



COLLÈGE
DE FRANCE
—1530—



LA COGNITION MATHÉMATIQUE

avec un focus sur la perception et la compréhension des graphiques

Lorenzo Ciccione, PhD

Maître de Conférences en Psychologie Cognitive

lorenzo.ciccione@univ-paris8.fr

PROGRAMME

La cognition mathématique

- ➔ Le sens du nombre
- ➔ Les intuitions mathématiques
- ➔ L'enseignement des mathématiques

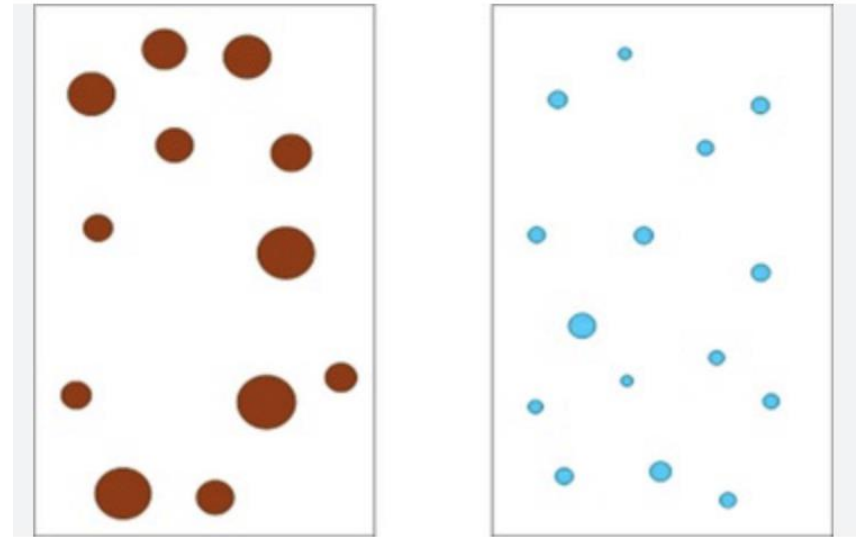
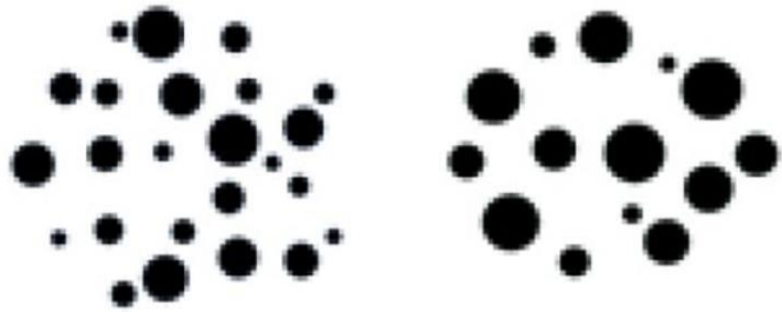
Un objet mathématique particulier : les graphiques

- ➔ L'histoire d'un produit culturel récent
- ➔ La perception des graphiques
- ➔ Les bases neurales de la perception des graphiques
- ➔ Un cas intéressant : les fonctions exponentielles

123 LE SENS DU NOMBRE

LE SENS DU NOMBRE

Une habilité innée à saisir la numérosité approximée des objets qui nous entourent.



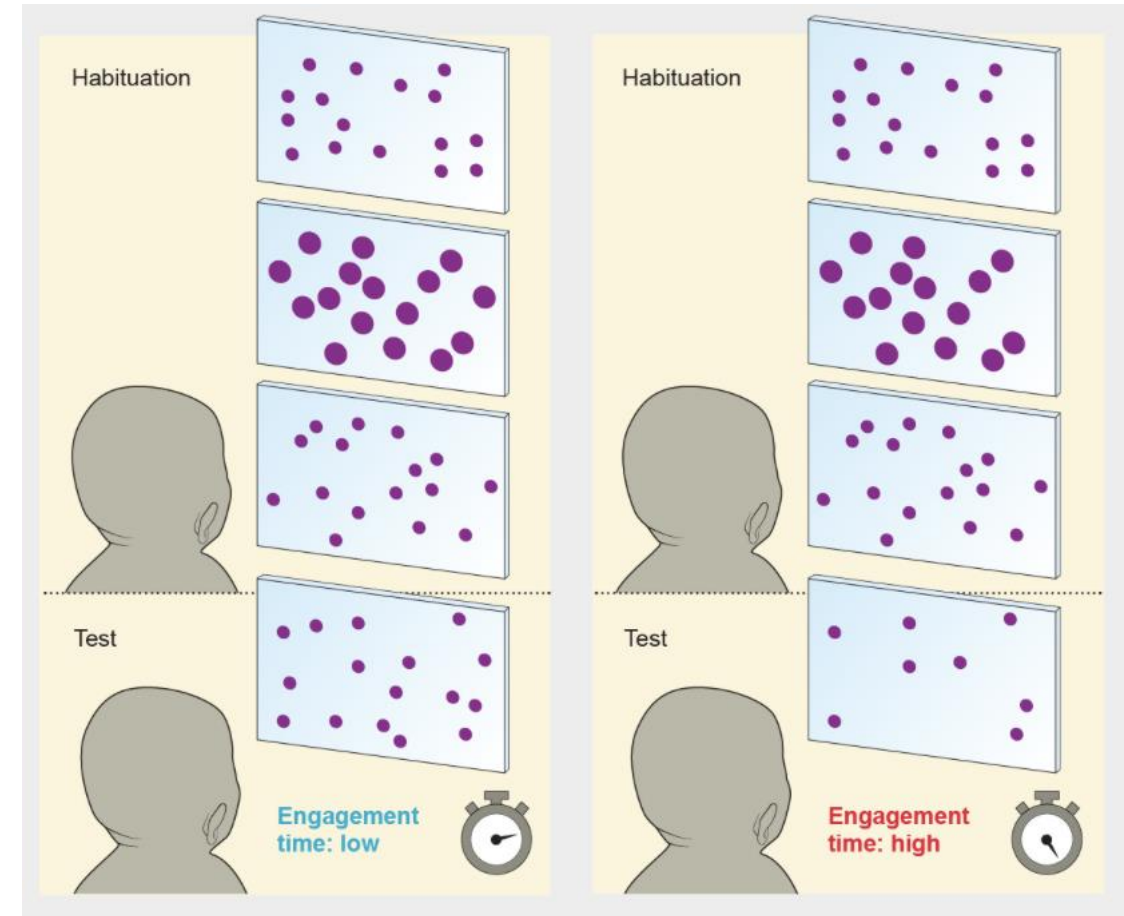
LE SENS DU NOMBRE

Cette habilité possède un avantage évolutif clair et elle est en effet retrouvée à travers les âges, les cultures et les espèces.



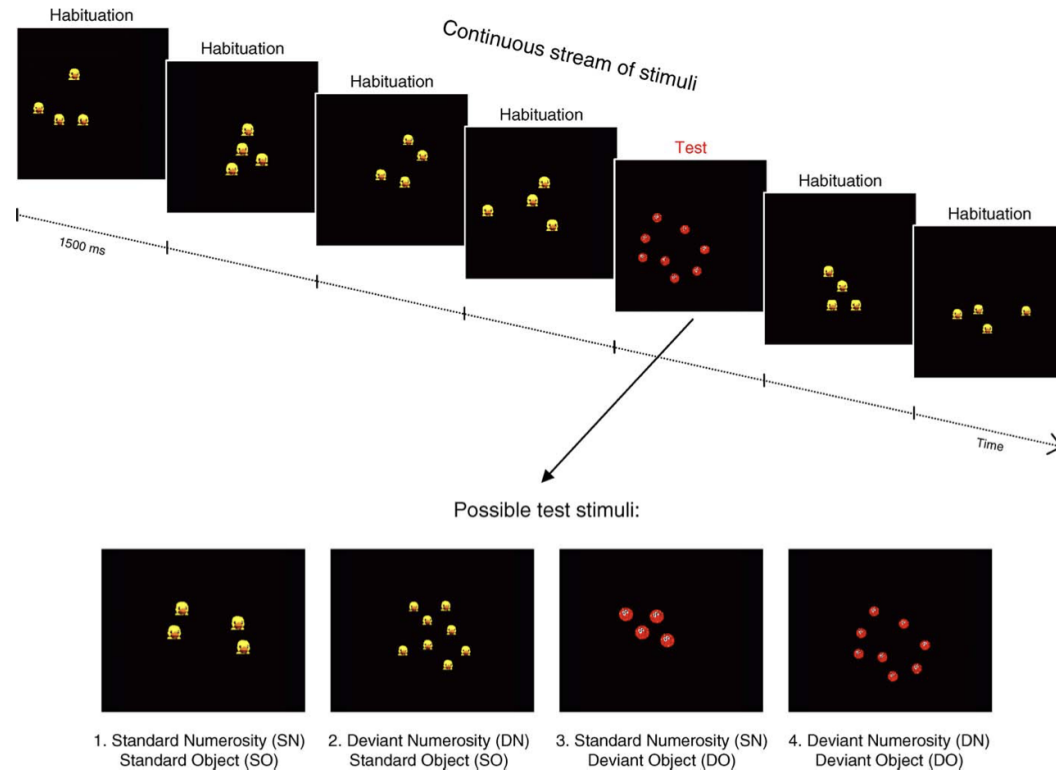
CHEZ LES BEBES

Des bébés sont d'abord exposés plusieurs fois à la même quantité et on trouve qu'ils réagissent avec surprise quand on change de quantité (ce qui montre donc qu'ils ont bien encodé la quantité !).

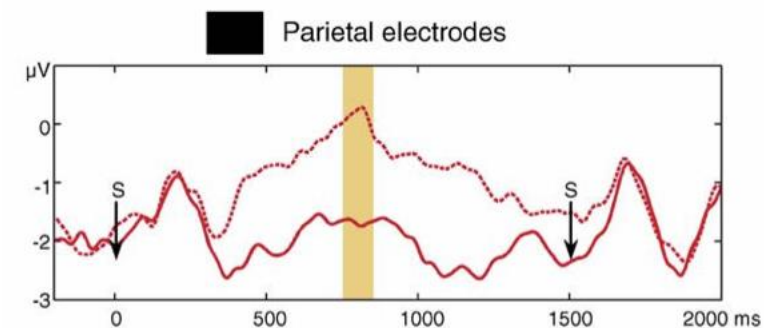
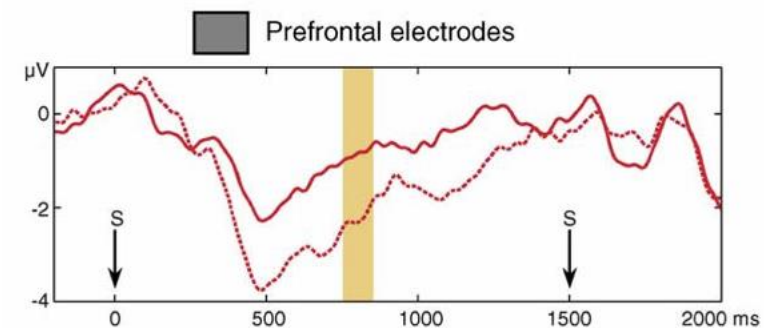
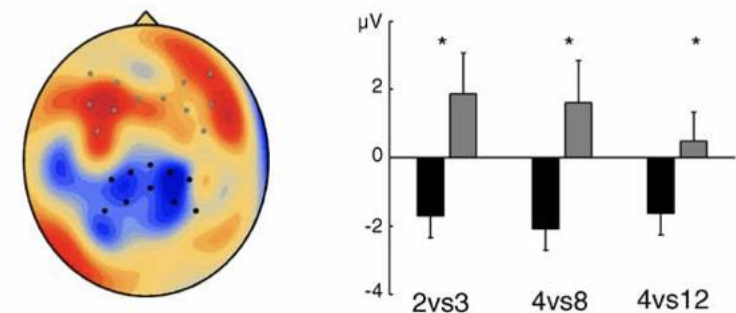


CHEZ LES BEBES

Le cerveau des bébés de 3 mois s'active différemment quand ils détectent un changement de quantité.



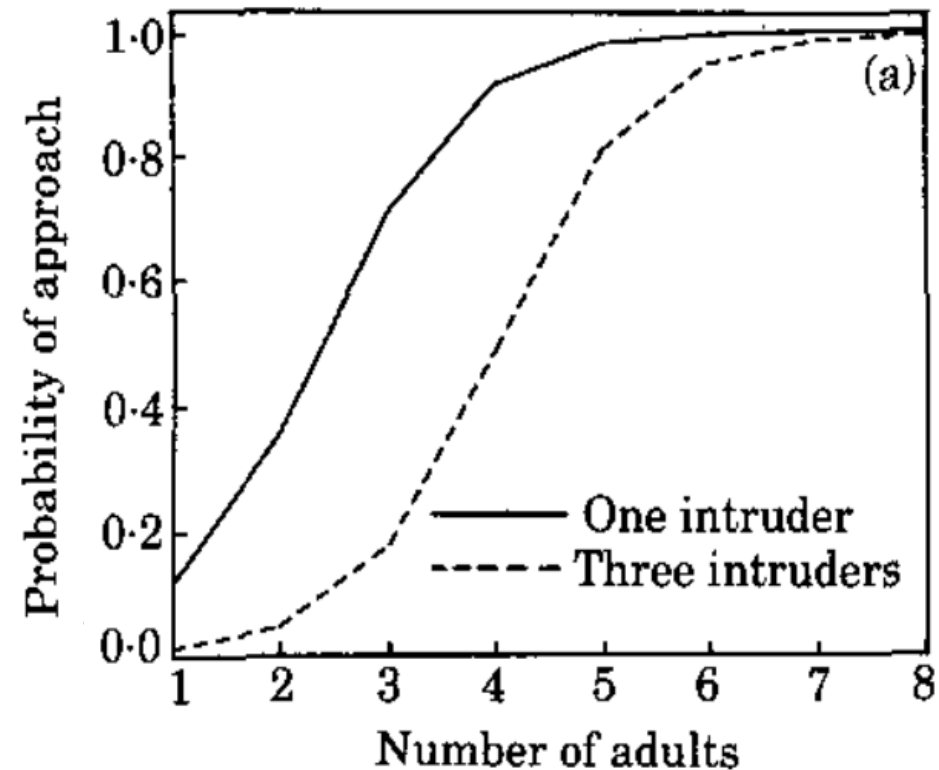
A Response to number change (DN-SN)



— Deviant number (DN)
 - - - Standard number (SN)

