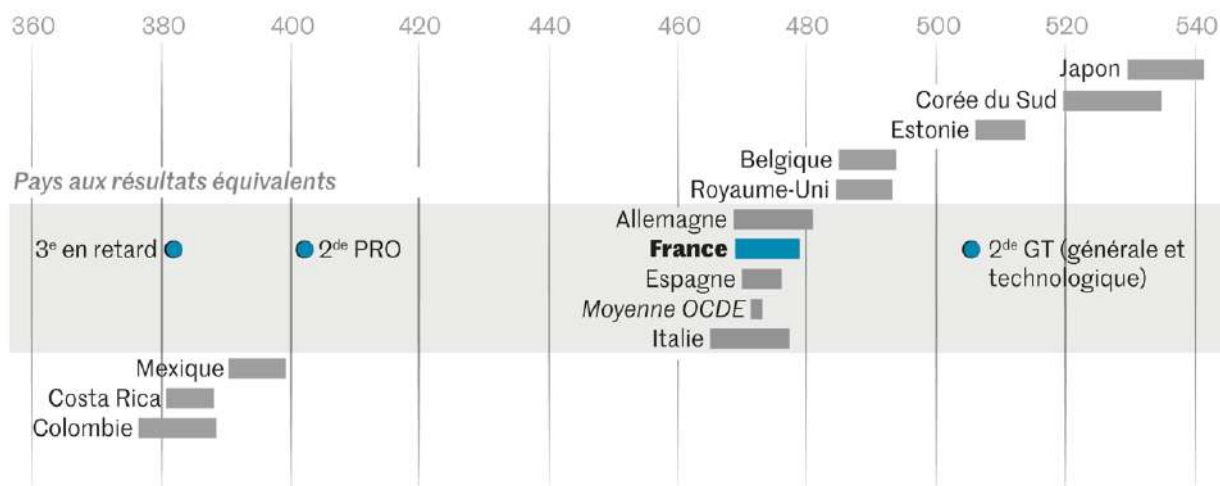


Qu'est-ce que la culture mathématique ?

La culture mathématique est l'aptitude d'un individu à raisonner de façon mathématique et à formuler, à employer et à interpréter les mathématiques pour résoudre des problèmes dans un éventail de contextes du monde réel. Elle nécessite notamment des concepts, des procédures, des faits et des outils pour décrire, expliquer et prévoir des phénomènes. Elle aide les individus à connaître le rôle que les mathématiques jouent dans le monde et à se comporter en citoyennes et citoyens du XXI^e siècle constructifs, engagés et réfléchis, c'est-à-dire à porter des jugements et à prendre des décisions en toute connaissance de cause. <http://pisa2022-maths.oecd.org>

Résultats en culture mathématique dans l'évaluation PISA 2022, par pays, en points

La représentation des résultats sous forme de barres permet de tenir compte des erreurs d'échantillonnage : le score de la France est fixé à 474 mais est plutôt compris entre 469 et 479.



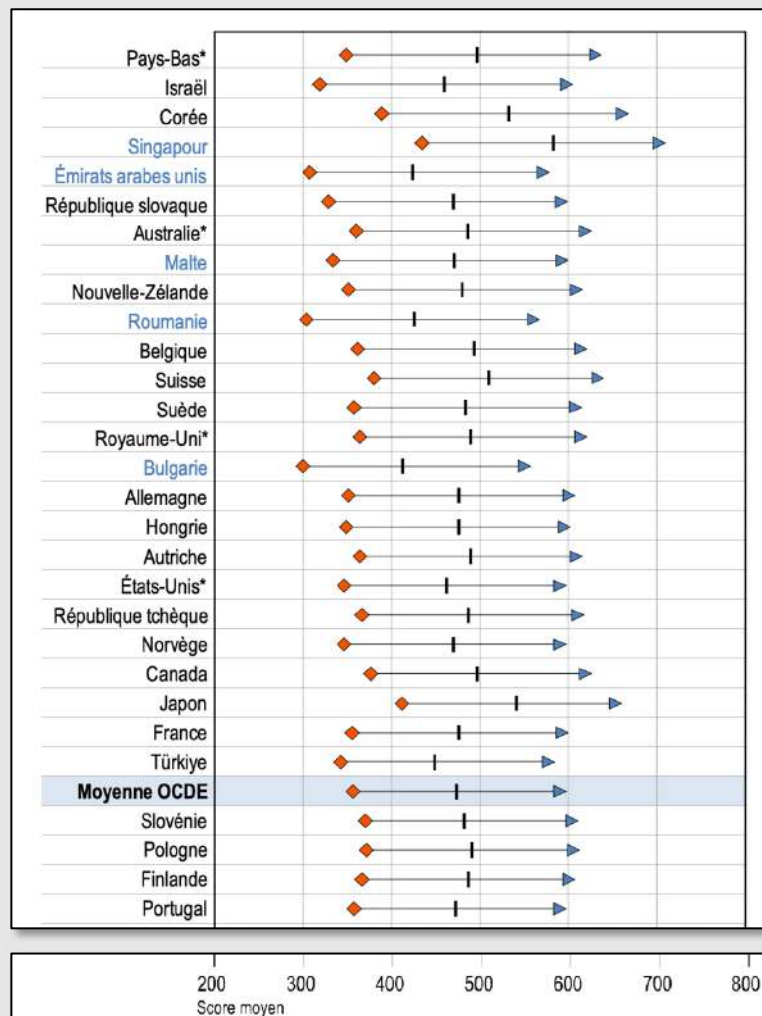
Champ : élèves de 15 ans scolarisés dans les pays membres de l'OCDE participant à PISA

Infographie : Le Monde • Source : PISA-DEPP

Bernigole V., Fernandez A., Loi M., & Salles F. (2023) PISA 2022 : la France ne fait pas exception à la baisse généralisée des performances en culture mathématique dans l'OCDE. *Note d'Information* n° 23.48, DEPP. <https://doi.org/10.48464/ni-23-48>

Graphique I.2.4. Score moyen en mathématiques du 10^e, 50^e et 90^e centile du spectre de performance

◆ 10^e centile | 50^e centile ► 90^e centile



Résultats du PISA 2022 Apprentissage et équité dans l'éducation, Volume I, p.66. OCDE

https://www.oecd.org/content/dam/oecd/fr/publications/reports/2023/12/pisa-2022-results-volume-i_76772a36/165f1d07-fr.pdf

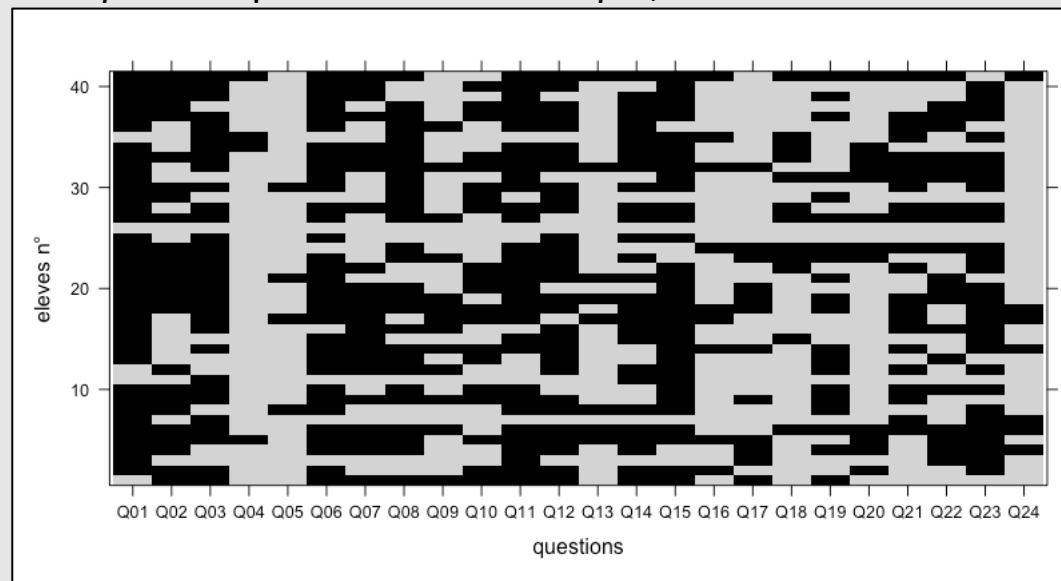
Rappels sur la modélisation de Rasch : pilier de l'évaluation PISA et de bien d'autres...

- **Les tests internationaux** PISA, par exemple, sont calibrés à partir d'une modélisation de Rasch (voir OECD, 2009, chapitre The Rasch Model)



- Contrairement à la théorie classique des tests qui s'intéresse à des échantillons représentatifs aléatoires, la théorie de la réponse à l'item se concentre sur les réponses des individus à des éléments de test individuels.

