

À propos de géométrie
dans l'Égypte ancienne

Daniel Austin, Michel Guillemot

en hommage à Rudolf Bkouche
Lille 22 Mars 2018

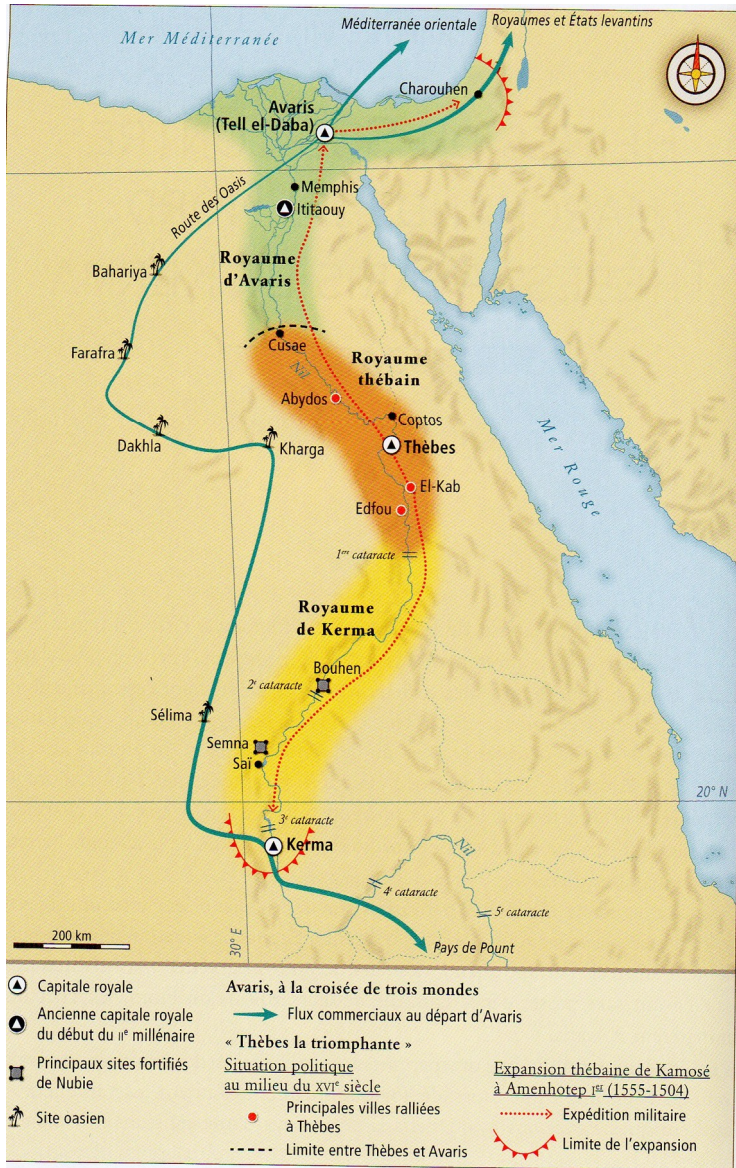
Trois millénaires

peu de
documents

À propos de
géométrie
dans l'Égypte
ancienne

Trois millénaires (d'après Vercoutter)

- Époque archaïque ou thinite: 3150-2700
- Ancien Empire : 2700-2200
- Première période intermédiaire : 2200-2065
- **Moyen Empire : 2065-1785**
- **Deuxième période intermédiaire : 1785-1580**
- Nouvel Empire : 1580-1090
- Troisième période intermédiaire : 1085-715
- Basse époque : 715-332