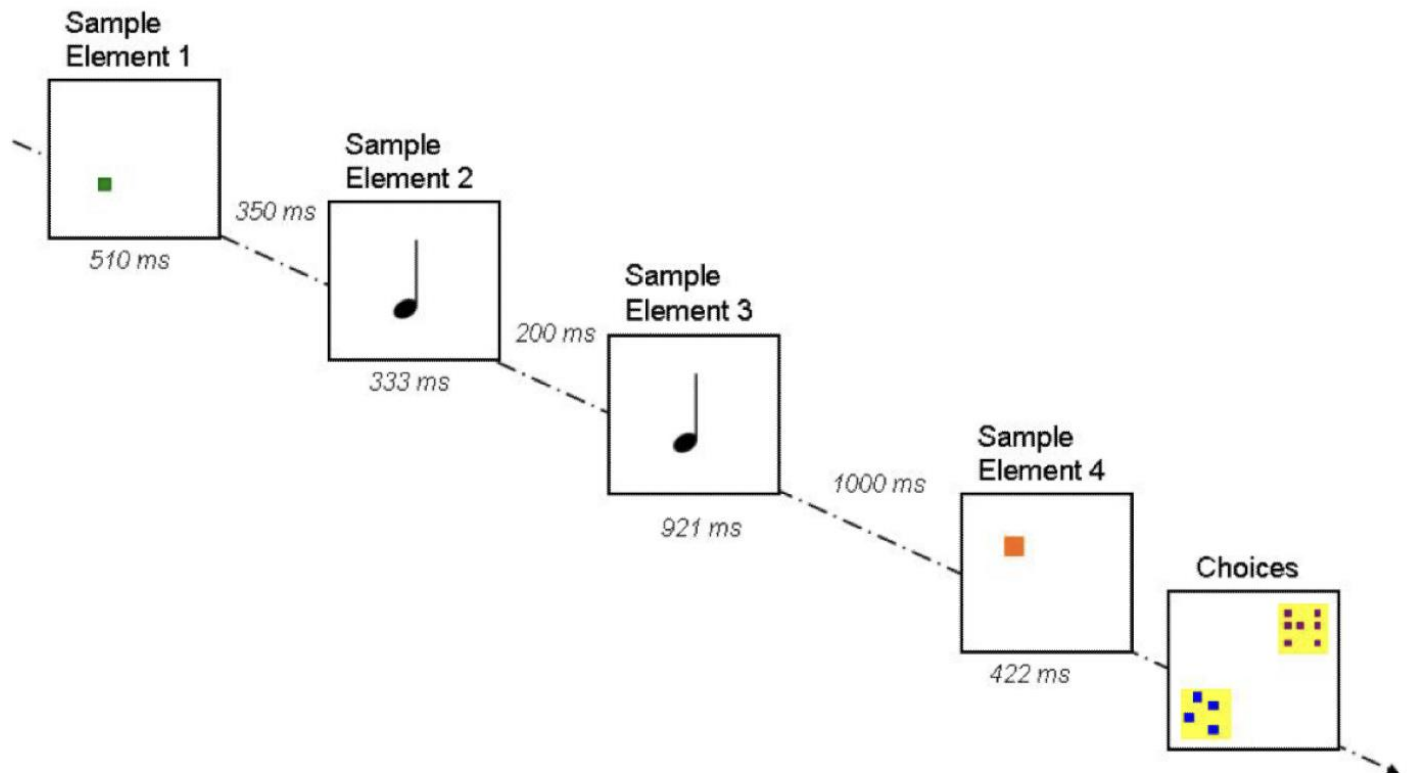
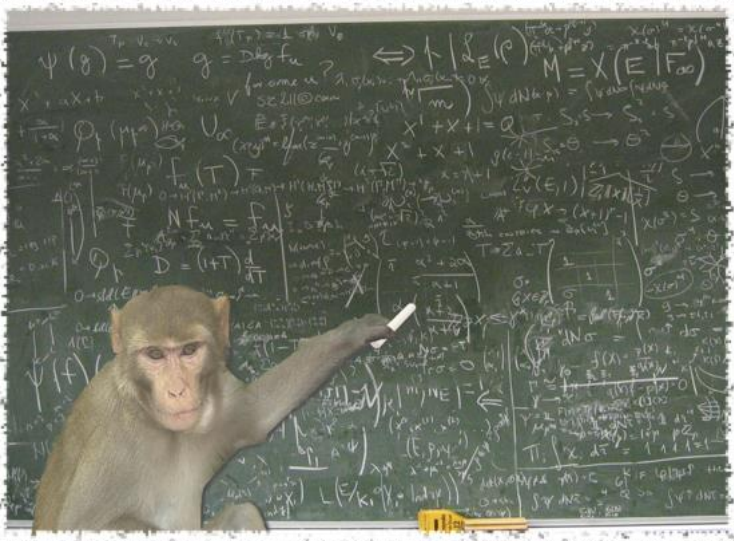
CHEZ LES ANIMAUX

Les lionnes ont plus de probabilité de se rapprocher de la source d'un seul rugir plutôt que de trois ; et elles ont plus de probabilité de s'y rapprocher si elles sont déjà nombreuses dans leur groupe.



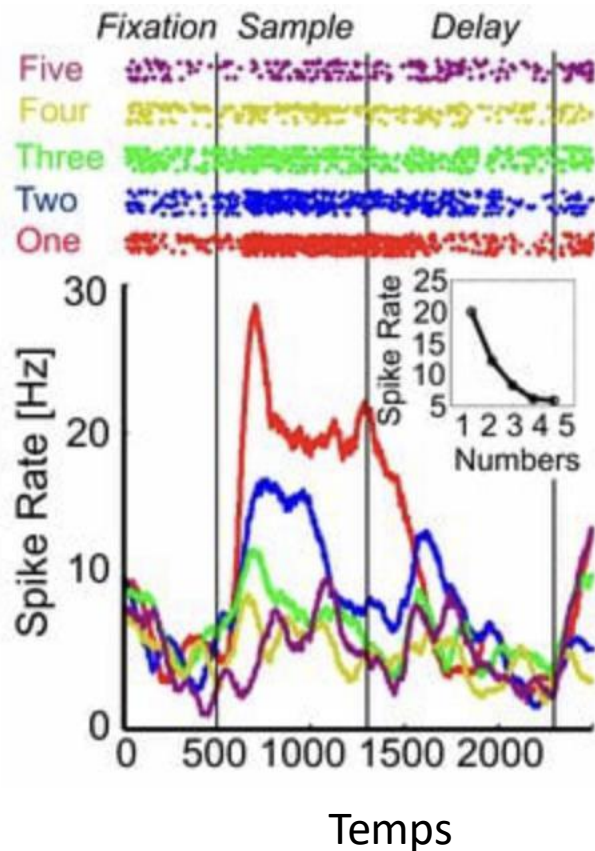
CHEZ LES ANIMAUX

Ou encore, les macaques semblent capables d'additionner de quantités... même à travers différentes modalités sensorielles !

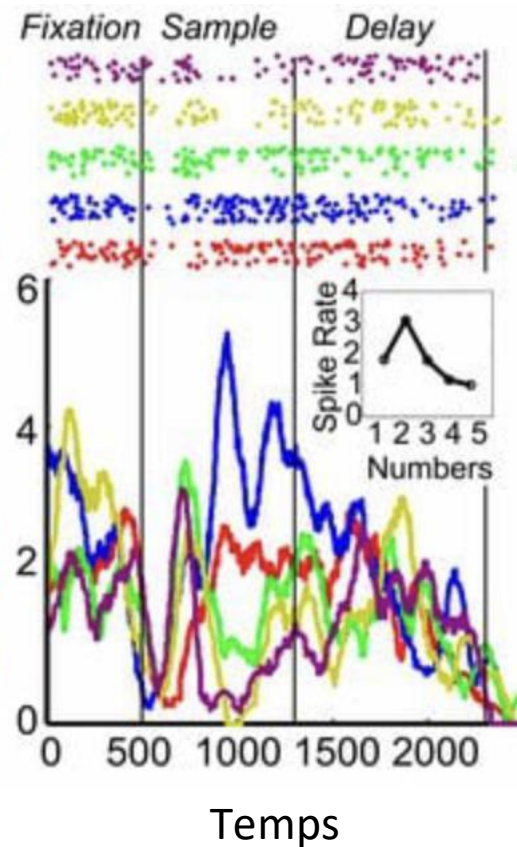


CHEZ LES ANIMAUX

Neurones groupe 1



Neurones groupe 2

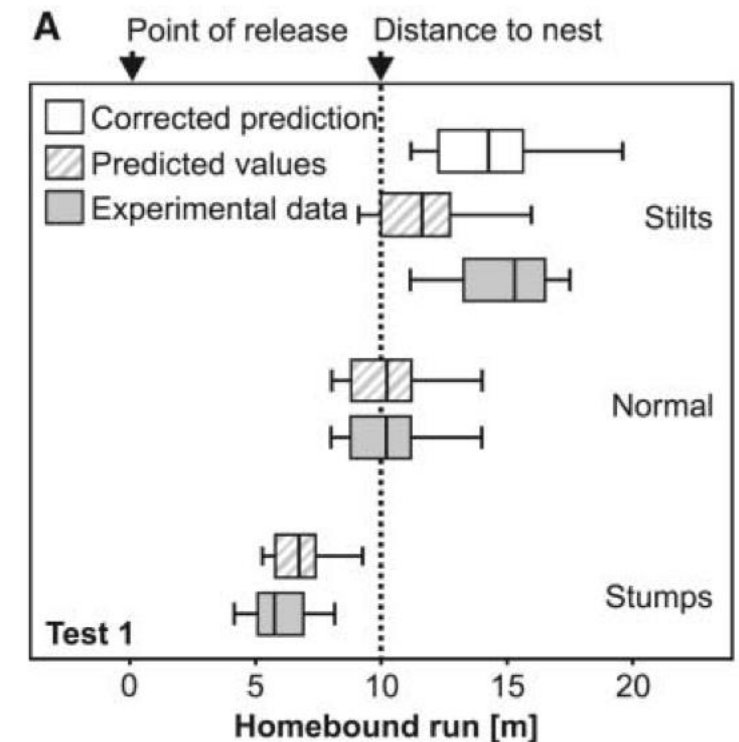
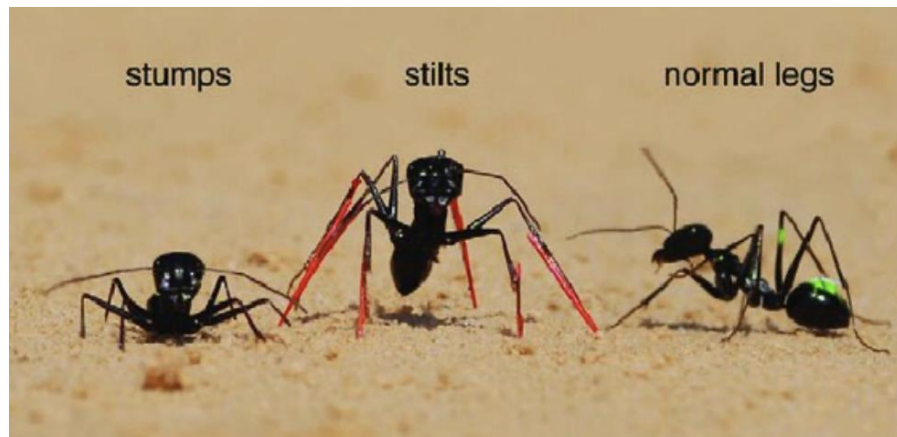


Toujours chez les macaques, il y a une zone du cerveau qui montre des activations différentes en fonction de la quantité d'objets qu'on leur montre.

CHEZ LES ANIMAUX

Même les fourmis semblent capables d'estimer correctement des quantités !

Les fourmis avec des pattes plus courtes s'arrêtent plus tôt que prévu dans leur retour à la maison, tandis que les fourmis avec des pattes plus longues s'arrêtent plus loin.





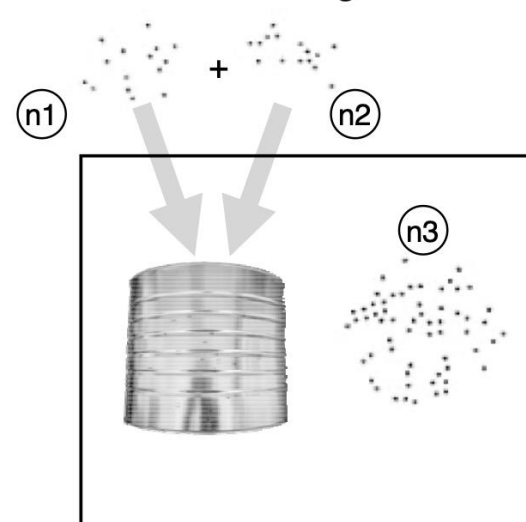
LES INTUITIONS MATHÉMATIQUES

L'ARITHMETIQUE

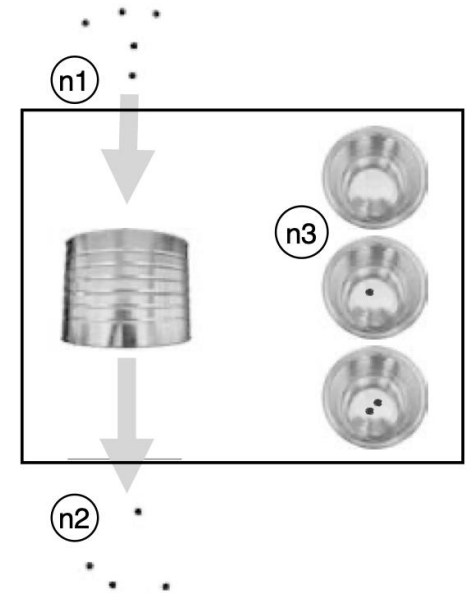
Les humains sont également capables d'estimer correctement le résultat d'additions ou de soustractions, indépendamment de toute connaissance mathématique formelle.



B Approximate addition
and comparison
Indicate which is larger: $n1+n2$ or $n3$

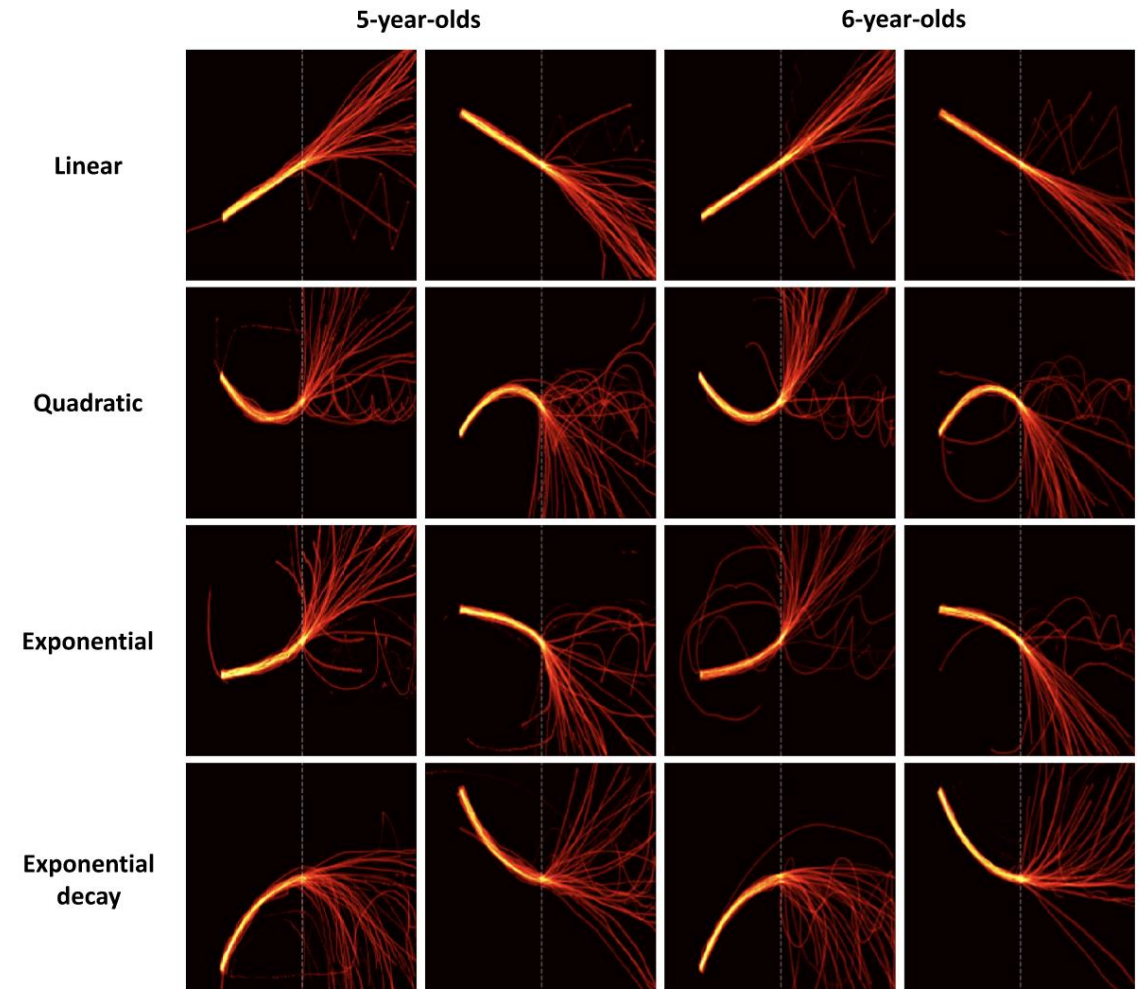
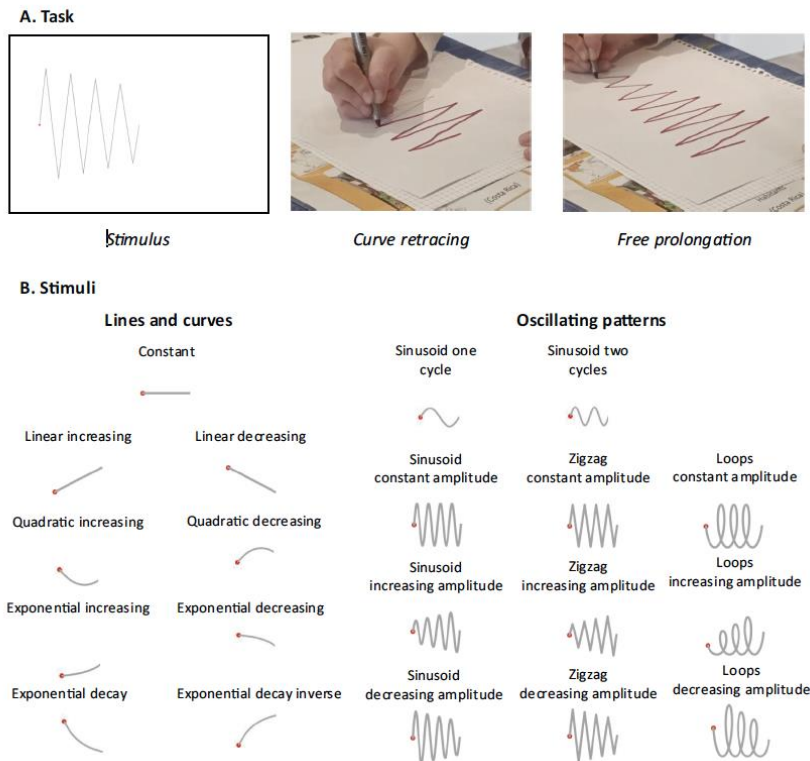