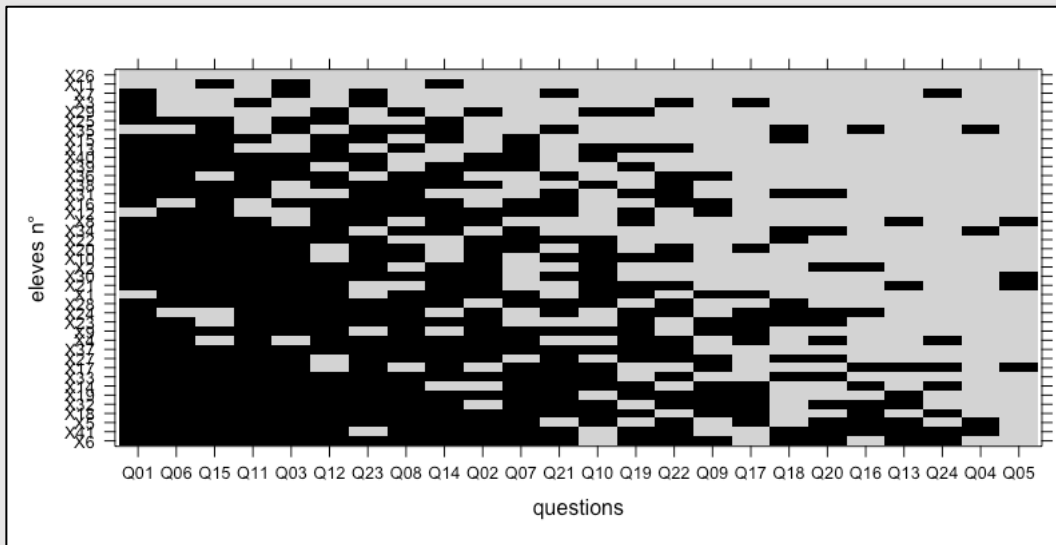
Exemple : 25 questions de didactique, 41 étudiant.es



Exemple d'une évaluation d'étudiant.es. En noir la question est réussie, en gris non.

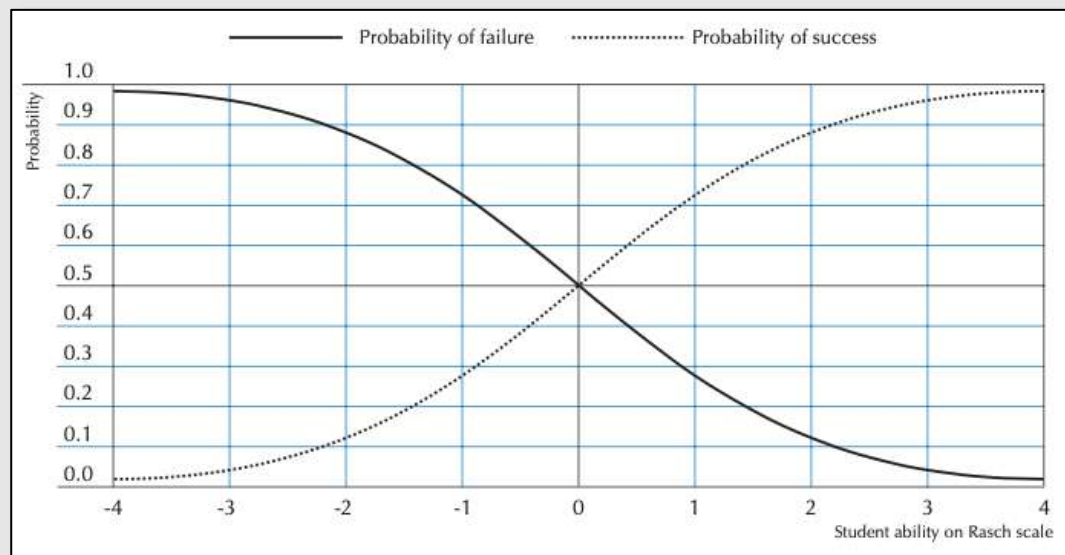
Remarque : les questions 4 et 5 ont particulièrement été échouées, on y reviendra...

- L'idée est alors de trier les items (colonnes) par difficulté croissante et les élèves par réussite croissante.



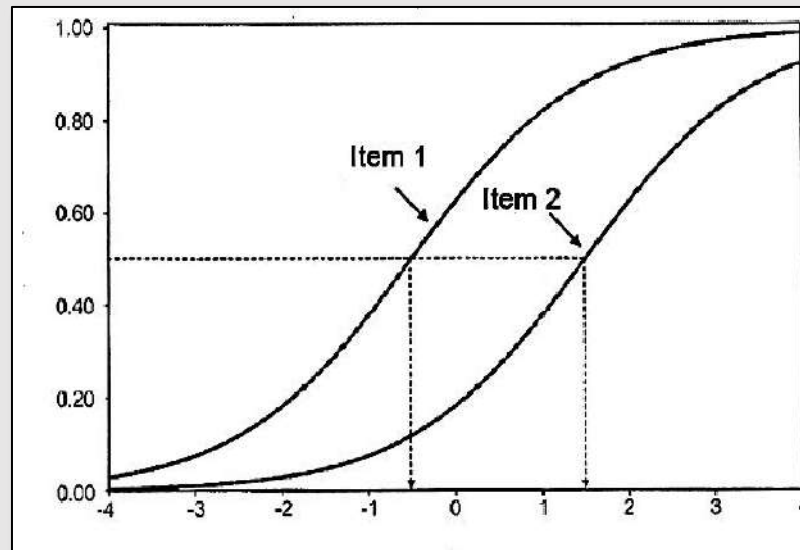
- Dans une situation idéale de **structure cumulative de connaissances**, on aurait une diagonale parfaite.

- Ces réponses sont **modélisées comme le résultat d'une expérience stochastique** dans laquelle la **probabilité d'une réponse donnée dépend d'un certain nombre de paramètres**. Les paramètres peuvent être liés à la personne ou à l'item, comme par exemple sa difficulté.
- Le modèle proposé par **Georg Rasch (1960)** ne comprend qu'un seul paramètre, la difficulté. **Il postule ainsi que les items ont des niveaux de difficulté différents mais toujours le même pouvoir discriminant**. Pour Rasch, la distribution théorique des probabilités de réponses correctes à chaque item suit une **fonction logistique**. Le point d'inflexion correspond à une **probabilité de réussite (ou d'échec) de 0.5**.



Un exemple de courbe pour un item en modélisation de Rasch
Figure tirée de OECD (2009)

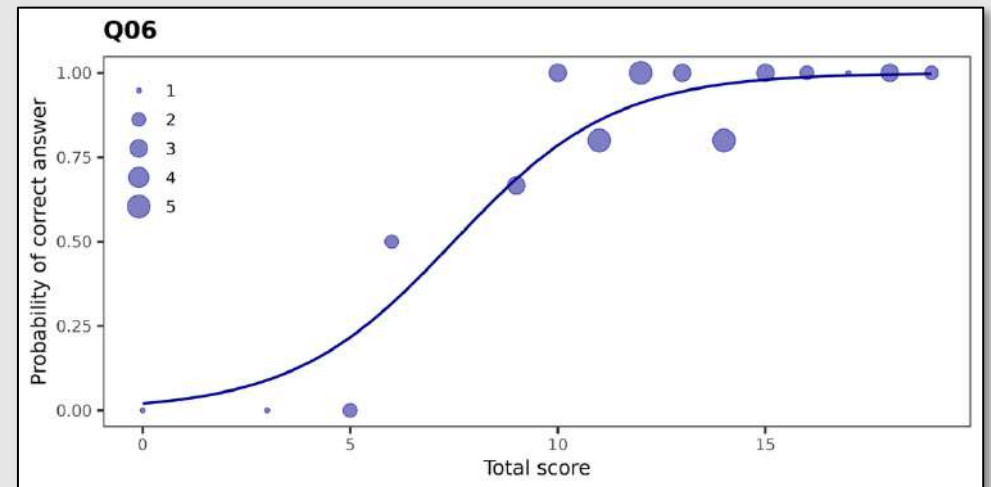
- Comme tous les items ont la même forme de distribution, la **difficulté d'un item spécifique est uniquement représentée par le décalage vers la gauche (plus facile) ou la droite (plus difficile)** de l'abscisse du point d'inflexion de la courbe. La modélisation consiste à **déterminer ces différents niveaux de difficulté** pour tous les items.
- Dans l'exemple ci-dessous, on voit les deux courbes caractéristiques de deux items, le premier de difficulté environ -0.5 et le second de difficulté environ +1.5.



Exemples de courbes de deux items en modélisation de Rasch. Figure tirée de MacDougall, M., & Stone, G. (2015)

- Le principal intérêt de cette modélisation est que les **courbes des différents items ne se coupent jamais entre-elles**. Ainsi, pour une abscisse donnée, une verticale coupera une et une seule fois chaque courbe, donnant directement la probabilité de réponse correcte à chacun des items.

- **Le modèle de Rasch** est très couramment **utilisé dans le domaine de l'éducation** et plus particulièrement **pour les évaluations**, qu'elles soient certificatives ou diagnostiques.