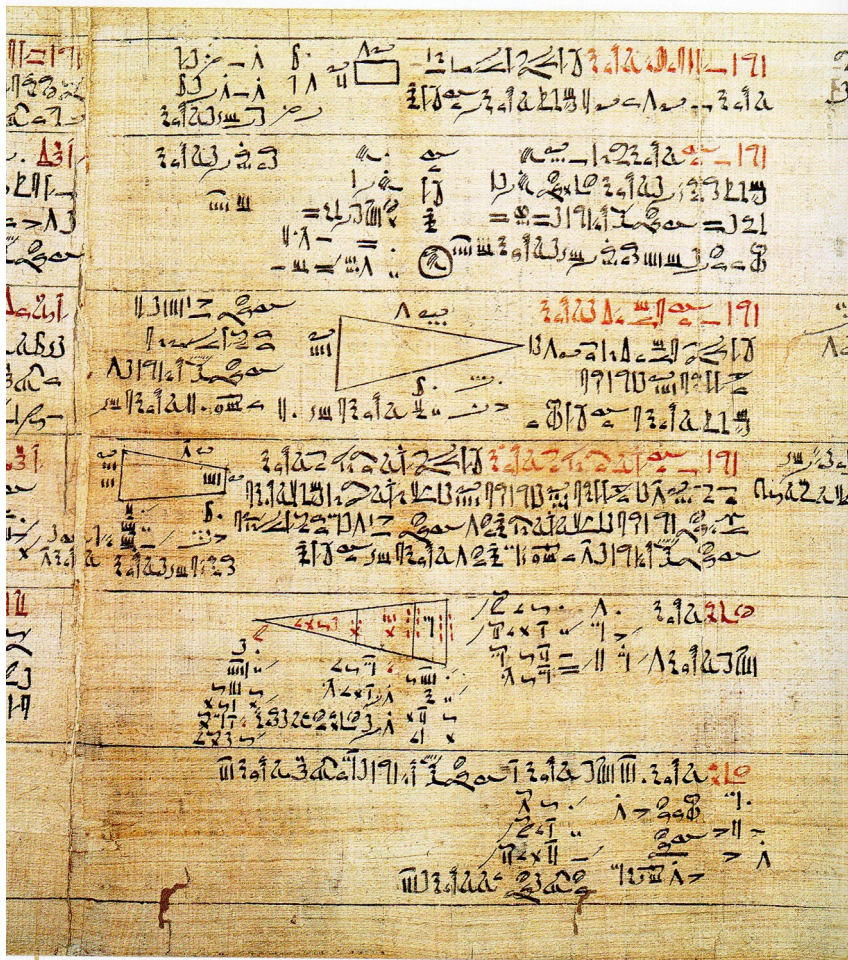


vers 1750-1504

- Avaris
- Thèbes
- Kerma

Agut (p, 286)

Les documents mathématiques



Tablettes du Caire

Papyrus de Moscou

Fragments de El Lahoun

Fragments de Berlin

Rouleau de cuir

Papyrus Rhind

Ostracon 153 du Caire

Papyrus démotiques

Papyrus Rhind

- **Auteur** : inconnu
- **Période** : Moyen Empire, vers 1800
- **Copiste** : Âhmès, vers 1550
- **Acheteur** : Alexander Rhind
- **Musées** : British Museum et Brooklyn Museum
- **Contenu** : Expressions de 2 à partir d'un entier
Tables
84 problèmes

Environnement historique d'après la Page d'Introduction du *Papyrus Rhind*.

Écrit de l'Auteur sous Aménémhat III

Apogée de la XII^e dynastie (Moyen Empire).

Etat centralisé.



Copie d'Âhmès sous Apopi (dernier *Hyksos*)

Époque troublée des rois dits *Hyksos*

(étrangers du Proche Orient).

Reconquête par les Thébains.

Mélanges de peuples, de cultures
favorables aux progrès intellectuels.



Papyrus Rhind : introduction



Bon exemple pour aller au fond des choses, pour apprendre à connaître tout ce qui est, < tout ce qui est > obscur, < pour percer > tous les secrets.

Numération hiéroglyphique



• 1



• 10



• 100



• 1000



• 10000



• 100000



• 1000000

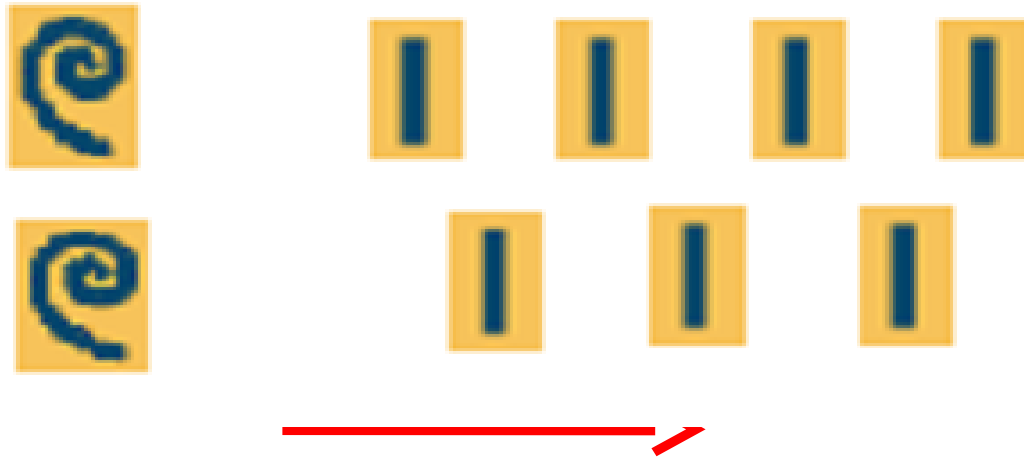


Hiéroglyphe

Base 10

Additif (répétition des signes)