C Exact subtraction
Point to the result of $n1 - n2$



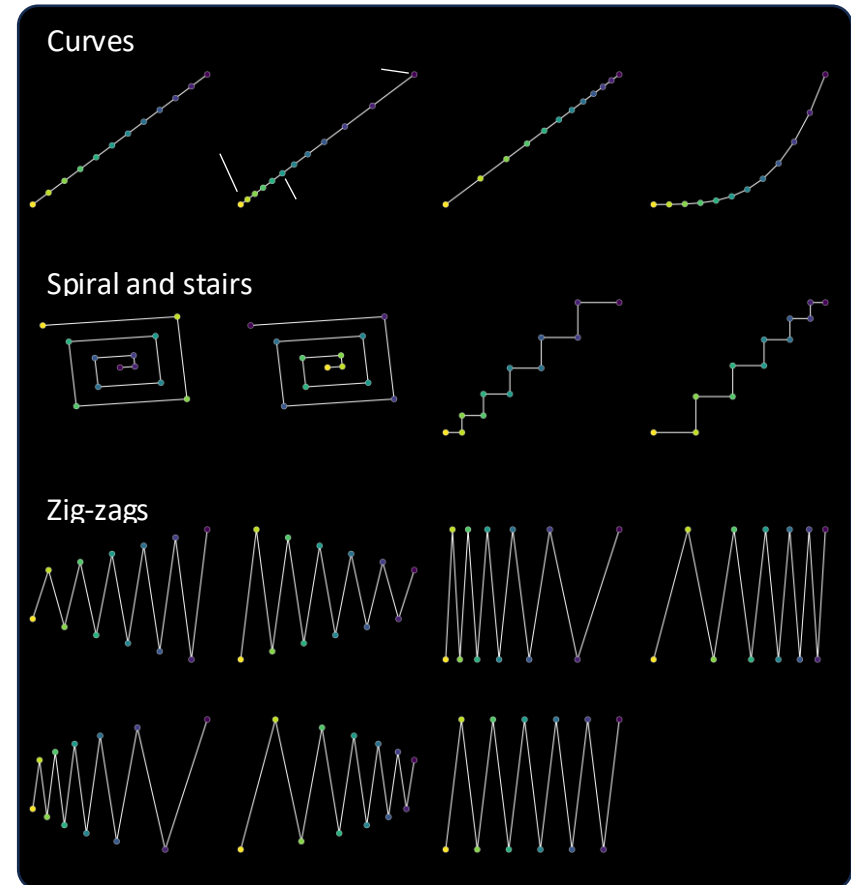
LES FONCTIONS

Les enfants de 5 et 6 ans, avant tout apprentissage formelle des mathématiques, ont même des intuitions correctes quant au comportement des fonctions mathématiques !



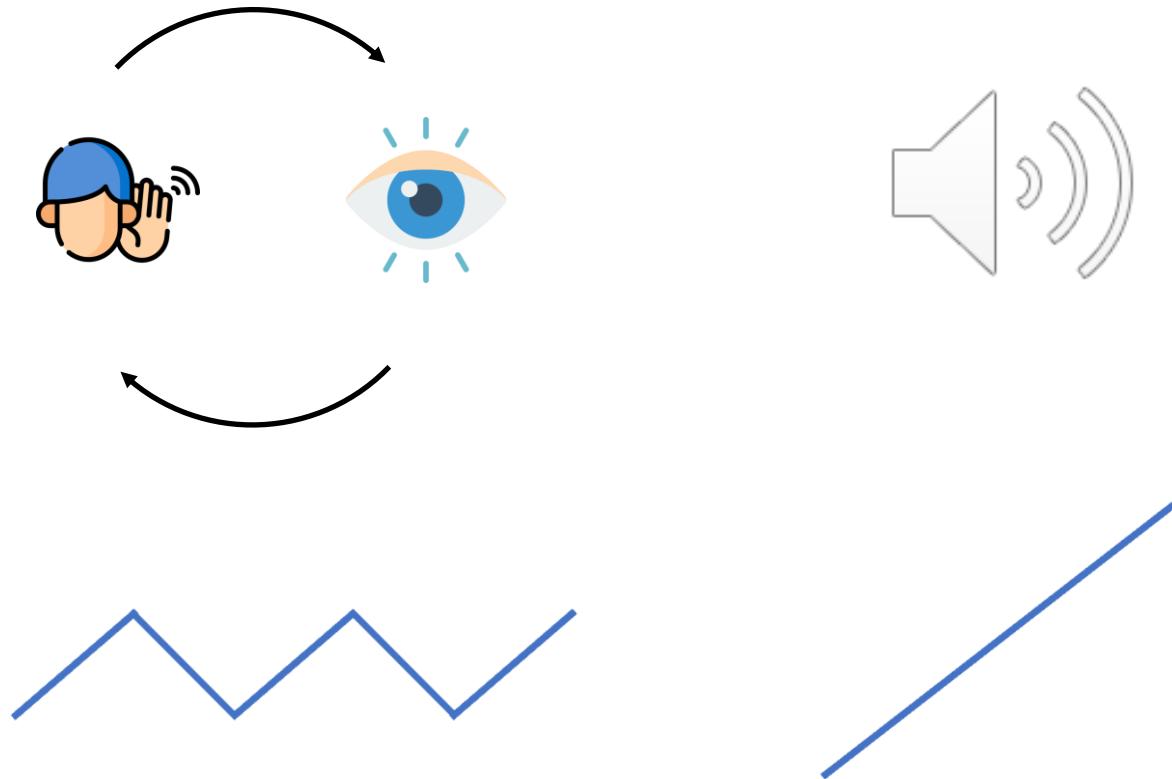
LES MOTIFS

Ces mêmes capacités sont retrouvées chez les Himbas (une population de Namibie) qui ne possèdent pas de connaissances formelles en mathématiques.



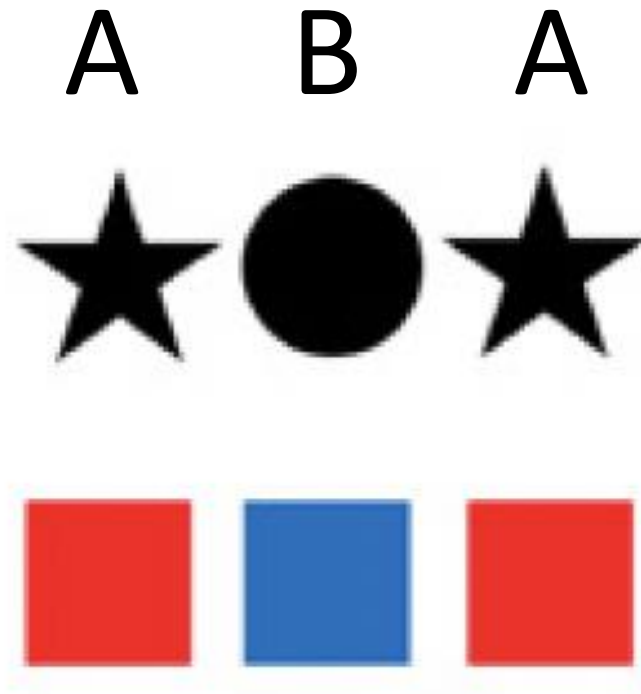
LES MOTIFS

Les enfants de 5 et 6 ans savent même associer des séries de notes musicales (suivant un certain « pattern » auditif) à leurs motifs visuels correspondants.



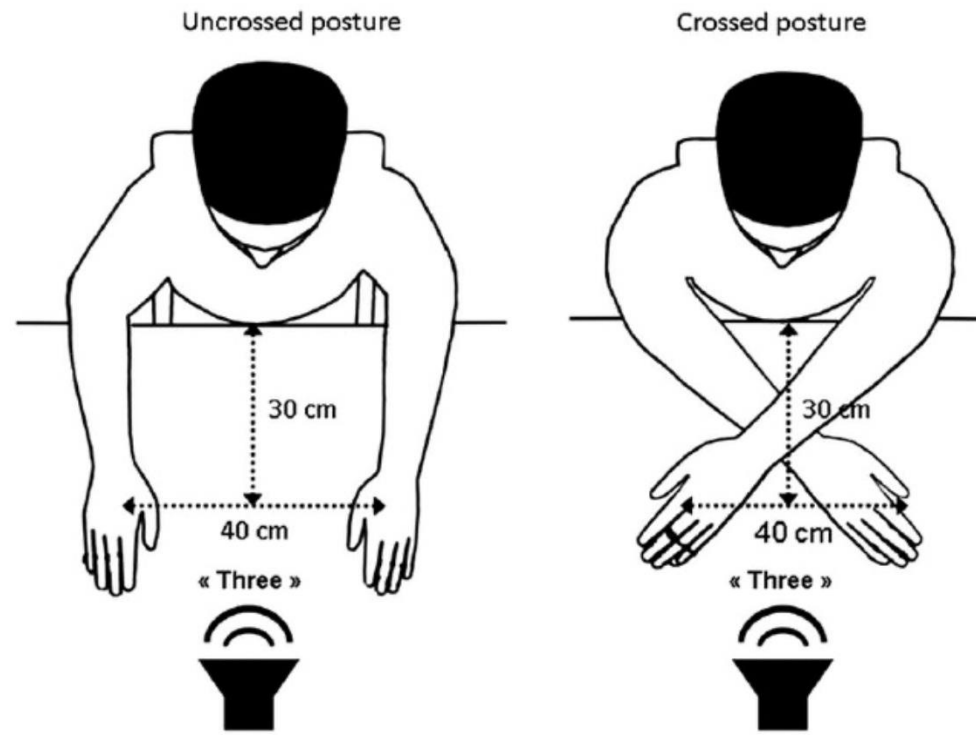
LES MOTIFS

Les enfants reconnaissent mieux le pattern sous-jacent à un motif visuel quand on utilise des étiquettes abstraites pour le décrire.



L'ESPACE

Les humains associent intuitivement les petites quantités à la gauche et les grandes quantités à la droite.



Experiment 1 (Comparison task) : Smaller or larger than 5?

Experiment 2 (Parity judgment task) : Odd or even?

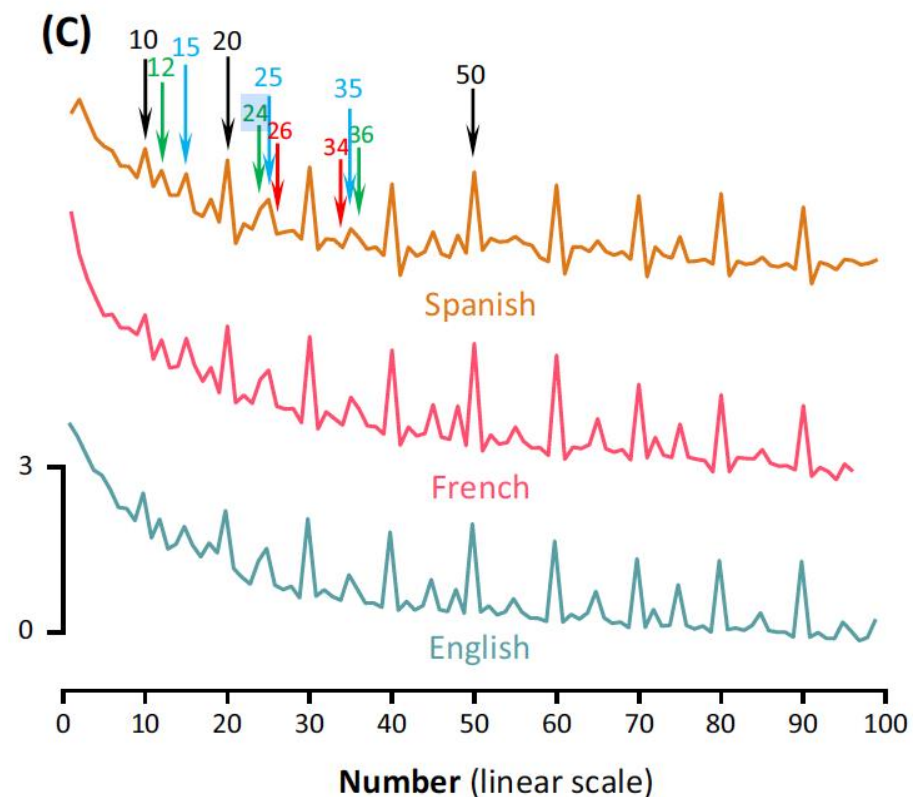
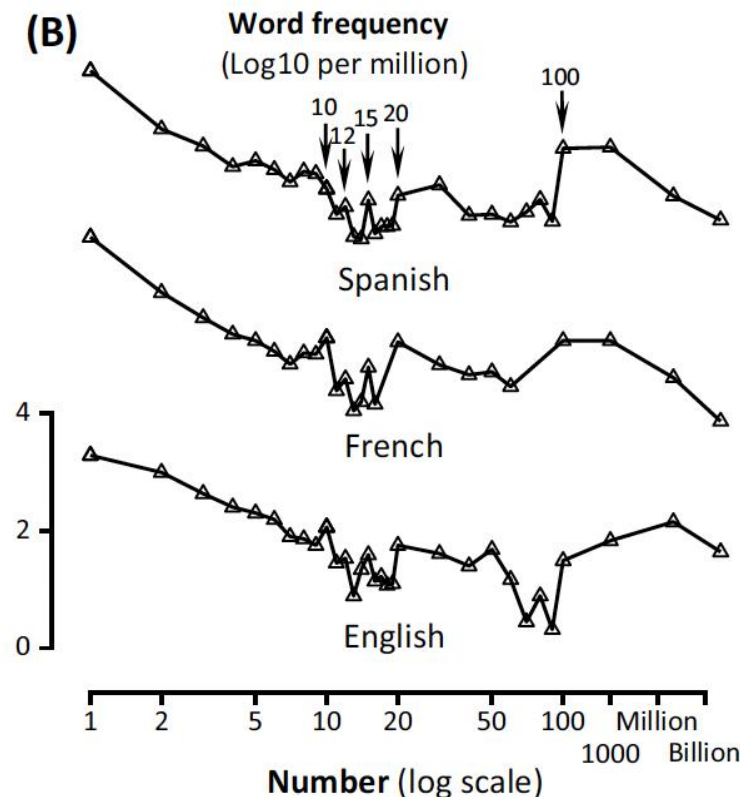
L'ESPACE

Cette association intuitive entre quantités et espace semble exister même chez les poussins !



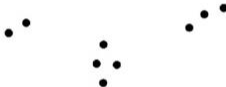
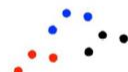
LA COMPOSITIONNALITE

Nous sommes naturellement « attirés » par les récursions et les recombinaisons des quantités. On préfère en effet des quantités qui sont facilement exprimables par des « compositions » de plus petits nombres.