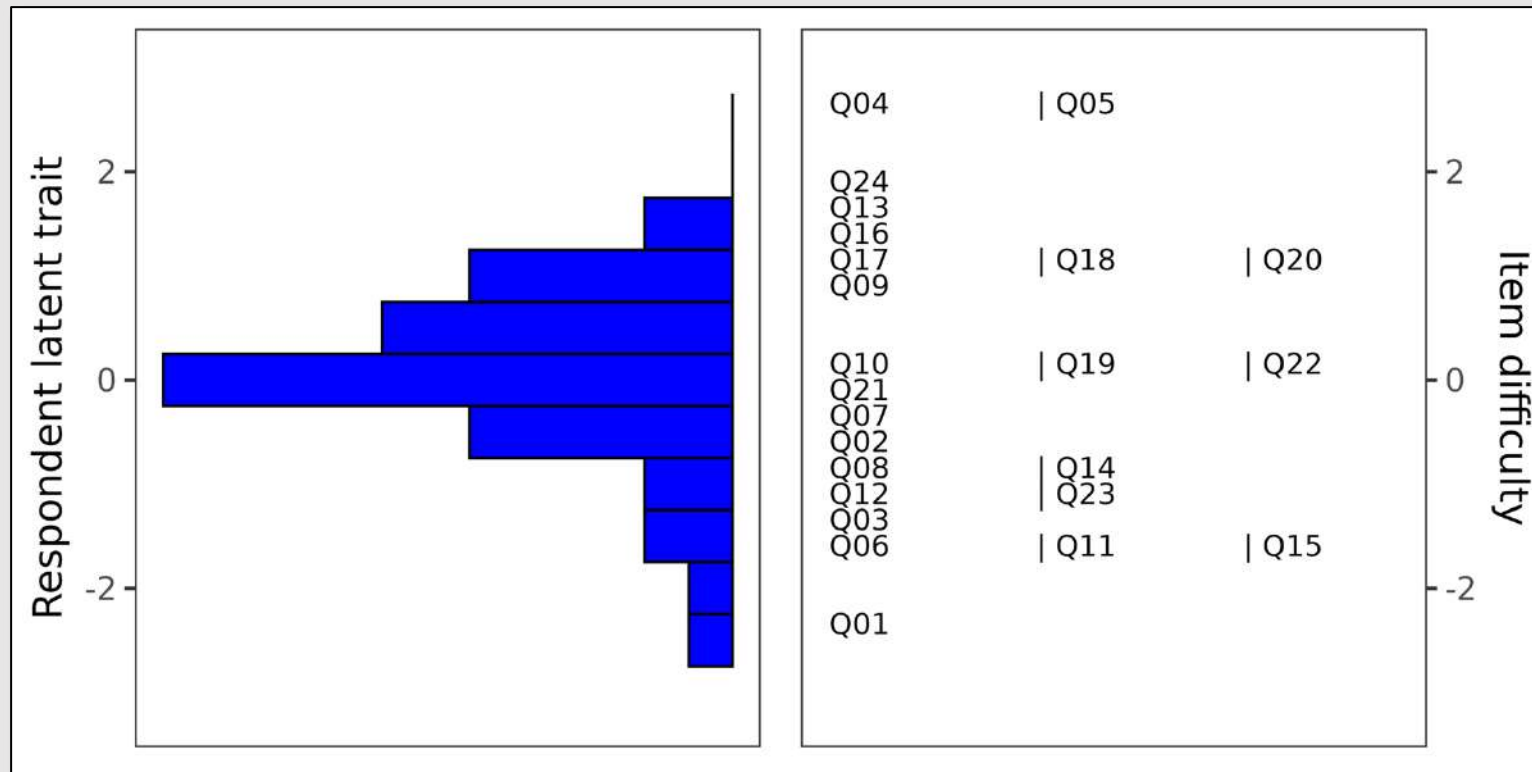


Remarque sur les **analyses de type Rasch pour les données unidimensionnelles**, on peut citer *Statistical Methods for Experimental Research in Education and Psychology*, Jimmie Leppink, Springer, 2019.

Les travaux récents de Van der Eijk et Rose (2015) nous donnent des raisons de repenser notre pratique courante consistant à utiliser l'analyse factorielle comme approche par défaut pour évaluer la structure d'un instrument psychométrique : pour les échelles de Likert et d'autres formes d'échelles catégorielles, qui sont des candidats probables à l'analyse factorielle dans la recherche en éducation et en psychologie, l'analyse factorielle exploratoire et confirmatoire a tendance à entraîner une surdimensionnalisation. Pour de telles données, nous pourrions envisager une utilisation accrue des modèles de la théorie de la réponse aux items tels que le modèle de Rasch. (notre traduction)

Synthèse sur un exemple (évaluation d'étudiant.es)

Représentation personnes-items (appelée aussi *Wrightmap*)



Remarque : les questions 4 et 5 sont bien les plus difficiles, on y reviendra...

Un autre exemple

Test de positionnement de début de seconde 2025 Premiers résultats. Série Études. Document de travail n° 2025-E15, Novembre 2025, DEPP (155 pages)

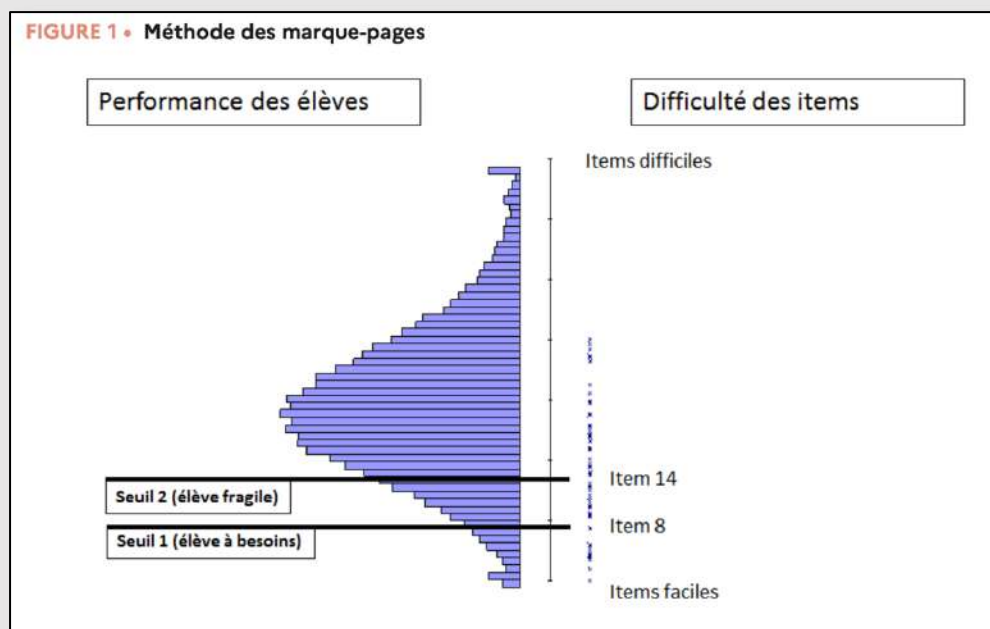
Remarque : même contenu dans les documents sur les résultats 6^e et 4^e

→ P.32, paragraphe sur la comparabilité qui met en regard les résultats 2024 et 2025

Lors de l'analyse des résultats, les **modèles de réponse à l'item sont réutilisés** et appliqués cette fois à l'ensemble des résultats des deux évaluations. L'estimation conjointe des modèles de réponse à l'item à partir des données de deux évaluations et la **présence d'items communs entre les deux évaluations** permet la comparaison directe à la fois des scores des individus et des difficultés des items entre les deux passations.

Un soin particulier est apporté à **l'analyse de ces items communs** entre les deux évaluations. Ainsi **les items retenus** dans l'analyse finale doivent d'une part ne **pas présenter de fonctionnement différentiel**, et d'autre part devaient **avoir des propriétés statistiques et psychométriques satisfaisantes**. Les données de l'évaluation de l'année précédente sont donc ré-analysées dans cette perspective de comparaison.

→ Puis p.34, paragraphe sur la détermination des seuils



Le cadre de TIMSS 2027

<https://timss2027.org/frameworks/math.html>

Philpot, R. & Aldrich, C.E.A. (2025). TIMSS 2027 mathematics assessment framework. In M. von Davier & A. M. Kennedy (Eds.), TIMSS 2027 Assessment Frameworks. Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center.

<https://doi.org/10.6017/lse.tpisc.timss.vp1245>



Les évaluations de mathématiques du TIMSS 2027 sont conçues de manière à ce qu'une certaine proportion de chaque domaine défini dans les cadres d'évaluation soit représentée parmi l'ensemble des items inclus dans l'évaluation, comme décrit dans les sections suivantes.

Le cadre d'évaluation en mathématiques du TIMSS définit à la fois le **domaine de contenu**, qui décrit les thèmes à évaluer, et le **domaine cognitif**, qui précise les processus cognitifs nécessaires pour résoudre correctement les items de mathématiques. (notre traduction)

→ Ils font la différence entre les « **mathematical content domains** » et les « **mathematics cognitive domains** » (taxonomie)

TIMSS Mathematics Content Domains

Exhibit 1.1: Target Percentages of the TIMSS 2027 Mathematics Assessment Devoted to Content Domains at the Fourth and Eighth Grades

Fourth Grade

Content Domains	Percentages
Number	50%
Measurement and Geometry	30%
Data	20%

Eighth Grade

Content Domains	Percentages
Number	30%
Algebra	30%
Geometry and Measurement	20%
Data and Probability	20%

Exemples (grade 8)

Expressions, opérations et équations

1. Trouver la valeur d'une expression ou d'une formule à partir des valeurs des variables.
2. Simplifier des expressions algébriques impliquant des sommes, des produits, des différences et des puissances entières positives ; comparer des expressions pour déterminer si elles sont équivalentes.
3. Écrire des expressions, des équations ou des inégalités pour représenter des situations-problèmes.
4. Résoudre (ou valider des solutions potentielles) des équations linéaires ; résoudre des inégalités linéaires simples et des systèmes d'équations linéaires simples à deux variables, y compris la validation des valeurs comme solutions. (notre traduction)

TIMSS Mathematics Cognitive Domains

Exhibit 1.2: Target Percentages of the TIMSS 2027 Mathematics Assessment Devoted to Cognitive Domains at the Fourth and Eighth Grades

Cognitive Domains	Fourth Grade	Eighth Grade
Knowing	40%	35%
Applying	40%	40%
Reasoning	20%	25%

Exemples

Connaitre (« *knowing* »)

Rappeler : Rappeler les définitions, la terminologie, les propriétés des nombres, les unités de mesure, les propriétés géométriques et la notation (par exemple, $a \times b = ab$, $a + a + a = 3a$).

Identifier : Identifier les nombres, les expressions, les quantités et les formes. Reconnaître quand des entités sont mathématiquement équivalentes. Lire des informations à partir de graphiques, de tableaux, de textes ou d'autres sources.

Ordonner : Ordonner et classer les nombres, les expressions, les quantités et les formes selon leurs propriétés communes.

Calculer : Calculer des opérations arithmétiques avec des nombres entiers, des fractions, des décimaux et des nombres entiers. (notre traduction)

FIGURE 3 • Exercice 3

The screenshot shows a digital interface for a TIMSS 2023 math exercise. On the left, there is a black sidebar with the 'TIMSS 2023' logo and a timer icon. The main area is white and contains the following text: 'Zoé a $\frac{1}{2}$ litre de jus d'orange et Nolan a $\frac{3}{4}$ de litre de jus d'orange.' followed by 'Combien de jus d'orange Zoé et Nolan ont-ils ensemble ?'. Below this, it says 'Réponse : ' followed by a green rectangular input box and the word 'litres'. In the top right corner of the main area, there is a small blue box with the text 'ME01182'. At the bottom of the interface, there is a blue bar containing icons for a pencil, an eraser, and navigation arrows, along with the IEA logo and the text 'TIMSS & PIRLS BOSTON COLLEGE'.

TIMSS 2023

ME01182

Zoé a $\frac{1}{2}$ litre de jus d'orange et Nolan a $\frac{3}{4}$ de litre de jus d'orange.

Combien de jus d'orange Zoé et Nolan ont-ils ensemble ?

Réponse : litres

IEA TIMSS & PIRLS BOSTON COLLEGE

Source : IEA-TIMSS

TABLEAU 10 • Caractéristiques de l'exercice 3

Descriptif de la tâche	L'exercice vise à vérifier que l'élève est capable de mobiliser la procédure d'addition de fractions sans dénominateur commun dans une situation problème. Trois procédures sont possibles : - utiliser l'équivalence $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ puis additionner $\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$; - décomposer $\frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4}$, pour additionner $\frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ - puis $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$; - utiliser les écritures décimales : $0,5 + 0,75 = 1,25$.
Réponse attendue	$\frac{5}{4}$ ou équivalent par exemple 1,25.
Exploitations pédagogiques possibles (variantes) ou supports pédagogiques	Résoudre le problème avec du matériel permettant de représenter les fractions : blocs de fractions, réglettes cuisenaire. Retravailler sur les fractions avec des jeux comme « l'atelier des potions ».
Références aux programmes français (BO n°31 du 30/07/2020)	Cycle 3 Nombres et calculs Résoudre des problèmes mettant en jeu les quatre opérations. Problèmes à une ou plusieurs étapes relevant des structures additive et/ou multiplicative. Utiliser et représenter des fractions simples, les nombres décimaux. Connaître des égalités entre des fractions usuelles (exemples : $5/10 = 1/2$; $10/100 = 1/10$; $2/4 = 1/2$).

TABLEAU 11 • Cadrage TIMSS

Domaine de contenu	
Fractions et décimaux Ajouter et soustraire des fractions simples, y compris celles qui sont placées dans des situations problèmes (les fractions peuvent avoir des dénominateurs de 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 ou 100).	
Domaine cognitif	Niveau
Appliquer Mettre en œuvre des stratégies et des opérations pour résoudre des problèmes.	Trop difficile pour appliquer un niveau

TABLEAU 12 • Statistiques

	Taux de réponse correcte (%)			Taux de non-réponse (%)		
	Ensemble	Filles	Garçons	Ensemble	Filles	Garçons
France	5	2	8	9	11	8
International	18	16	20	6	6	5
UE	12	9	16	5	6	4
France 2019	7	5	9	11	12	10

Source : IEA-TIMSS, DEPP

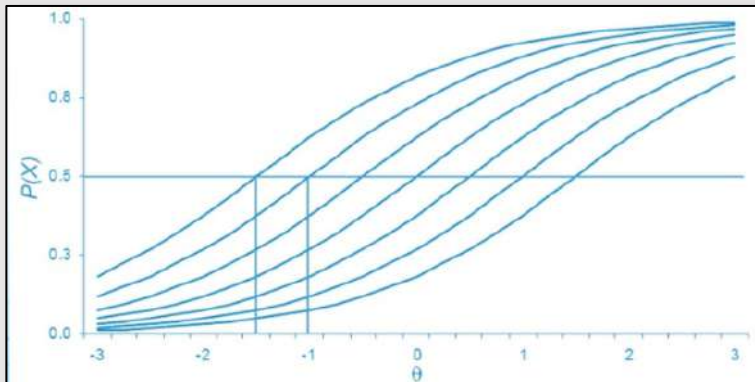
Champ : France (hors Mayotte), public et privé sous contrat. Pays participants à TIMSS 23 au Grade 4.

L'un des principaux objectifs et principes de conception du TIMSS, ainsi que d'autres enquêtes à grande échelle sur les acquis des élèves, est de fournir des comparaisons valides entre les populations d'élèves, fondées sur une large couverture du domaine des acquis. Cela nécessite généralement d'assurer une couverture complète de ce domaine au moyen de centaines d'items dans la discipline concernée.

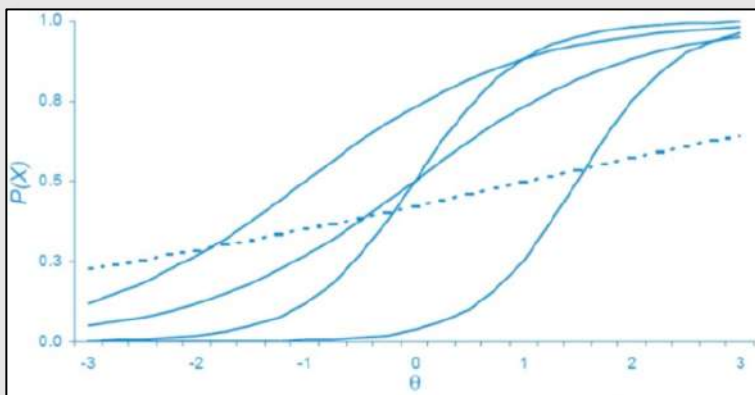
Cependant, compte tenu du temps d'évaluation limité, seule une partie de ces items peut être administrée à un même élève. En mathématiques comme en sciences, cela se traduit par une évaluation comprenant plusieurs centaines d'items de performance, dont seule une fraction peut être administrée à chaque élève en raison du temps de passation disponible (36 minutes par discipline en quatrième année du primaire, 45 minutes par discipline en huitième année).
(notre traduction)

→ les questions sont donc prises dans des banques de questions qui sont construites pour être représentatives des domaines.