LA COMPOSITIONNALITE

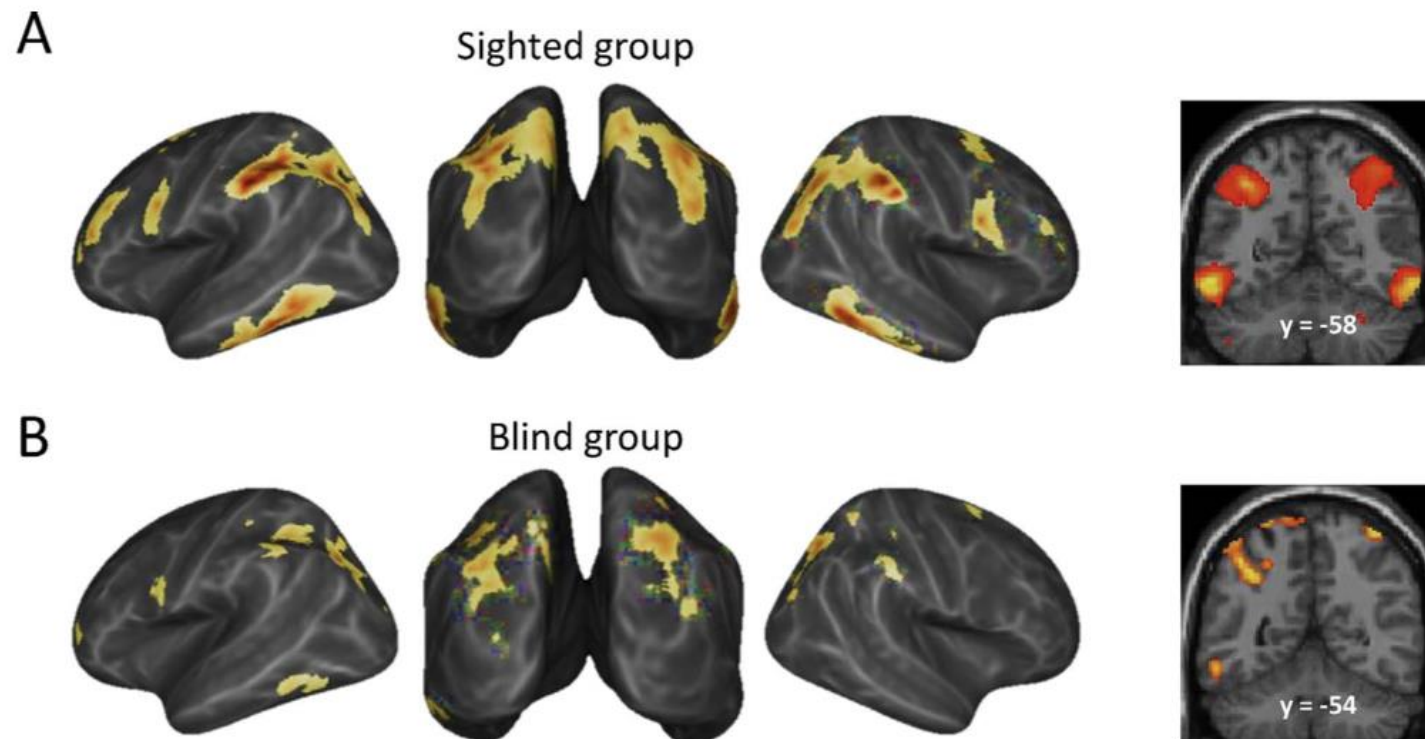
Les humains sont plus rapides et plus performants dans le dénombrement d'objets organisés en sous-groupes qui permettent des calculs multiplicatifs.

Grouping pattern	Grouping cue		Hypothetical computations
	Spacing	Color	
No groups			Counting
Groups with maximally different numbers			Addition
Groups with same or minimally different numbers, different shapes			Addition or Multiplication
Groups with same or minimally different numbers, same shape			Multiplication

D'UN POINT DE VUE CEREBRALE

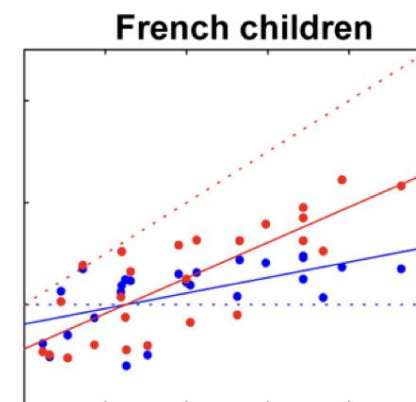
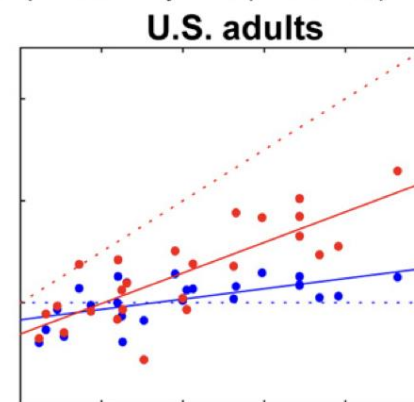
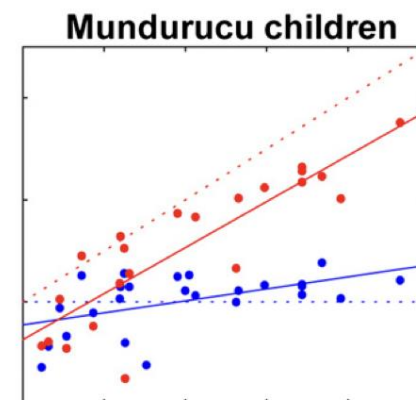
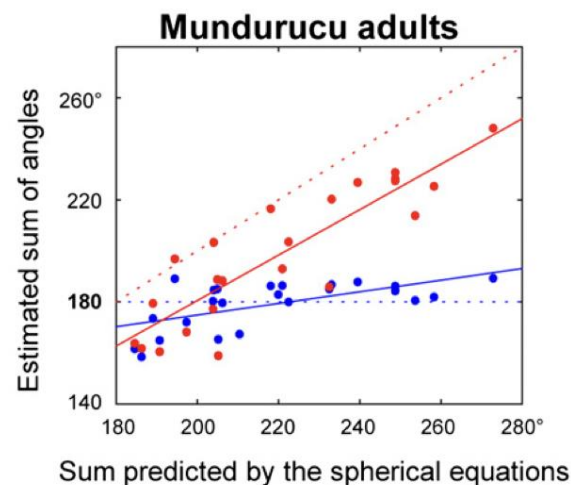
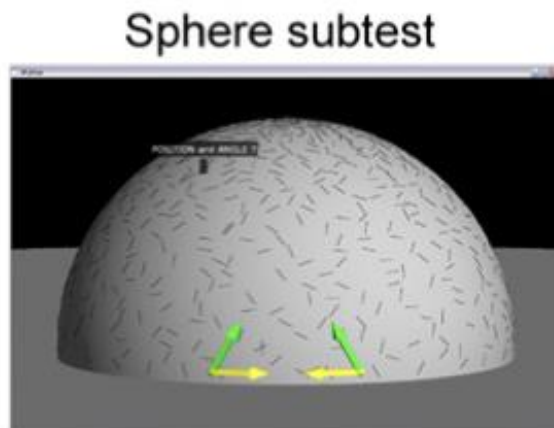
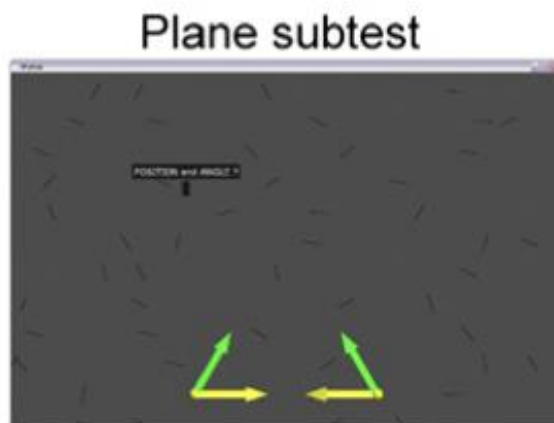
Le même réseau cérébral qui s'active pour les intuitions mathématiques s'active aussi chez les mathématiciens quand ils font des maths de haut niveau.

Et c'est également le même chez les mathématiciens aveugles !



LA GEOMETRIE

Toujours chez les Mundurucu, on retrouve également des intuitions Euclidiennes correctes (et pas que !).



—●— Planar subtest —●— Spherical subtest

LE LANGAGE DES MATHS



 CellPress

Trends in
Cognitive Sciences

Opinion

Origins of numbers: a shared language-of-thought for arithmetic and geometry?

Stanislas Dehaene^{1,2}, Mathias Sablé-Meyer^{1,2}, and Lorenzo Ciccione ^{1,2,*}

RESUME

Jusqu'à là nous avons vu :

- l'importance du sens du nombre ;
- que le sens du nombre est présent indépendamment de la culture, de l'âge, et des espèces ;
- que la représentation mentale des quantités a un fort lien avec l'espace ;
- que dès le plus jeune âge nous savons comprendre et manipuler des motifs ;
- l'importance de l'abstraction ;
- que les intuitions mathématiques peuvent être assez sophistiquées ;
- qu'elles reposent sur des bases cérébrales sur lesquelles les maths de plus haut niveau se construisent ;
- que parfois certaines intuitions peuvent nous « limiter ».

Est-ce qu'on peut transférer tout cela dans le domaine de l'éducation ?



L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

UNE MODIFICATION DES PROGRAMMES

Les activités avec les motifs font désormais partie du programme du cycle 1.

• À aborder avant 4 ans

Objectifs d'apprentissage	Exemples de réussite
– Mémoriser un motif répétitif très simple. – Reproduire un motif répétitif à l'identique.	– Recopier à l'identique un motif répétitif composé de quelques éléments. – Reproduire de mémoire un motif répétitif présentant une alternance. – Compléter un motif Par exemple, l'élève est capable de recopier le motif suivant : ★●★●★● Ou encore, l'élève est capable de reproduire une partie du motif qui est cachée, d'anticiper les éléments cachés puis de vérifier en retirant le cache.

• À partir de 4 ans ou dès que les apprentissages précédents ont pu être observés

Objectifs d'apprentissage	Exemples de réussite
– Mémoriser un motif répétitif simple. – Reconnaître un motif répétitif à ses régularités. – Décrire oralement des motifs répétitifs simples de différentes natures, sans nécessairement recourir au vocabulaire spécialisé. – Prolonger l'amorce d'un motif répétitif et verbaliser la règle de prolongement utilisée.	– Identifier parmi plusieurs configurations celles qui contiennent un motif répétitif. – Trouver un intrus parmi des éléments ne respectant pas totalement une organisation logique, par exemple correspondant à la traduction formelle ABABAABABABABABA – Reproduire de mémoire un motif répétitif simple. – Verbaliser les éléments d'un motif répétitif simple visuel, sonore ou gestuel. – Prolonger l'amorce d'un motif répétitif visuel, sonore ou gestuel en verbalisant sa structure. Par exemple, l'élève est capable de reproduire de mémoire, après l'avoir observée, une tour de neuf briques avec alternance d'une brique bleue et de deux briques jaunes. Ou encore, l'élève est capable de trouver l'intrus dans le motif suivant : ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ Ou encore, l'élève est capable de décrire le motif suivant et de le compléter en y ajoutant l'élément manquant : ★●★●★●?●★ Ou encore, l'élève est capable de prolonger les motifs suivants et d'expliquer leur règle de prolongement : ★●★● ★●●★●●

UNE INTERVENTION A LARGE ECHELLE



Pierre Moya • 2°
Recteur de l'académie d'Amiens
2m • Modificato •

+ Suivi ...

« Pionniers des math. »: une expérimentation pour renforcer l'enseignement explicite des mathématiques .

Merci aux équipes de l'école Mont-Saint-Quentin de Péronne pour leur accueil et leur engagement dans le cadre de l'expérimentation nationale « Pionniers des maths ».

Pour les enseignants, un protocole précis :

- ✓ programmations détaillées et séquences très structurées
- ✓ formation et accompagnement méthodologique réguliers
- ✓ évaluation régulière

De réels progrès déjà constatés, des enseignants convaincus et des élèves plus engagés dans les apprentissages.

24 classes de l'**Académie d'Amiens** engagées dans l'expérimentation conduite avec le **Conseil scientifique de l'éducation nationale (CSEN)** et **Collège de France** ,

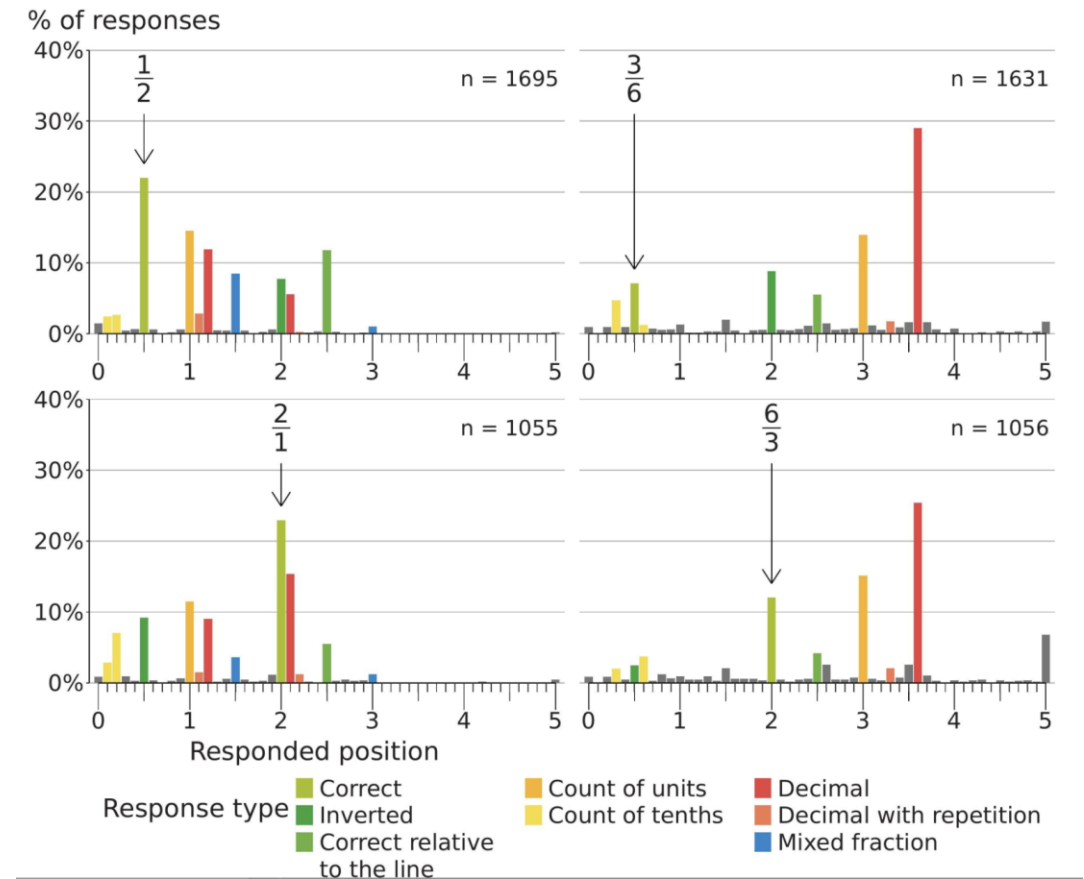
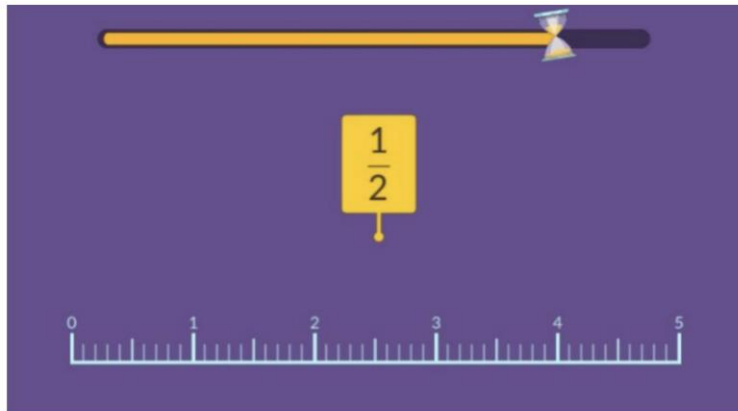
Un immense merci aux enseignants, aux formateurs et aux inspecteurs engagés dans cette dynamique.