Le TIMSS utilise généralement le modèle logistique à deux paramètres (2PL) de la théorie de réponse à l'item (TRI) pour les items valant un point, et le modèle généralisé de crédit partiel (GPCM ; Muraki, 1992) pour les items valant jusqu'à deux points. Le modèle logistique à trois paramètres (3PL) de la TRI (Lord & Novick, 1968) est utilisé pour tous les items à choix multiple (ou « à sélection unique ») introduits dans le TIMSS 2019 ou dans des cycles antérieurs, et continue d'être appliqué à tous les items à choix multiple qui ne peuvent pas être ajustés au modèle 2PL. Le modèle 3PL ajoute un troisième paramètre à la fonction de l'item, qui agit comme une asymptote inférieure. Cette asymptote inférieure est notée (c_i) et quantifie la probabilité théorique d'une réponse correcte pour les répondants ayant le niveau de compétence le plus faible possible. (notre traduction)

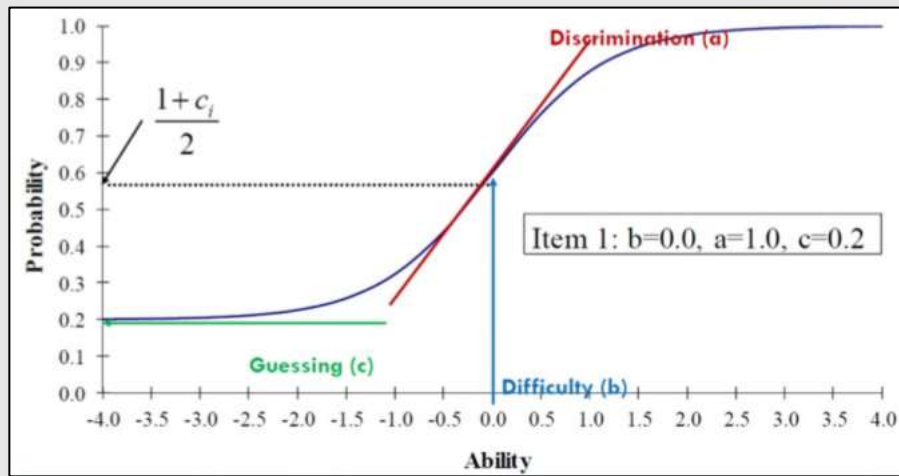


1PL, dont Rasch



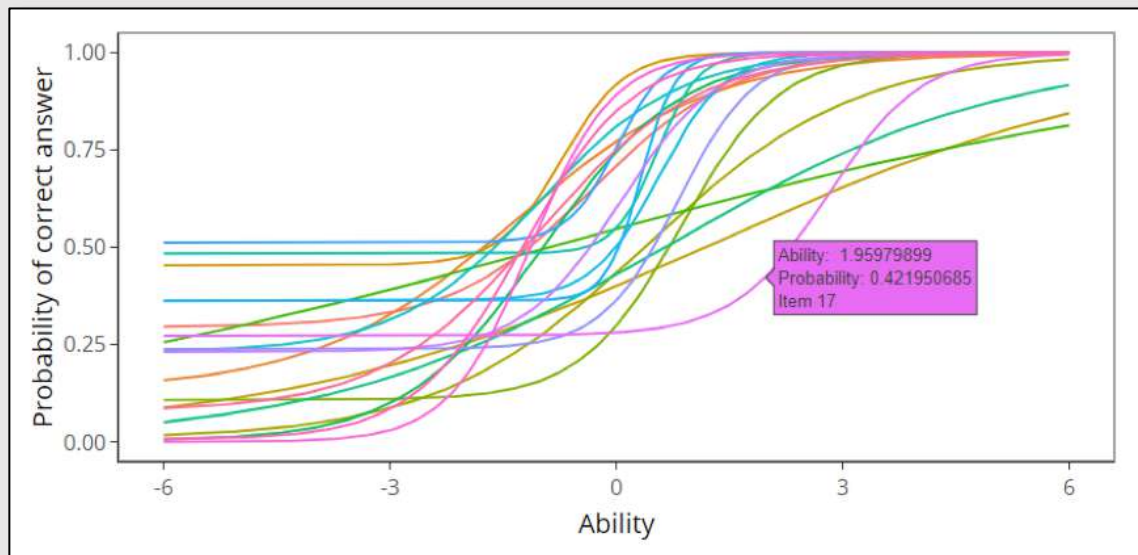
2PL

(les images ne sont pas dans le rapport)



3PL

Simple exemple d'items d'un test (pas TIMSS)



(les images ne sont pas dans le rapport)

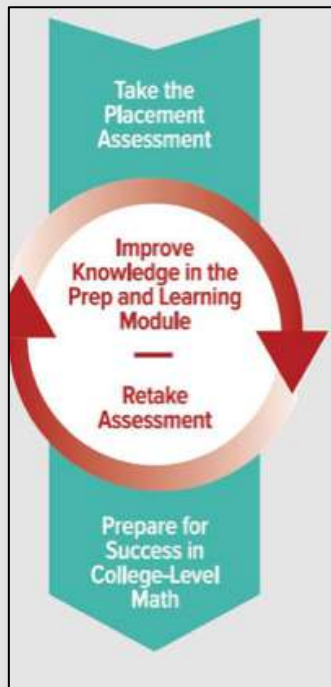
Partie 3 : D'autres modèles de connaissances



D'autres modèles de connaissances plus complexes

- Le point commun des différentes modélisations des connaissances précédentes réside dans le rôle clé de l'**unidimensionnalité** de ce qu'on cherche à évaluer.
 - Pour PISA, c'est un postulat de principe ; on mesure *la* littératie mathématique, même s'il y a plusieurs domaines (nombres, formes, données, etc.)
 - Pour TIMSS, on joue sur des domaines de connaissance (nombre, géométrie, etc.) qui sont donnés *a priori* et définis par les concepteurs de l'évaluation.
- Ces pratiques sont communément admises et ne choquent personne. Par contre, on accepterait mal de mélanger un score de Français avec un score de Mathématiques (et statistiquement ça ferait sans doute tomber le modèle)
- Les champs de connaissances sont donc séparés par nécessité méthodologique.
 - **Mais même au sein d'un domaine déterminé, comment voir les liens entre les différentes connaissances ?**

Interlude...



Sun, S.; Wu, X.; Xu, T. A Theoretical Framework for a Mathematical Cognitive Model for Adaptive Learning Systems. *Behavioral Sciences*. 2023, 13, 406. <https://doi.org/10.3390/bs13050406>

Image : ALEKS (cf plus loin dans l'exposé)

Avec l'évolution de l'éducation, l'objectif de l'évaluation est passé de la simple vérification des effets de l'apprentissage des élèves à la promotion d'un apprentissage plus efficace chez ces derniers. (notre traduction)

Les CDM *Cognitive Diagnosis Models*

- Alors que les modèles précédents donnent surtout un score global, les CDM cherchent à savoir **quelles connaissances spécifiques l'élève possède**.
- La **Q-Matrix** est le cœur du modèle.
- L'un des modèles les plus utilisé est le modèle **DINA** (Deterministic Inputs, Noisy And gate) proposé par Jimmy de la Torre vers 2009.





La Q-matrix (rien à voir avec Keanu Reeves...)

- On crée un tableau qui croise les **exercices** (items) et les **compétences** requises (attributs).
 - *Exemple* : Pour réussir une addition de fractions, l'élève doit posséder l'attribut « Trouver le dénominateur commun » et l'attribut « Additionner des entiers ».

Table 1. Fraction Subtraction Data, 20 Items, 8 Hypothesized Skills

Item no.	Item	Skills	Item no.	Item	Skills
1	$5/3 - 3/4$	$\alpha_4, \alpha_6, \alpha_7$	11	$4 \frac{1}{3} - 2 \frac{4}{3}$	$\alpha_2, \alpha_5, \alpha_7$
2	$3/4 - 3/8$	α_4, α_7	12	$1 \frac{1}{8} - 1/8$	α_7, α_8
3	$5/6 - 1/9$	α_4, α_7	13	$3 \frac{3}{8} - 2 \frac{5}{6}$	$\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7$
4	$3 \frac{1}{2} - 2 \frac{3}{2}$	$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7$	14	$3 \frac{4}{5} - 3 \frac{2}{5}$	α_2, α_7
5	$4 \frac{3}{5} - 3 \frac{4}{10}$	$\alpha_2, \alpha_4, \alpha_7, \alpha_8$	15	$2 - 1/3$	α_1, α_7
6	$6/7 - 4/7$	α_7	16	$4 \frac{5}{7} - 1 \frac{4}{7}$	α_2, α_7
7	$3 - 2 \frac{1}{5}$	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_7$	17	$7 \frac{3}{5} - 4/5$	$\alpha_2, \alpha_5, \alpha_7$
8	$2/3 - 2/3$	α_7	18	$4 \frac{1}{10} - 2 \frac{8}{10}$	$\alpha_2, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$
9	$3 \frac{7}{8} - 2$	α_2	19	$4 - 1 \frac{4}{3}$	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7$
10	$4 \frac{4}{12} - 2 \frac{7}{12}$	$\alpha_2, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8$	20	$4 \frac{1}{3} - 1 \frac{5}{3}$	$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7$

Note: α_1 = convert a whole number to a fraction; α_2 = separate a whole number from a fraction; α_3 = simplify before subtracting; α_4 = find a common denominator; α_5 = borrow from whole number part; α_6 = column borrow to subtract the second numerator from the first; α_7 = subtract numerators; and α_8 = reduce answers to simplest form. The Q-matrix is from de la Torre and Douglas (2004).

Item ID	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8
1	0	0	0	1	0	1	1	0
2	0	0	0	1	0	0	1	0
3	0	0	0	1	0	0	1	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Exemple : DeCarlo, L. T. (2011). On the analysis of fraction subtraction data: The DINA model, classification, latent class sizes, and the q-matrix. *Applied Psychological Measurement*, 35(1), 8–26. <https://doi.org/10.1177/0146621610377081>

- Les résultats sont généralement donnés comme une liste de compétences acquises ou non

	MLE.skill11	MLE.skill12	MLE.skill13	MLE.skill14	MLE.skill15
[1,]	0	1	1	0	1
[2,]	1	1	0	1	1
[3,]	1	1	0	1	0
[4,]	1	1	0	1	1
[5,]	0	0	1	0	1
[6,]	0	0	0	0	1
[7,]	0	0	1	0	1
[8,]	1	1	1	0	0
[9,]	0	1	1	0	1
[10,]	1	1	1	1	1

(simple exemple)

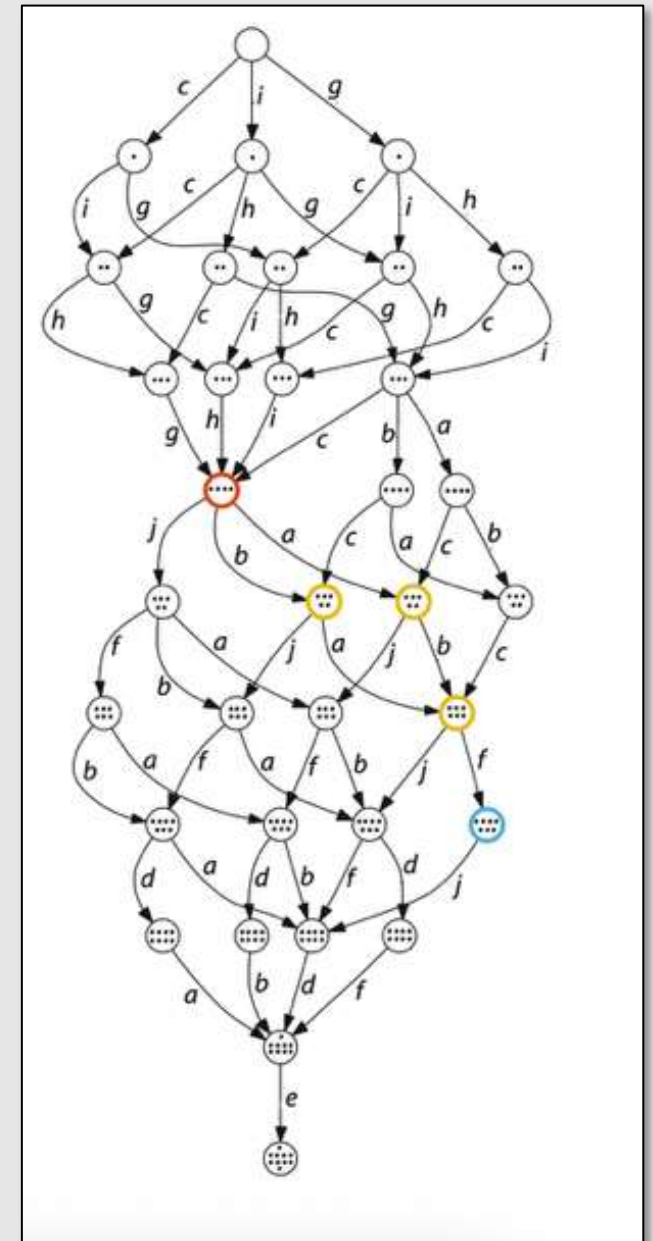
- L'intérêt est de pouvoir **tester plusieurs connaissances / compétences** en une seule fois.
- Il reste toutefois un très **gros travail d'élaboration de la Q-matrice**. En particulier, il faut s'assurer qu'elle ne comporte pas d'erreurs de catégorisation des items sur les traits latents... On peut extraire la Q-matrice des données, mais dans ce cas il faut être sûr de pouvoir interpréter (combien de traits ? qui représentent quoi ?)

→ **Mais il existe aussi d'autres solutions !**

Les Modèles de Réseaux Bayésiens

- De plus en plus utilisés dans les logiciels d'apprentissage adaptatif, ce sont des modèles qui considèrent **la connaissance comme un réseau de probabilités interconnectées**.
- Le principe, exemple : Si un élève réussit un exercice complexe sur les dérivées, le modèle met à jour automatiquement la probabilité qu'il maîtrise aussi le calcul algébrique de base.
- Application : Cela permet de créer des **tests adaptatifs** (le prochain exercice s'ajuste en temps réel au niveau de l'élève).

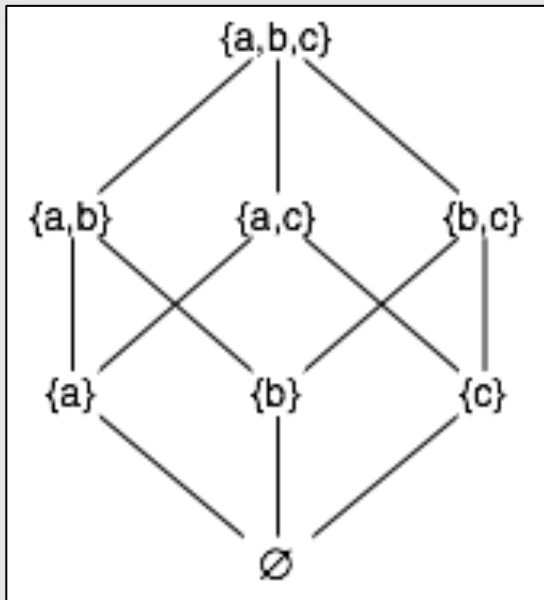
→ Un des exemples les plus récents et la théorie des espaces de connaissances (KST, Knowledge Space Theory)



KST = une « théorie de la connaissance » ?

La KST définit la connaissance non pas comme une capacité interne invisible, mais comme **un chemin possible dans un réseau de problèmes / exercices** (on retrouve ici un peu l'idée de Balacheff).

- **La connaissance est topologique** : Apprendre, c'est se déplacer d'un point à un autre dans ce treillis.
- **L'erreur est informative** : Si un élève réussit un exercice complexe sans réussir ses prérequis, la KST signale une « anomalie » (soit l'élève a deviné, soit le graphe est mal construit).



La structure de l'Espace de Connaissance

L'espace de connaissance contient les états possibles, par exemple :

- $\emptyset$ L'élève ne sait rien faire
- $\{a\}$ ou $\{b\}$ ou $\{c\}$ Maîtrise d'une seule technique de base
- $\{a, b\}$ Maîtrise des deux bases, mais pas encore en combinaison avec autre chose
- Etc.

→ Dans la pratique, tous les chemins ne sont pas possibles.

Application à la Géométrie (Pythagore)

Si on considère un exercice de géométrie, le graphe serait plus linéaire dans une première approche :

1. **a** : Identifier le triangle rectangle et l'hypoténuse
2. **b** : Appliquer la formule directe $a^2 + b^2 = c^2$
3. **c** : Manipuler la formule pour chercher un côté adjacent $b^2 = c^2 - a^2$

Dans ce cas, l'espace de connaissances est une **chaîne** :

$$\emptyset \subset \{a\} \subset \{a, b\} \subset \{a, b, c\}$$

- Mais si on venait à ajouter des calculs sur des valeurs, on ajouterait des branches pour les opérations, mais aussi sans doute pour toutes les connaissances sur la racine carrée.
- On pourrait également chercher à identifier plus finement ce qui se joue entre **b** et **c** quant aux connaissances sur le calcul littéral.

La plateforme ALEKS

L'une des principales plateformes d'exercices en ligne qui reposent KST est **ALEKS** (entreprise commerciale, USA)



Site web ALEKS <https://www.mheducation.com/prek-12/program/microsites/MKTSP-GAB02M0/browse/ppl.html>

ALEKS PPL: A Math Placement Test

High school is a crucial time for students to begin planning for college success. *ALEKS* Placement, Preparation and Learning's (*ALEKS PPL*) unique combination of adaptive assessments and personalized learning, accurately identifies students' readiness for college-level math.

ALEKS PPL provides insight into what each student knows and is ready to learn with a single personalized, open-response assessment covering 314 topics in 25 questions or less. The entire assessment can be completed in 90 minutes. Based on this adaptive assessment, *ALEKS PPL* determines a student's readiness and places him or her into courses from Basic Math to Calculus 1.

Higher Education Math Placement

This course covers the topics shown below.