1	Rentrée	Tests de rentrée	(Dé)composer les nombres (<19)	Décomposer en base 10 (<1999)
2	Décomposer en base 10 (<19 999) – diz. milliers	Décomposer en base 10 (<100 000) – diz. milliers	La bande numérique	Les graduations sur la ligne numérique
3	Comparer des nombres (<100 000)	Les tableaux	Les diagrammes en barres	Les échelles
4	Ajouter (ligne et jetons)	Retirer (ligne et jetons)	Boite à nombres et schéma-ligne (1)	Boite à nombres et schéma-ligne (2)
5	La symétrie	Compléter une figure par symétrie	Additifs de comparaison (de plus)	Additifs de comparaison (de moins)
6	Lire l'heure sur une horloge	La fraction un demi sur figures	La fraction un tiers sur figures	La fraction un quart sur figures
7	Soustractif de comparaison (de plus)	Soustractif de comparaison (de moins)	Révisions / Rattrapages	Test 1
8	Représenter en base 10 (< 1 000 000)	Centaines de millier sur la ligne numérique	Révisions sur les notions les moins réussies du test de rentrée	Révisions sur les notions les moins réussies du test de rentrée
9	Mesurer des longueurs (m, cm, mm)	11 Novembre	Convertir des longueurs (m, cm, mm)	Le périmètre
10	Estimer sur la ligne numérique	La notation positionnelle	Estimer des longueurs (km, m, cm, mm)	Révisions / Rattrapages
11	Ordonner	Encadrer et intercaler	Le complément à 10	Additionner et soustraire en ligne
12	Les fractions unitaires sur une bande	Les fractions unitaires sur une bande	Les fractions unitaires sur une ligne	Comparer des fractions unitaires
13	L'aire	L'aire	Révisions / Rattrapages	Test 2
14	Introduction de la multiplication	La commutativité	Le nombre rectangle	Révisions / Rattrapages
15	Révisions / Rattrapages	Répéter une fraction unitaire	Placer une fraction quelconque	Comparer les fractions sur une ligne
16	Expérience aléatoire	Probabilité d'un événement	Les masses (1)	Les masses (2)
17	Le parallélisme	Les angles	Tracer des droites perpendiculaires	Additifs de comparaison (scénario inhabituel)
18	Multiplier par 2	Multiplier par une puissance de 2	Multiplicatif de comparaison (fois plus)	Divisif de comparaison (fois moins)

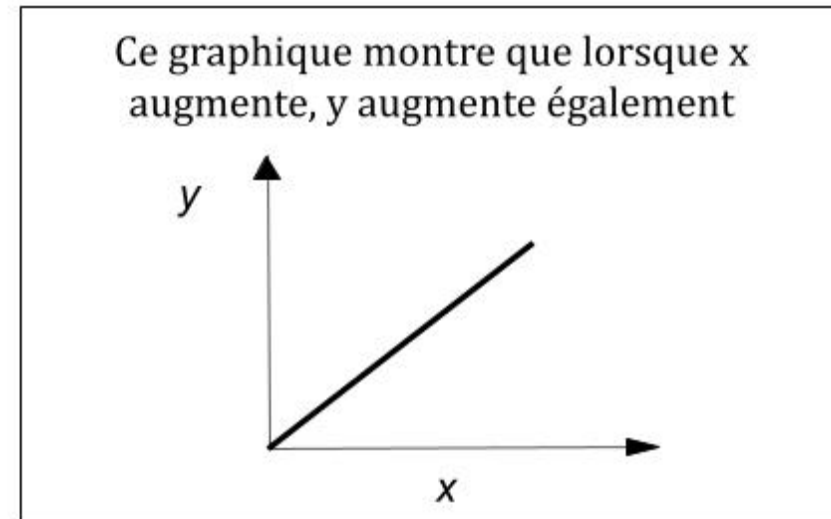
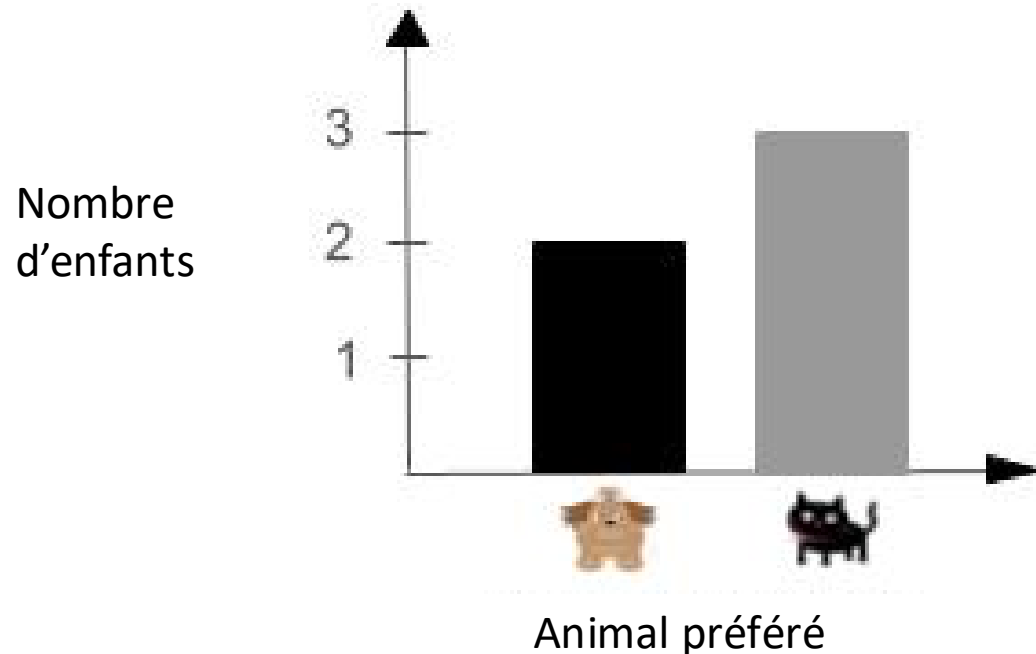
LE CAS DES FRACTIONS

Parfois même les concepts qui devraient être maîtrisés assez rapidement sont, en effet, très peu compris. C'est le cas, par exemple, des fractions.



LE CAS DES GRAPHIQUES

Un autre exemple emblématique est représenté par les graphiques. Beaucoup d'enfants, à la fin de l'école primaire, sont incapables de répondre à des questions portant sur des graphiques comme ceux présentés en bas.



L'AVANTAGE COGNITIF DES GRAPHIQUES

TEXT

La consommation de pain en France depuis 1970

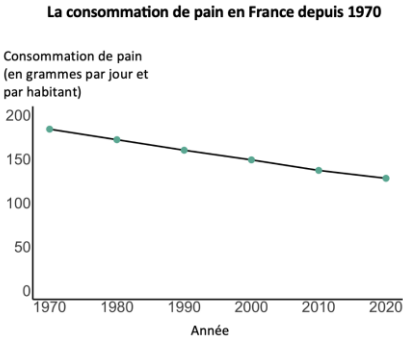
La consommation individuelle quotidienne moyenne de pain en France a diminué depuis les années 1970. En 1970, cette consommation quotidienne était de 184 grammes par jour et par habitant. Depuis, cette consommation par jour et par habitant est passée de 172 grammes en 1980, 160 grammes en 1990, 149 grammes en 2000 à 137 grammes en 2010. En 2020, cette consommation était de 128 grammes par jour et par habitant.

TABLE

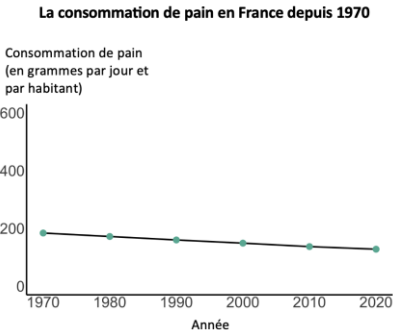
La consommation de pain en France depuis 1970

Année	Consommation de pain (en grammes par jour et par habitant)
1970	184
1980	172
1990	160
2000	149
2010	137
2020	128

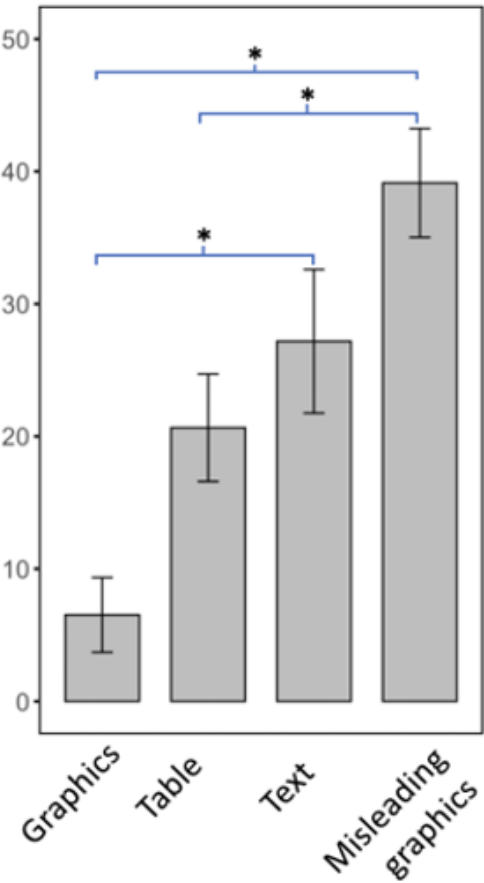
GRAPHICS



MISLEADING GRAPHICS



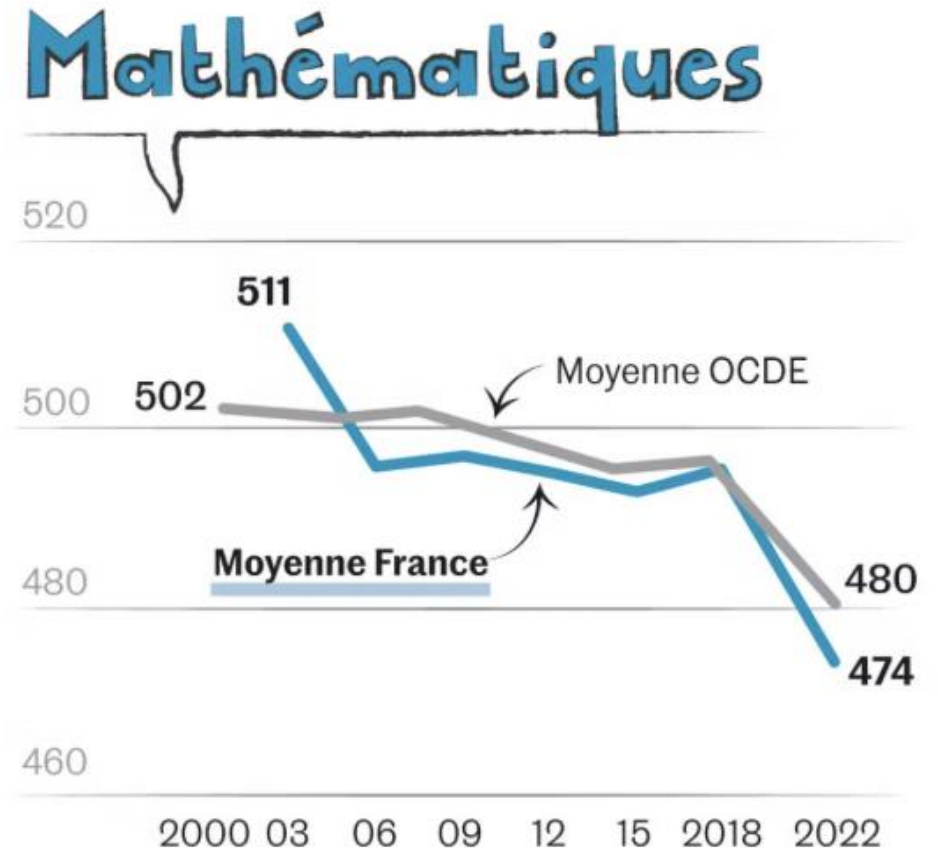
Error rate
(in %)



LE NIVEAU EN MATHÉMATIQUES

Les résultats des étudiants (tels que mesurés par les tests PISA) sont toujours en baisse (notamment en France, mais pas que). Dans ces tests, environ 20% des questions portent sur des graphiques.

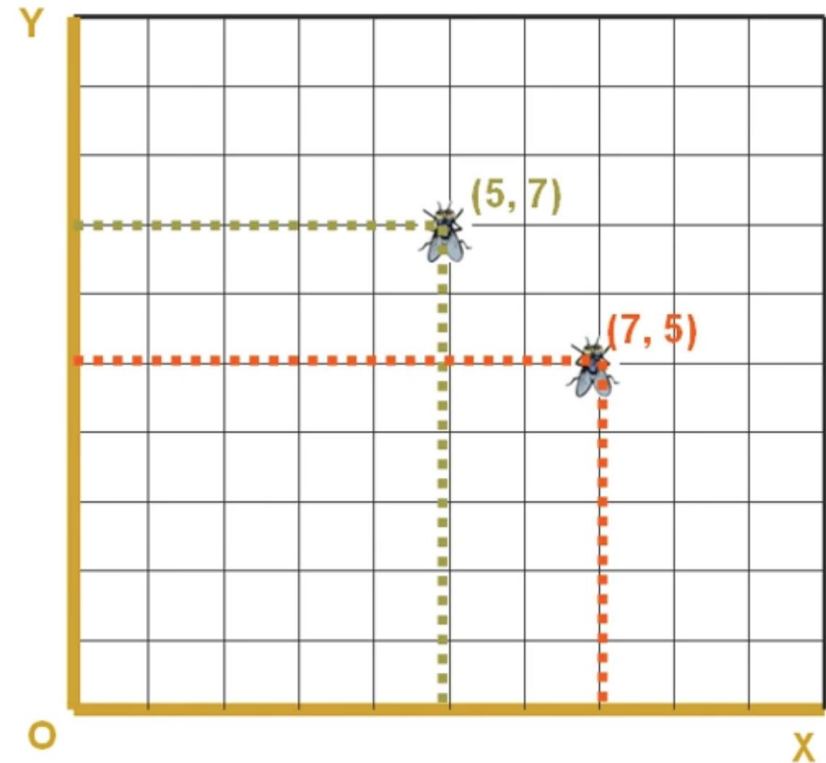
Evolution des performances au test PISA, en points





LES GRAPHIQUES : L'HISTOIRE D'UN PRODUIT CULTUREL RÉCENT

LÀ OÙ TOUT A COMMENCÉ : LE PLAN CARTÉSIEN



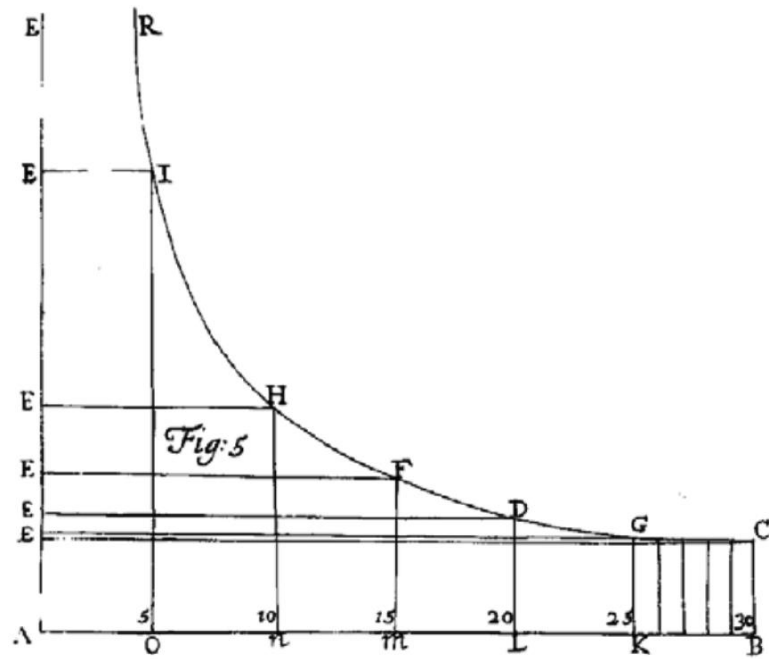
René Descartes avait du mal à dormir

Il vivait dans des chambres parisiennes pleines de mouches

Il aimait regarder le plafond pendant des heures

Il était anxieux lorsqu'il pensait aux mathématiques

GRAPHIQUES POUR LES MATHÉMATIQUES

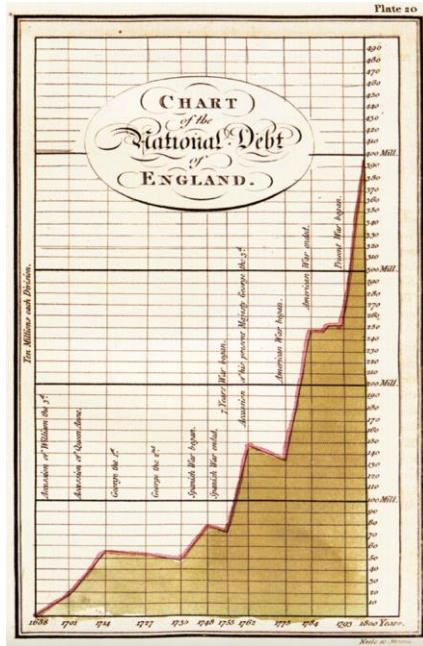


Halley, 1686

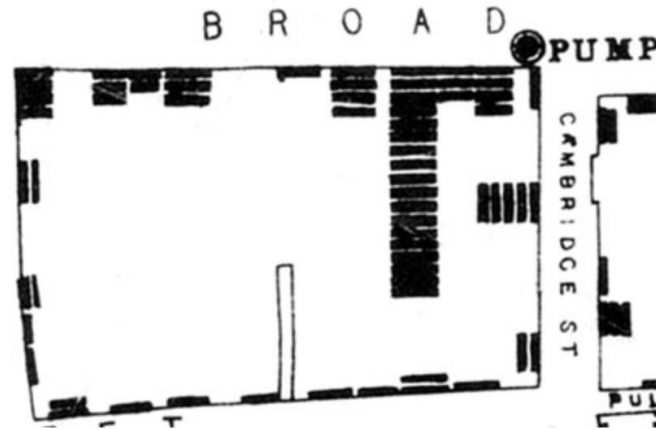
Ce graphique représente :
une relation mathématique/physique déjà connue.