Curriculum (314 topics)

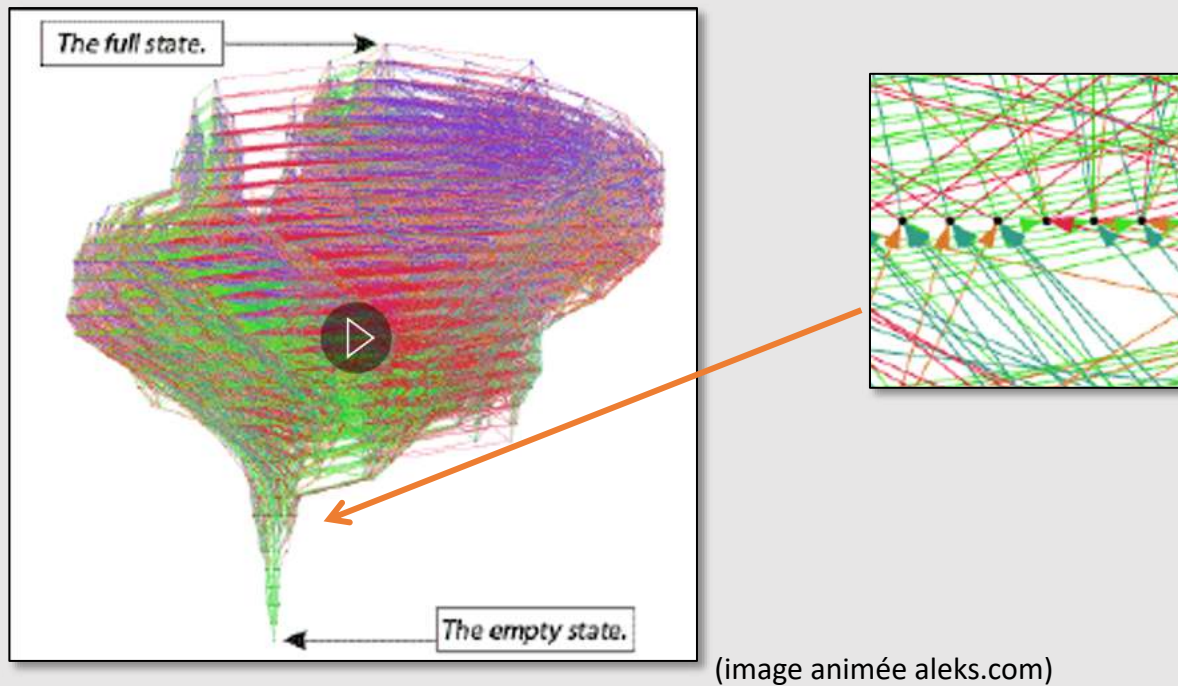
- Whole Numbers, Fractions, and Decimals (37 topics)
 - Operations with Whole Numbers (9 topics)
 - Adding 2-digit numbers with regrouping a ten
 - Subtraction of 2-digit numbers with regrouping
 - Multiplying with regrouping
 - Introduction to multiplication of large numbers
 - Division with regrouping
 - Introduction to exponents
 - Order of operations with whole numbers
 - Order of operations with whole numbers and grouping symbols
 - Order of operations with whole numbers and exponents: Basic
 - Equivalent Fractions and Ordering (8 topics)
 - Equivalent fractions
 - Simplifying a fraction
 - Fractional position on a number line
 - Plotting fractions on a number line
 - Writing an improper fraction as a mixed number
 - Writing a mixed number as an improper fraction
 - Ordering fractions with the same denominator
 - Using a common denominator to order fractions

• Trigonometry (29 topics)

- Angles (5 topics)
 - Converting between degree and radian measure: Problem type 1
 - Sketching an angle in standard position
 - Reference angles: Problem type 1
 - Coterminal angles
 - Arc length and central angle measure
- Right Triangle Trigonometry (6 topics)
 - Sine, cosine, and tangent ratios: Variables for side lengths
 - Using a trigonometric ratio to find a side length in a right triangle
 - Using a trigonometric ratio to find an angle measure in a right triangle
 - Finding trigonometric ratios given a right triangle
 - Solving a triangle with the law of sines: Problem type 1
 - Solving a triangle with the law of cosines
- Unit Circle (5 topics)
 - Finding coordinates on the unit circle for special angles
 - Trigonometric functions and special angles: Problem type 1
 - Trigonometric functions and special angles: Problem type 2
 - Finding values of trigonometric functions given information about an angle: Problem type 1
 - Finding values of trigonometric functions given information about an angle: Problem type 2
- Graphing Trigonometric Functions (4 topics)
 - Amplitude and period of sine and cosine functions
 - Amplitude, period, and phase shift of sine and cosine functions
 - Sketching the graph of $y = a \sin(x+c)$ or $y = a \cos(x+c)$
 - Sketching the graph of $y = a \sin(bx)$ or $y = a \cos(bx)$

<https://www.aleks.com/highered/ppl/ALEKS Placement Problem Types.pdf>

- Le **travail d'indentification des connaissances** est très important.
- Mais l'intérêt est de travailler directement dans **l'espace de connaissances global**, sans distinguer les sous-domaines.
- Le « **niveau de connaissance** » est alors un **état** dans le graphe des possibles.



Remarque : on peut avoir une approche KST déterministe ou bayésienne

→ À plus petite échelle, on peut chercher reconstruire un **graphe bayésien** à partir des données (issues d'une étude exploratoire par exemple)

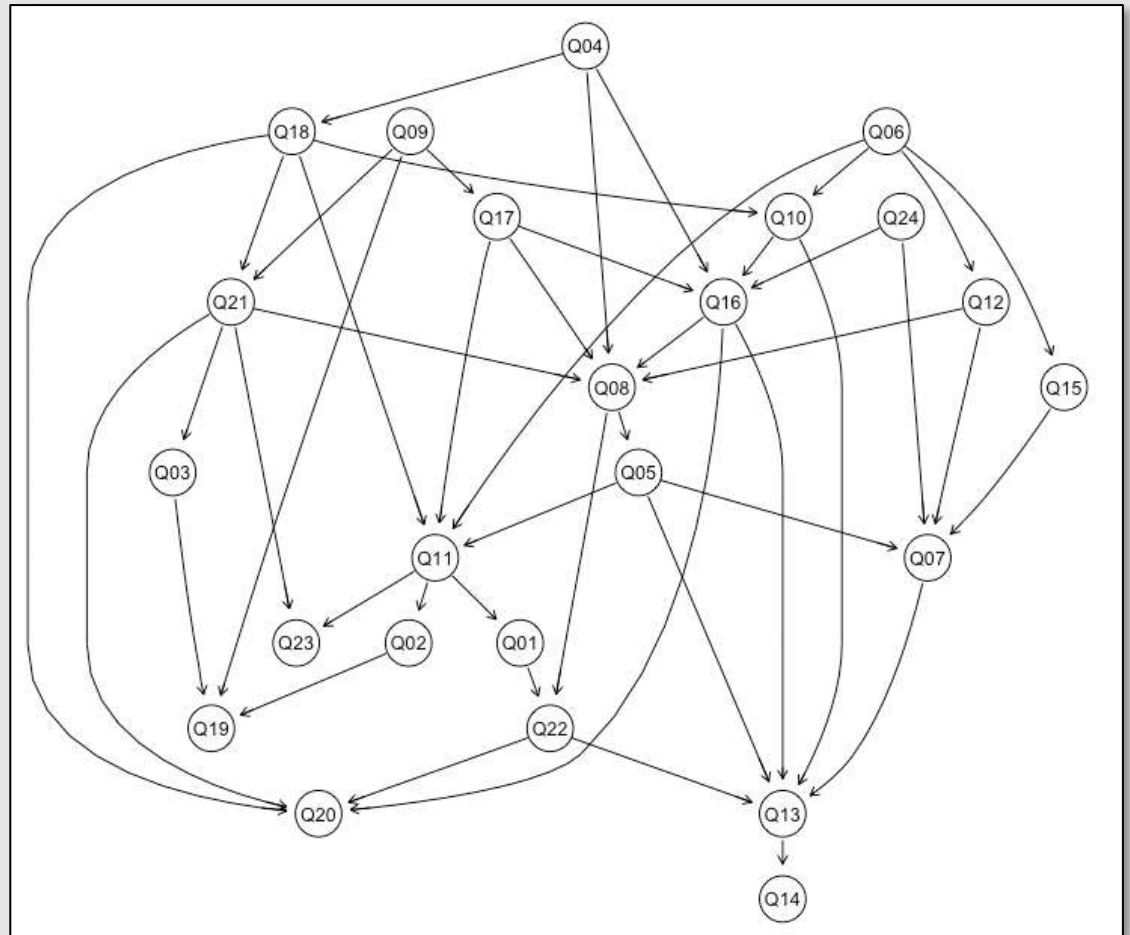
Retour sur l'exemple de l'évaluation de mes étudiant.es

25 questions de *didactique*, 41 étudiant.es

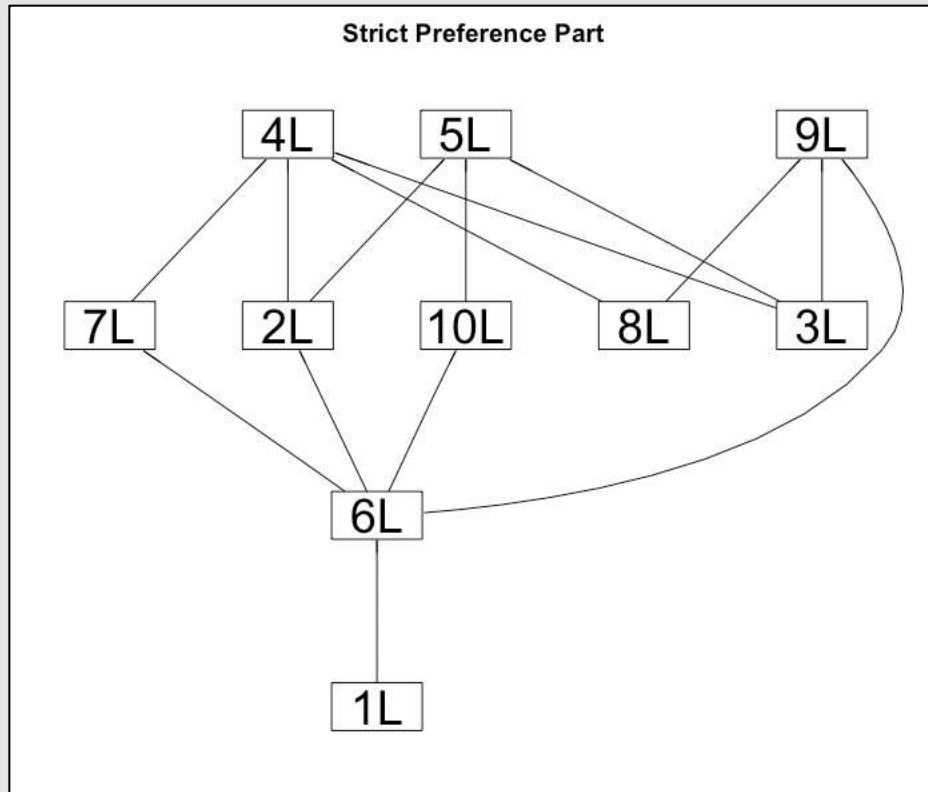
Important :

Ici, le graphe est un peu « à l'envers » par rapport à KST. Il faut lire que la réussite à l'item Q04 (tout en haut induit) la réussite aux items Q18, Q08 et Q16 avec une certaine probabilité.

On peut lire aussi que la probabilité de réussir Q10 (en haut à droite) est conditionnelle par rapport à Q06 et Q18.

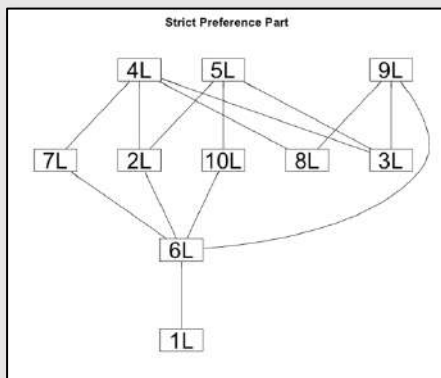


Dans le cas de KST, on aura plutôt une approche par **Inductive Item Tree Analysis** pour reconstruire le graphe de l'espace de connaissances.



(les 10 premiers items du test avec les étudiant.es)

Remarque : les questions 4 et 5 sont bien celles qui représentent le plus haut niveau de connaissances (cette fois, on n'y reviendra plus...)



Interprétation (pas du tout sérieuse...)

Est-ce que ça a du sens en termes de *connaissances* ?
Exemple de $\{1\} - \{1,6\} - \{1,6,9\}$

1. L'annexe 1 présente un extrait d'activité proposé sur le site « Les fondamentaux » de Canopé. Pour chacune des propositions, donner une raison pour laquelle un.e élève pourrait se tromper.

1. → fractions

6. Dans l'une de ses publications, l'*Institut français pour l'éducation* présente les exemples d'exercices sur les nombres décimaux à éviter reproduits dans l'annexe 4. Expliquer, pour chacune des questions, comment une conception erronée des nombres décimaux pourrait permettre à un.e élève d'obtenir la bonne réponse. Pour chacun des trois exercices, proposer d'autres valeurs qui permettraient de mettre en défaut la stratégie erronée de l'élève.

6. → décimaux

9. En classe de Seconde, un.e enseignant.e a revu avec les élèves la méthode permettant de retrouver l'écriture fractionnaire d'un nombre rationnel non décimal à partir de son écriture décimale. Dans un exercice d'application, les élèves doivent appliquer cette méthode au nombre $5,8\overline{12} = 5,8121212121212 \dots$. Donner la fraction cherchée et expliciter une erreur à laquelle l'enseignant.e peut s'attendre.

9. → passage de l'écriture décimale à la fraction

Annexe 1
Extrait d'un QCM sur le thème des fractions.
Site *Les fondamentaux*, Canopé, consulté en octobre 2025.

3) Ces fractions représentées par les bandes sont-elles égales ? Cliquez sur la bonne réponse.

✓ Correction ⚡ Recommencer

a)			→ égales / inégales
b)			→ égales / inégales
c)			→ égales / inégales
d)			→ égales / inégales
e)			→ égales / inégales
f)			→ égales / inégales

On remarque aussi que les questions 3 et 8 demandent une capacité à anticiper le discours de l'enseignant.e (3. [...] Comment l'amener à critiquer son résultat pour instiller un doute ? ; 8. [...] Quels commentaires feriez-vous à cet élève pour l'aider à progresser ?

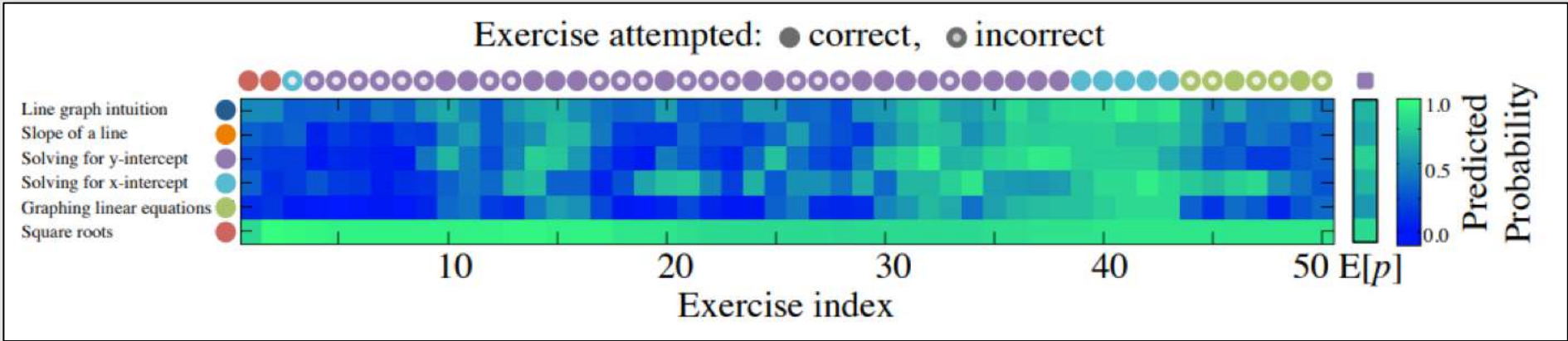
→ ce n'est pas si mal...

Petite synthèse

Modèle	Objectif principal	Utilisé par...
IRT (ex. Rasch)	Classer les élèves et égaliser les tests	PISA, TIMSS
CDM (Matrice Q)	Identifier les lacunes précises	Évaluations diagnostiques
KST, Réseaux Bayésiens	Personnaliser le parcours	Plateformes d'E-learning

Mais il y en a tellement d'autres...

BKT (Bayesian Knowledge Tracing), **DINO** (Deterministic Input, Noisy OR), Modèles de **Réseaux Bayésiens Multi-niveaux**, **G-DINA** (Generalized DINA), etc.



Exemple, modèle BKT : https://hal.science/hal-04154064v1/file/JFRB_2023_BKT_1_.pdf

Conclusion

- **Définir / délimiter une connaissance** n'est pas un acte anodin, ni dans le quotidien d'une classe, ni en recherche
- On peut voir **deux grandes tendances** : la définition *a priori* des connaissances (généralement par un groupe d'experts) ou la recherche *a posteriori* des filiations dans des jeux de données (type data mining). Les deux sont sans doute complémentaires.
- Je n'ai pas évoqué l'**IA**, car cela pose encore d'autres questions...
- Dans l'éducation, toute approche se trouve limitée par le fait de travailler sur de l'**humain**, mais aussi par les **coûts** (ingénierie, déploiement, maintenance, etc.)
- Cela ouvre sans doute de **nouvelles questions...**



Qu'est-ce qu'une connaissance mathématique ? Une réflexion épistémologique entre évaluation et didactique



Thomas De Vittori

Laboratoire Paul Painlevé – INSPE de Lille
thomas.devittori@univ-lille.fr

ChatGPT
Sponsorisé ·

Aidez-les à dompter les maths avec ChatGPT.



Comment expliquer les fractions
à mon fils pour qu'il apprenne
au fur et à mesure ?

Essayez ChatGPT

CHATGPT.COM
Essayez ChatGPT.

S'inscrire

Publicité Facebook, le 06/03/2026