Ce graphique ne représente pas :
le résultat « bruité » d'une enquête empirique.

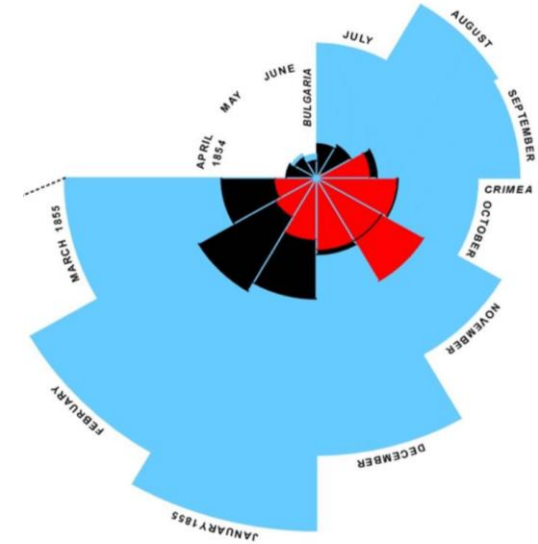
GRAPHIQUES POUR LES STATISTIQUES



Playfair, 1787



Snow, 1854

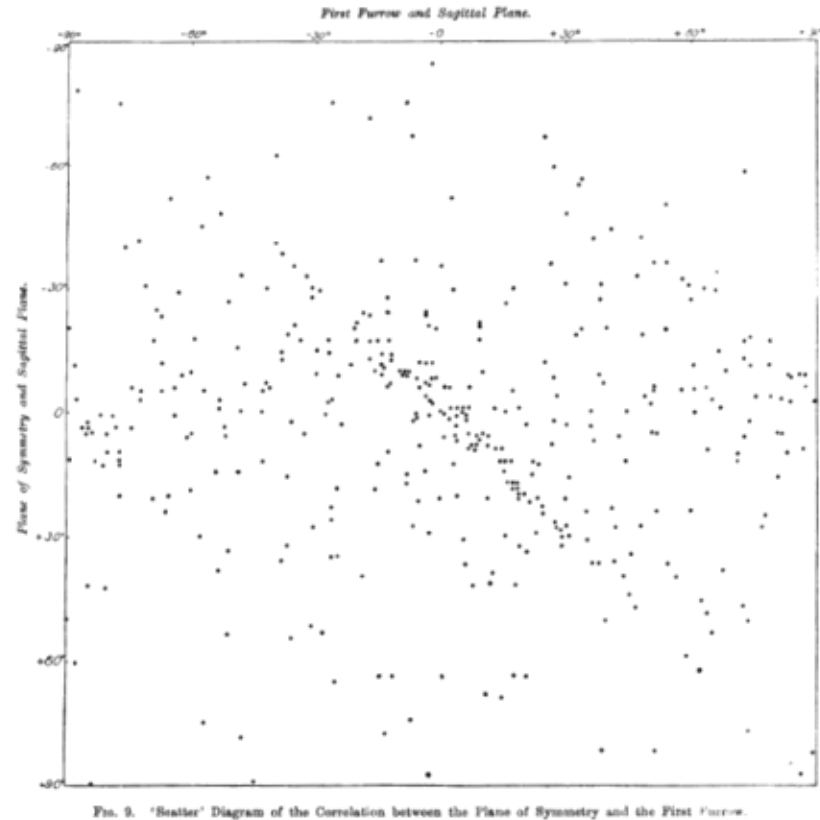


Nightingale, 1858

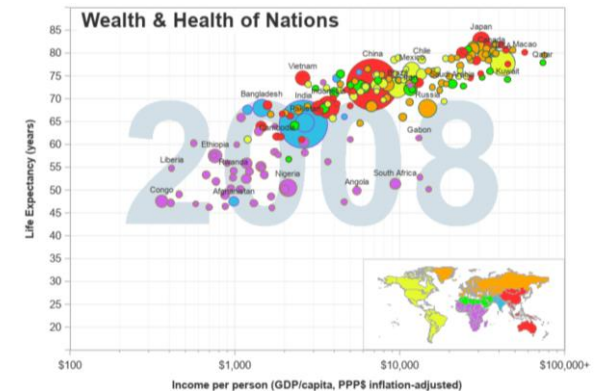
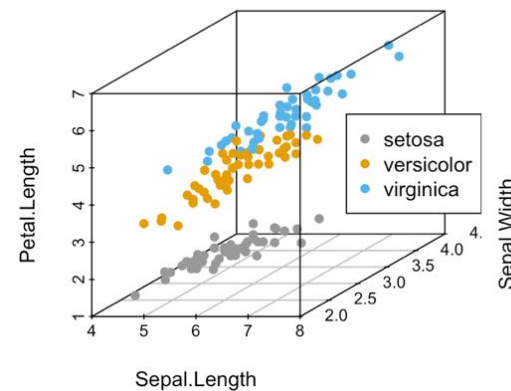
Dans ces exemples, les graphiques sont utilisés pour révéler une tendance ou un phénomène qui aurait été beaucoup plus difficile à saisir avec un texte ou une notation mathématique.

GRAPHIQUES POUR LES CORRÉLATIONS

Ce n'est qu'avec l'apparition des diagrammes de dispersion que les graphiques ont commencé à révéler la relation entre des variables autres que le temps et l'espace.

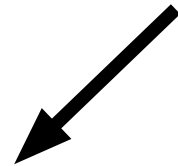


Jenkinson, 1906

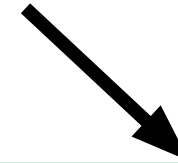


Rosling, 2010

LA LITTÉRATURE SUR LA “GRAPHICACY”



Principes de la visualisation des données
Différents graphiques pour différents objectifs
Comment améliorer les visualisations de données



Extraction des données
Inférence des tendances
Extrapolation des données
Interprétation des données

MES OBJECTIFS DE RECHERCHE

Étude des bases **cognitives** et **neurales** de la **perception** des graphiques par une **approche psychophysique**.



Quels sont les mécanismes cognitifs qui soutiennent la capacité à déduire des tendances et des motifs à partir de graphiques ? Sont-ils universellement disponibles ? Sont-ils biaisés ?



Quelles sont les zones du cerveau qui soutiennent ces capacités ?



La perception est-elle d'une manière ou d'une autre mêlée à la cognition ? Par exemple : comment l'expertise peut-elle affecter les performances dans une tâche graphique purement perceptive ?



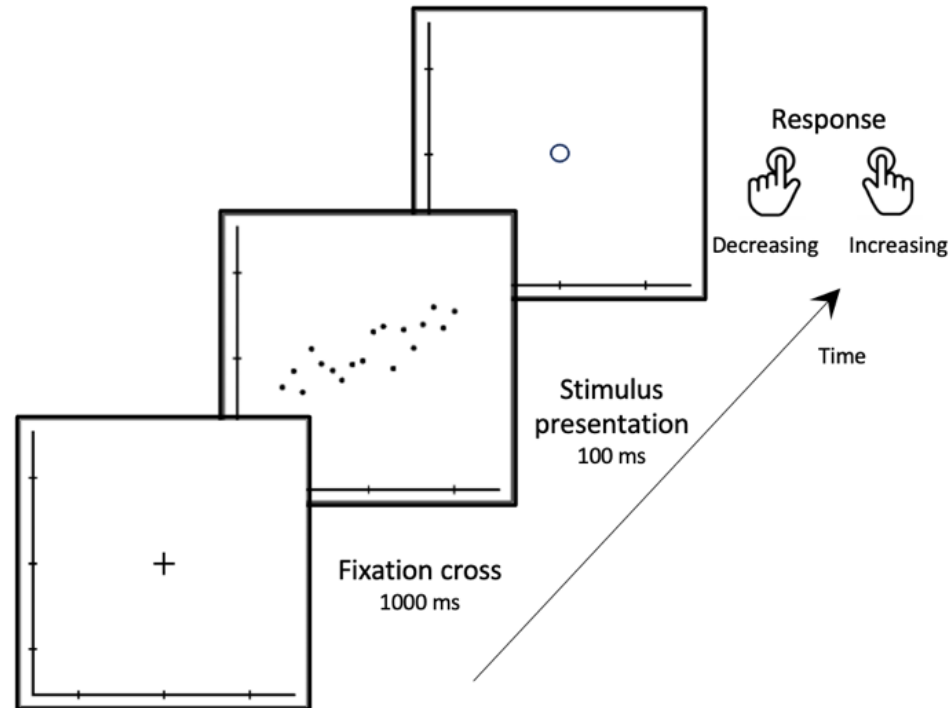
Peut-on trouver des tâches psychophysiques intéressantes pour étudier la perception des graphiques ?



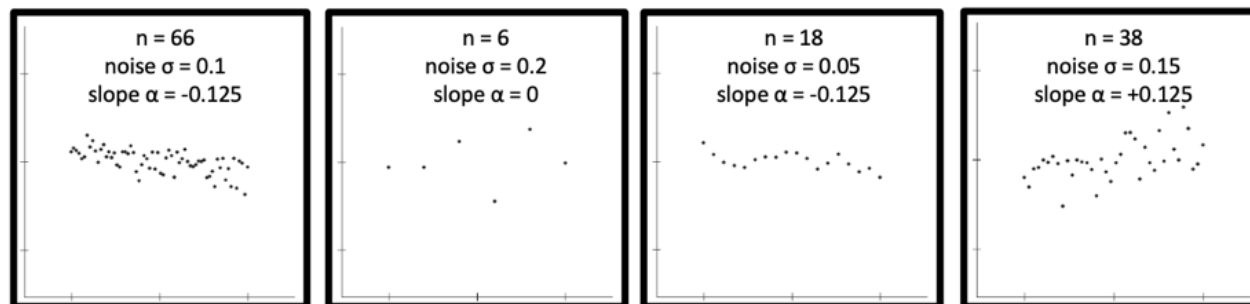
LA PERCEPTION DES GRAPHIQUES

JUGEMENT DE TENDANCE

A



B

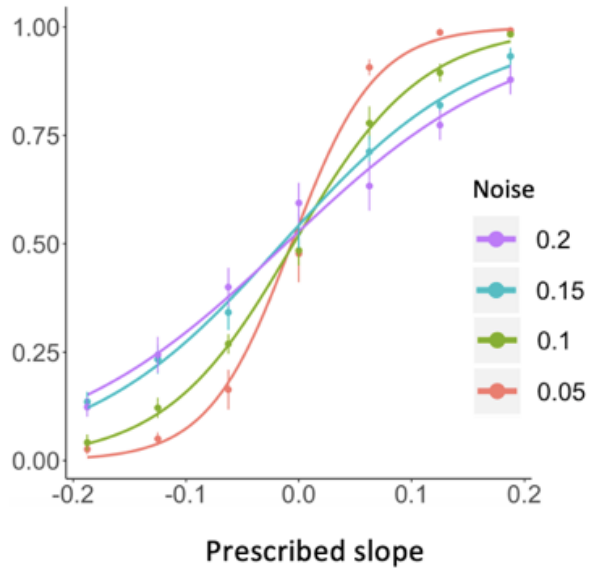


t-value = -6.08 t-value = +0.33 t-value = -2.81 t-value = +3.6

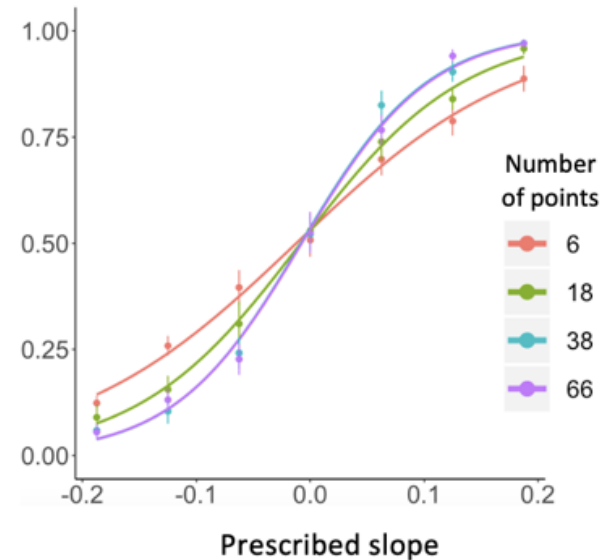
Les participants devaient effectuer une tâche de jugement de tendance sur un nuage de points bruité présenté brièvement.

JUGEMENT DE TENDANCE AU LABO

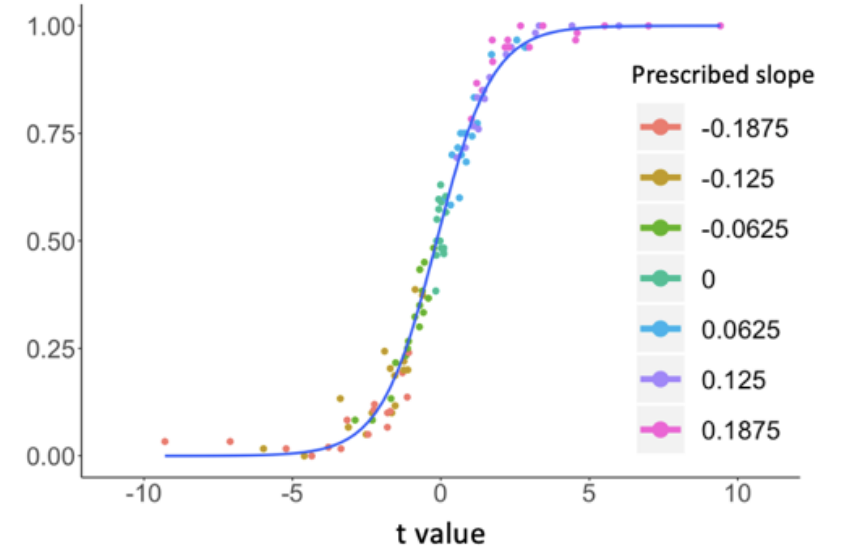
% responses
"increasing"



% responses
"increasing"

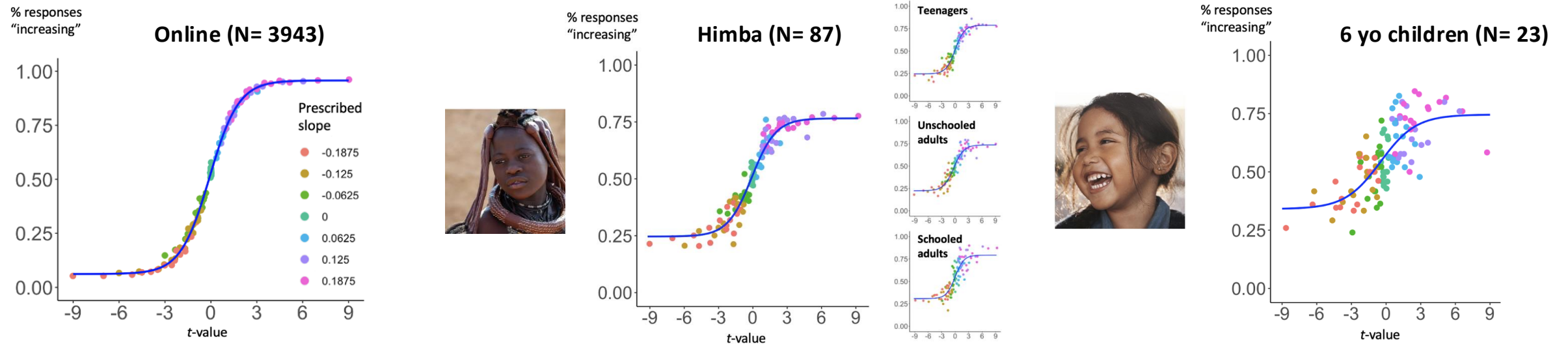


% responses
"increasing"



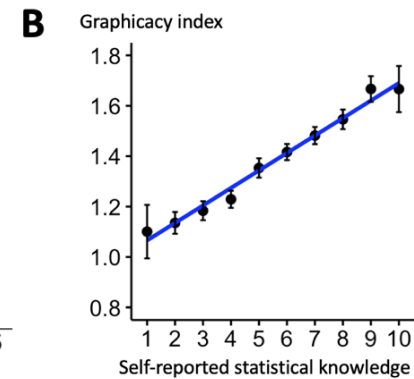
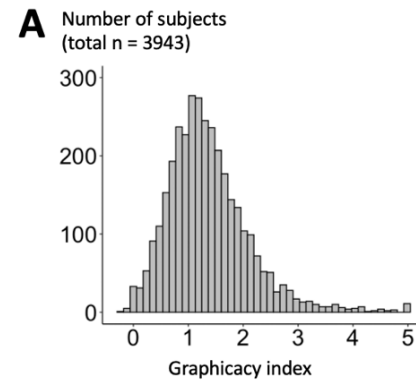
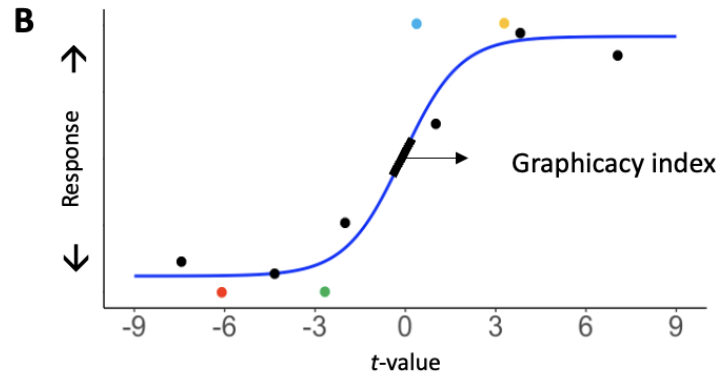
Les performances des participants sont prédites par la **valeur t** (qui est la valeur qu'un statisticien calculerait pour mesurer la force de la corrélation dans le graphique).

JUGEMENT DE TENDANCE AU DEHORS DU LABO



Nous sommes tous des statisticiens optimaux !

UNE CORRELATION INTERESSANTE



La sensibilité à la tâche de jugement des tendances varie considérablement.

Elle est en corrélation avec les connaissances statistiques et mathématiques déclarées (mais pas avec les compétences linguistiques).

JUGEMENT DE TENDANCE DANS LA NATURE



Task: what is the trend of this scatterplot?

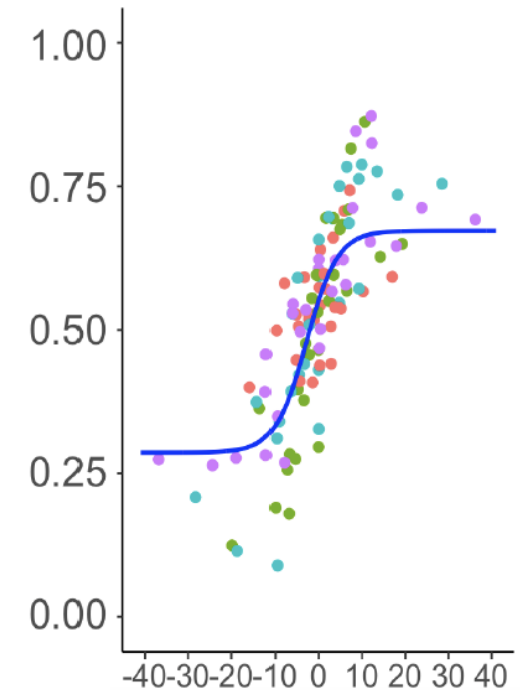


Increasing trend



Decreasing trend

Proportion of responses "increasing"

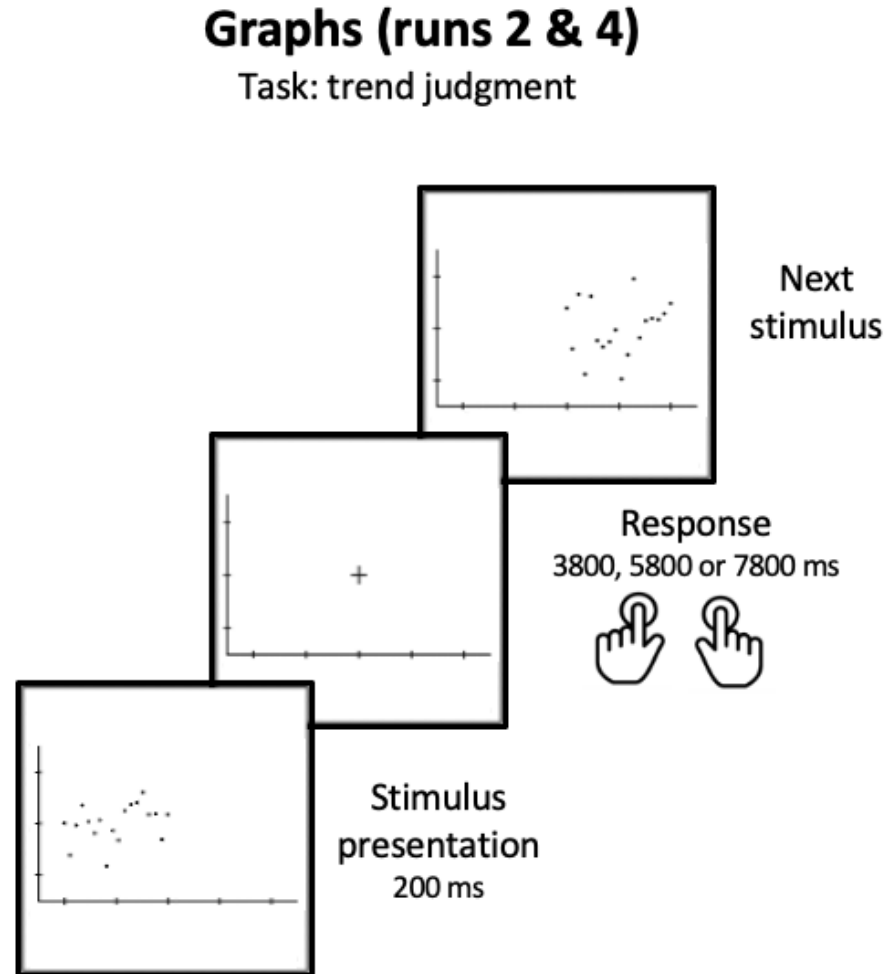
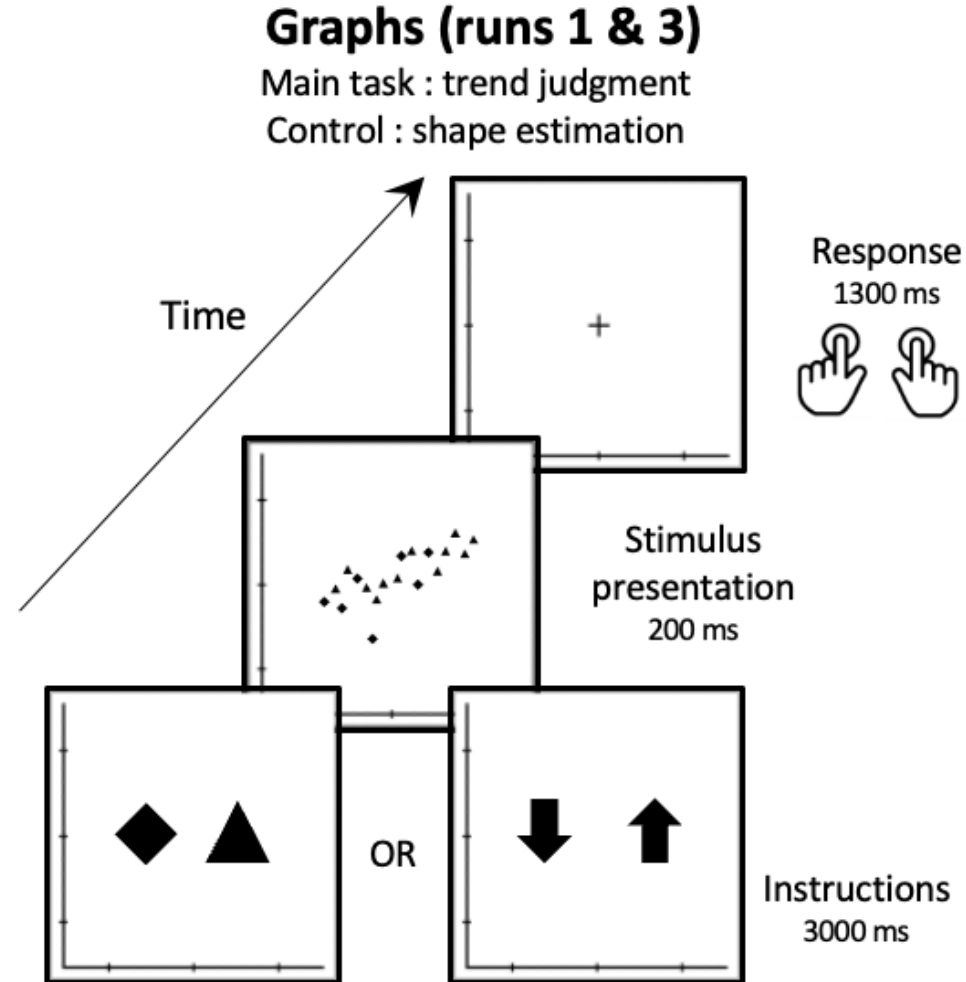


t value (strength of the correlation in the scatterplot)



LES BASES NEURALES DE LA PERCEPTION DES GRAPHIQUES

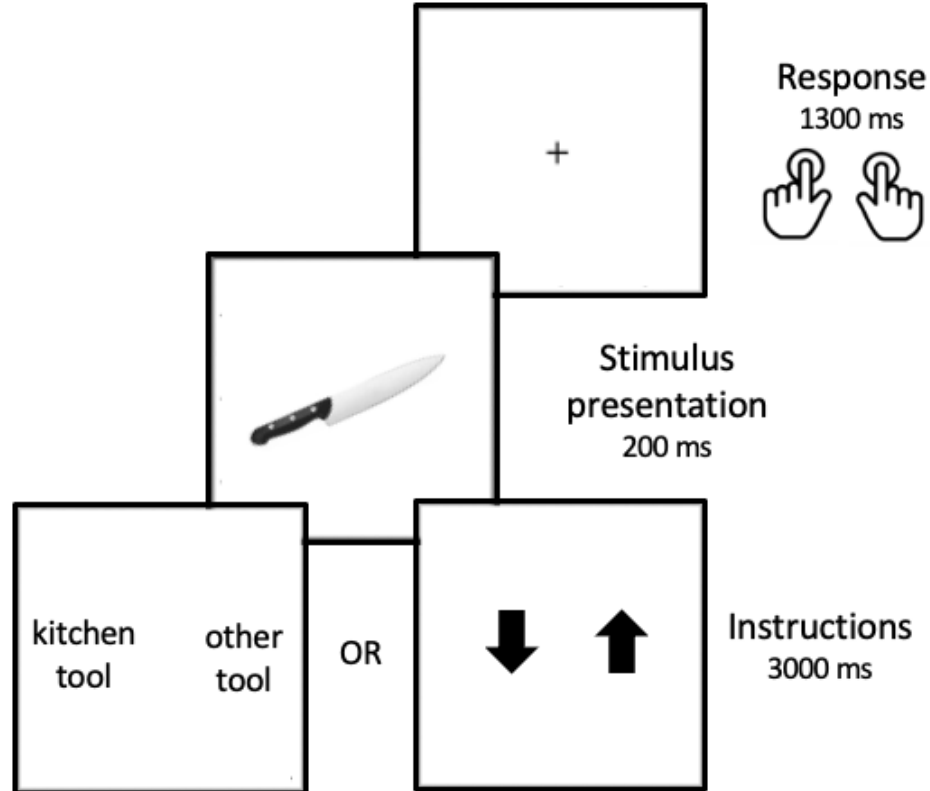
LES BASES NEURALES



LES BASES NEURALES

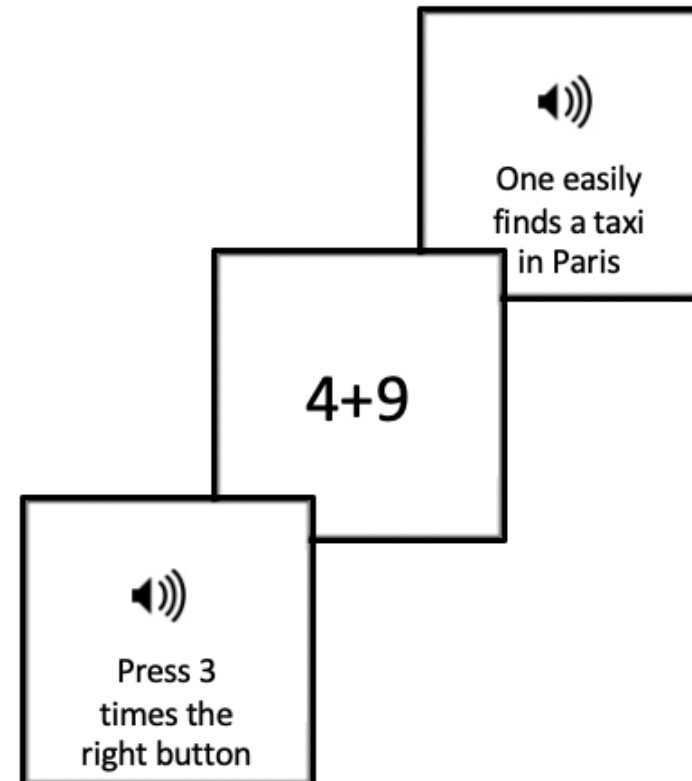
Objects (runs 5 & 6)

Main task : orientation judgment Control :
category judgment

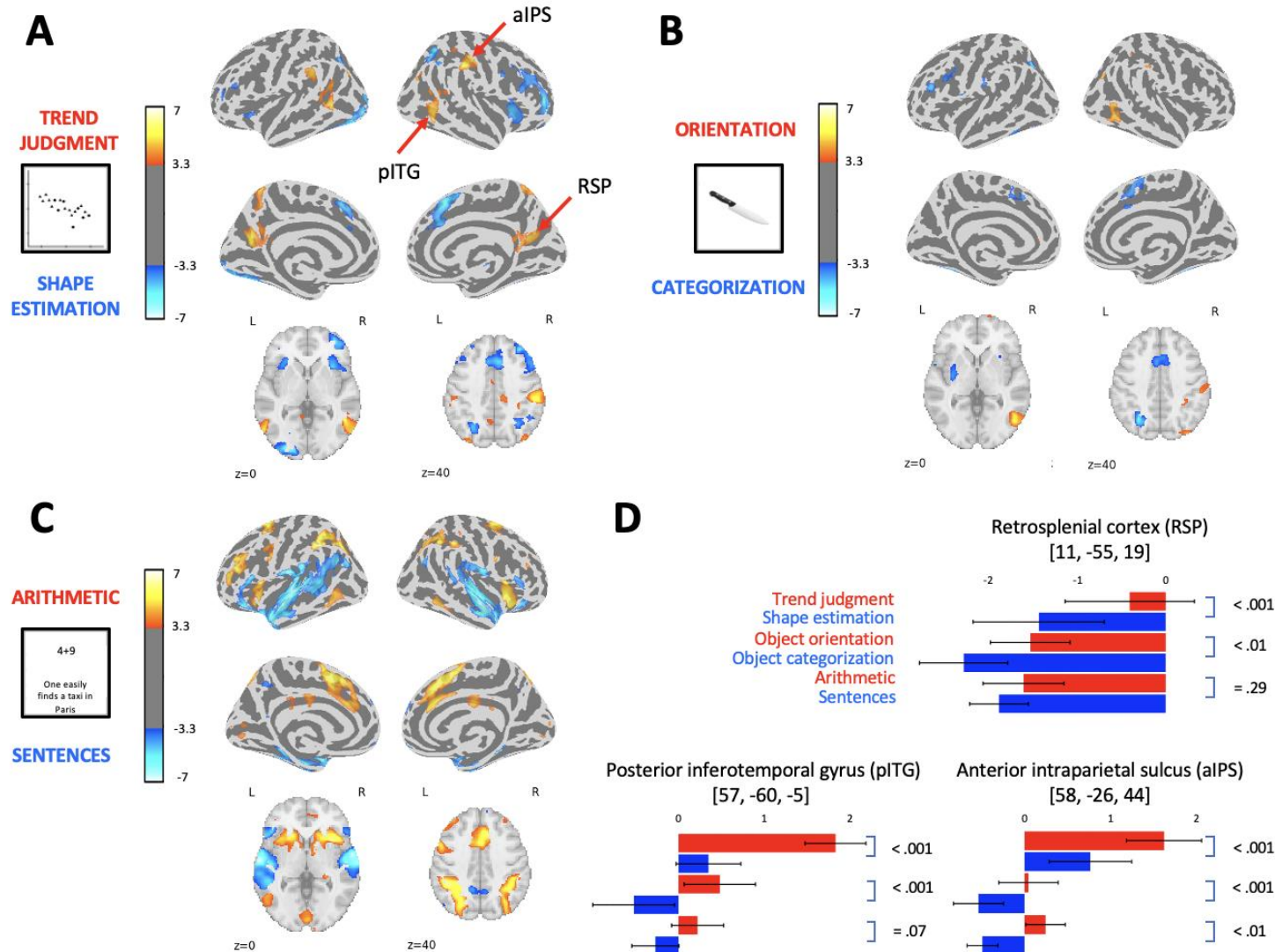


Math/Language (run 7)

Tasks: motor tasks, mental
calculations, listening, reading



LES BASES NEURALES



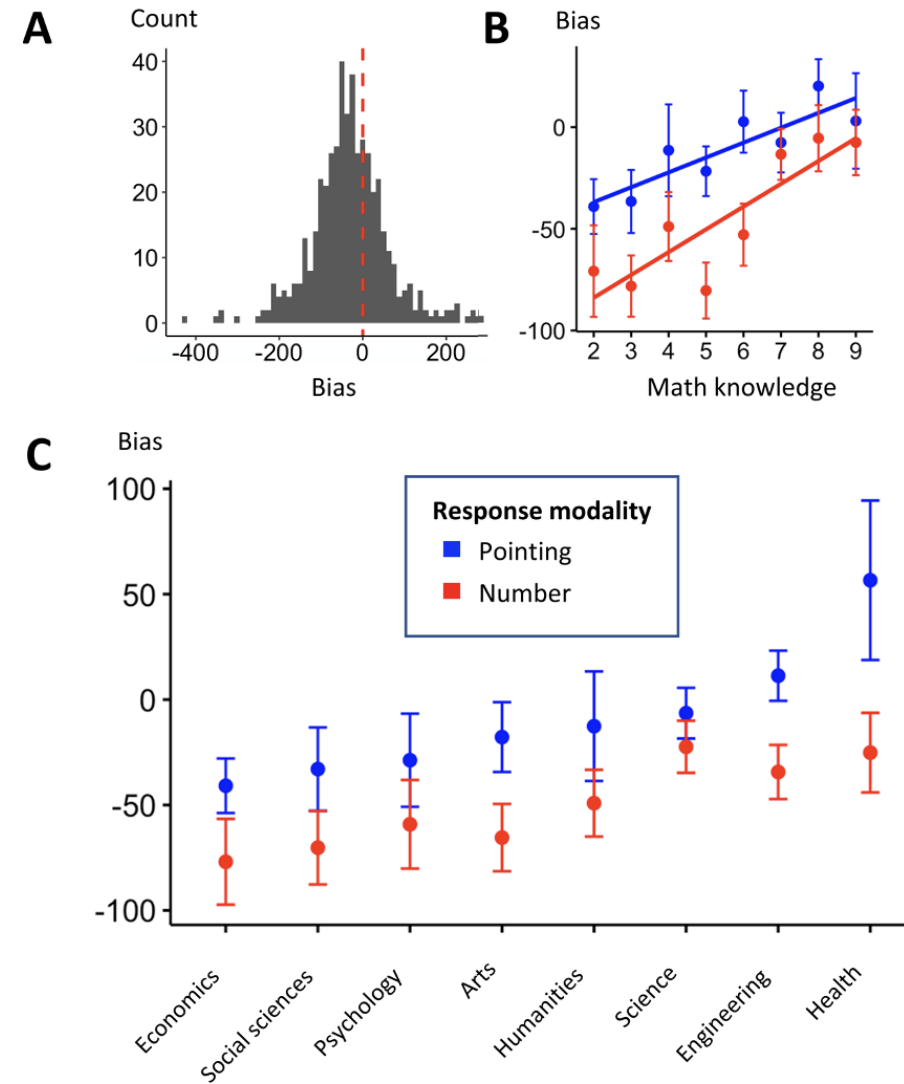
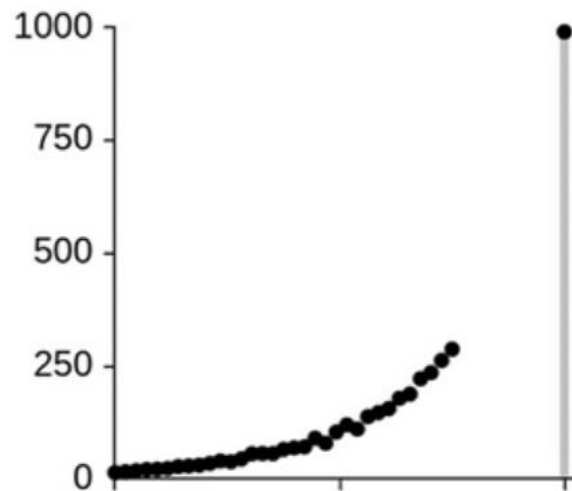
Les zones du cerveau utilisées pour les mathématiques et celles utilisées pour évaluer la tendance d'un nuage de points bruité se chevauchent.

En d'autres termes, une tâche purement perceptive semble être de nature très "mathématique".



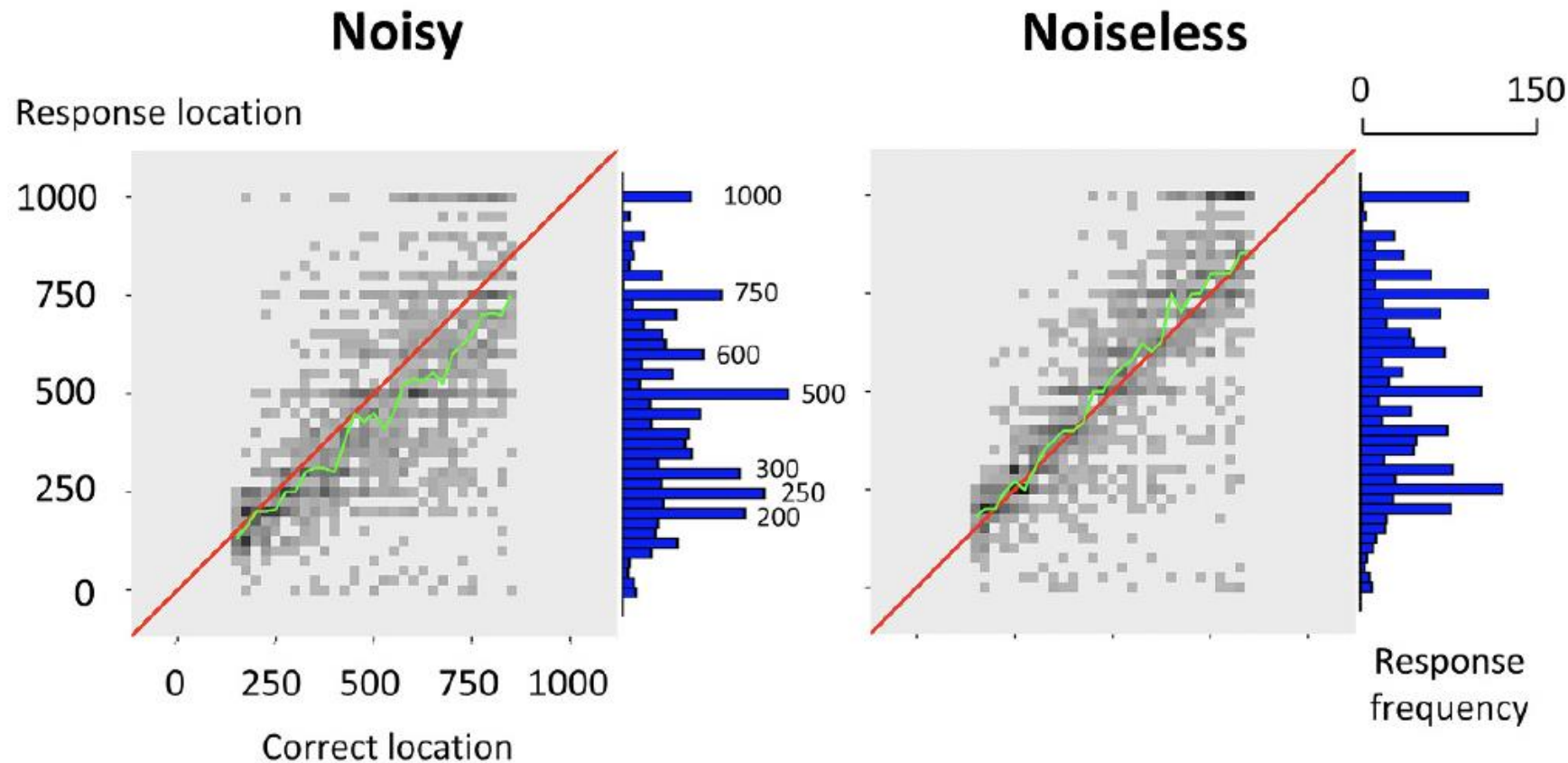
UN CAS INTERESSANT : LES FONCTIONS EXPONENTIELLES

LES FONCTIONS EXPONENTIELLES



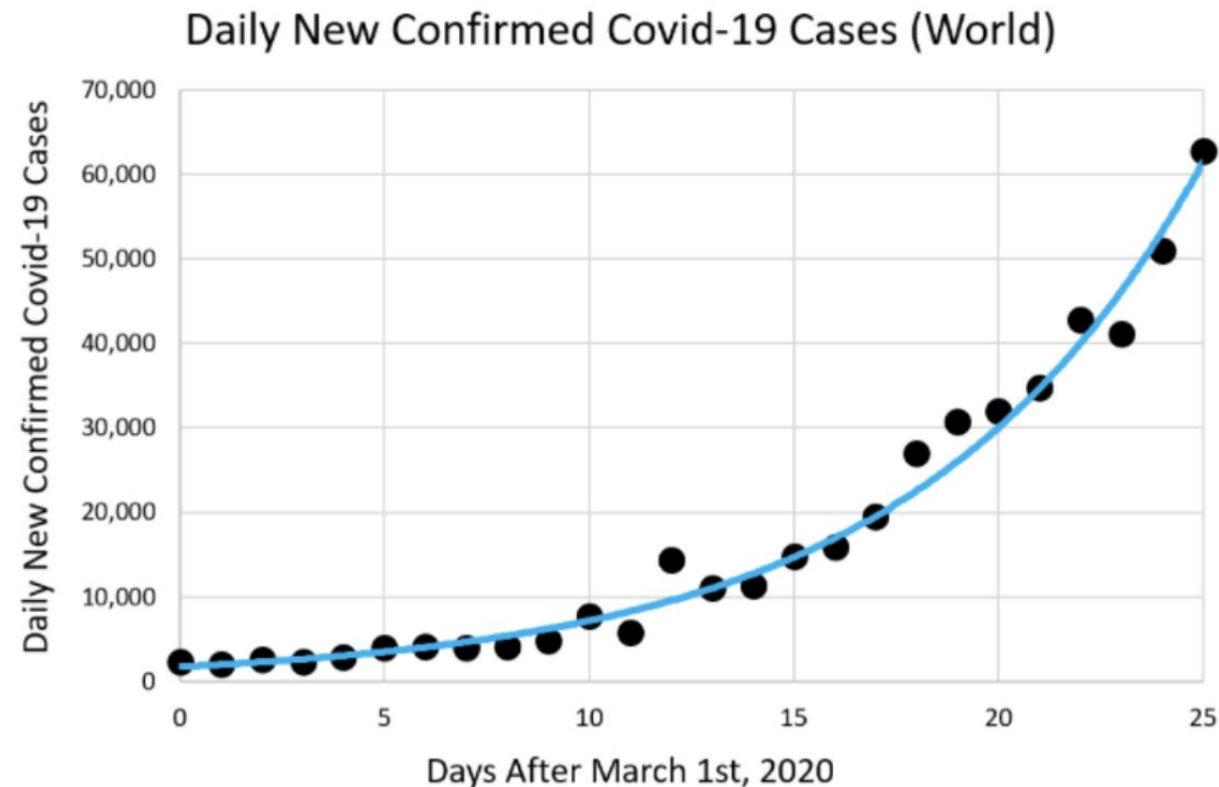
LES FONCTIONS EXPONENTIELLES

Le biais de croissance exponentielle semble présente uniquement en cas de graphiques « bruités ».



LES FONCTIONS EXPONENTIELLES

Suggestion pratique pour les journalistes et les scientifiques : représenter également la fonction sous-jacente (le « fit »), surtout si le message à faire passer est celui de comprendre l'accélération d'une courbe exponentielle.





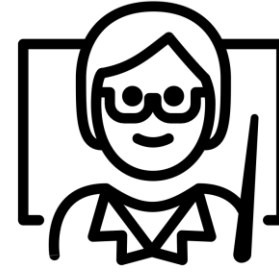
CONCLUSIONS

123

Le sens du nombre est disponible à travers les âges, les cultures et les espèces.



Les humains (et pas que !) disposent d'intuitions mathématiques assez sophistiquées.



L'enseignement des mathématiques peut s'appuyer sur les découvertes de la psychologie cognitive.



Les graphiques constituent un objet mathématique très récent et pas très bien maîtrisé par la population générale et les étudiants.



La perception intuitive des graphiques est très sophistiquée, se rapprochant de celle d'un statisticien optimal.



Le réseau cérébral des mathématiques est impliqué également dans la perception des graphiques.



Les fonctions exponentielles sont mal interprétées quand présentées sous forme de graphique « bruité ».

REMERCIEMENTS



Stanislas
Dehaene



Mathias
Sablé-Meyer



Cassandra
Potier-Watkins



Marie
Lubineau



Théo
Morfoisse



Guillaume
Dehaene



Serge
Caparos



Thomas
Dighiero-Brecht



POUR ALLER PLUS LOIN



https://www.youtube.com/watch?v=K_Tj9rSfM4M



<https://www.college-de-france.fr/fr/agenda/cours/la-perception-des-graphiques-un-nouvel-exemple-de-recyclage-neuronal>

PRIX CHERCHEURS EN ACTE

COMMENT ÇA MARCHE ?

Le Prix **Chercheurs en Actes** est ouvert aux établissements de tout niveau d'enseignement (maternelle, élémentaire, secondaire) publics ou privés sous contrat d'association avec l'État et à l'ensemble des services de l'éducation nationale.

L'établissement ou le service lauréat recevra une dotation de 5 000 €.



**DÉPOSEZ VOTRE CANDIDATURE
AVANT LE 13 AVRIL 2026***

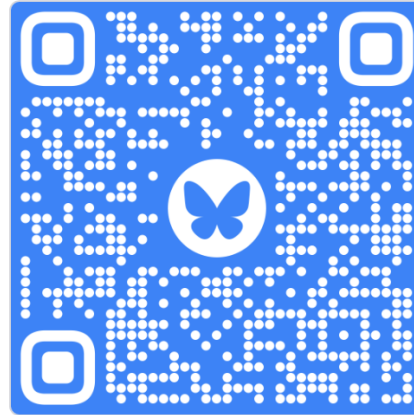
PARTICIPEZ A NOS RECHERCHES



ME CONTACTER



LinkedIn



Bluesky



Gmail

Merci de votre attention :-)