207

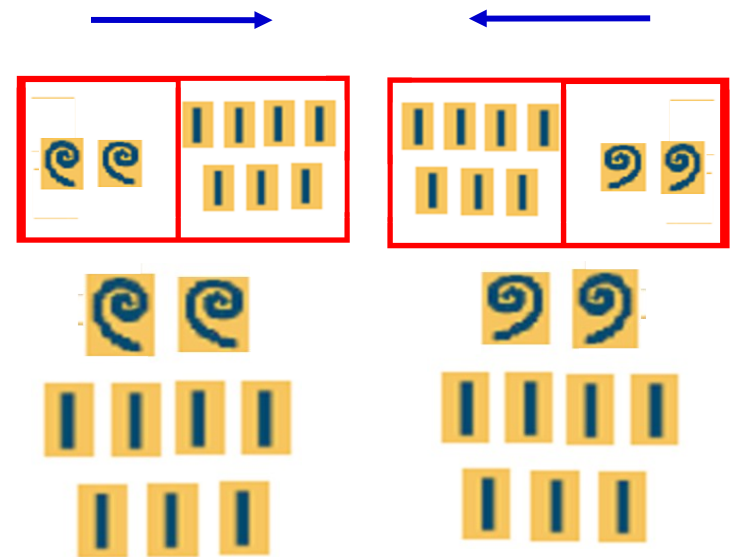


Écritures numériques

207

Hiéroglyphique

- Recherche de la symétrie
- Notion de carré imaginaire
- Écriture verticale



Hiératique

200



7



207



« FRACTIONS »

- DEMI



-
-
-

- DEUX-TIERS



-

- INVERSESES ou QUANTIÈMES

-

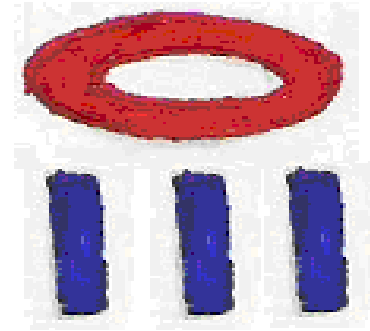
- bouche (ro)

-

1/3

-

nombre 3



HIÉRATIQUE (Papyrus Rhind)

• 4



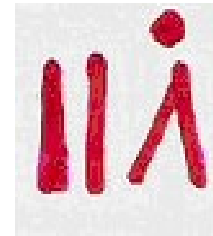
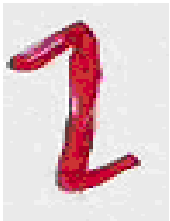
• $2/3$

$1/2$

$1/3$

$1/4$

$1/12$



Les écritures des chiffres de la classe des dizaines d'après quelques documents

Classe des dizaines :

	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Tablettes d'Akhmim Musée du Caire CG 26367-8									
Pap. de Moscou Musée des Beaux Arts n° 4576									
Pap. de Kahun Londres. University College. voie 1									
Pap. de Berlin n° 6619									
Pap. de Rhind British Museum. n° 10057, 10058. Brooklyn Museum n°	 R2/5,1	 R2/7,1	 R2/15,1	 R2/21,1	 R2/43,1	 R2/147,1	 R2/149,1	 R2/2,2	 R2/41,3
Manuscrit de Würz British Museum n° 10250									
Pap. Ebers Université de Leipzig									
Pap. Harris British Museum. n° 9999									
Pap. Wilbour Brooklyn Museum n° E34.5526.									
Pap. démotiques voie 2									

1 UC 32 114 B ; 32 118 B 1, B 2 ; 32 134 A, B ; 32 153 ; 32 160, 1, 2 ; 32 164 ; 32 162, 1, 2 .

2 Pap. Caize JE 83127-30, 83137-43 ; Pap. British Museum 10399, 10520, 10724 ; Pap. Caribug 30 .

xx

x

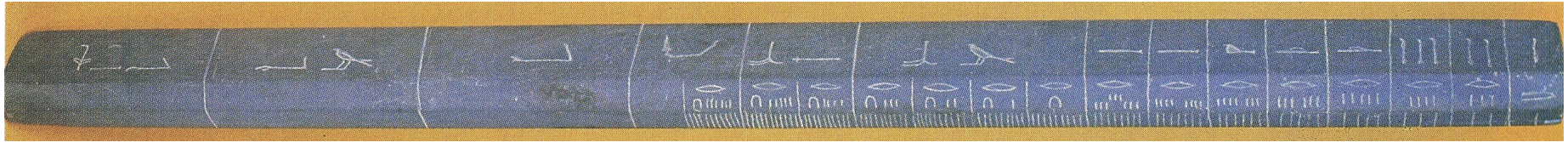
xxx

Scribi
A

L'écriture des fractions particulières des textes « mathématiques » connus

		1	3''	2'	3'	4'	6' ①
Moyen Empire	Tablettes d'Ak mî m ¹ Musée du Caire CG 26367-8	!	1 ^②	>	2 ^②	X	33
Moyen Empire	Pap. de Kahun ² Londres University College	!	27	>	22	X	33
Moyen Empire	Pap. de Berlin ³ n° 6649	!		>		X	
Moyen Empire	Pap. de Moscou ⁴ n° 4576 Musée des Beaux Arts	!	7	2	2 ^③	X	⊗
fin de la 2 ^e Pério. Int.	Pap. de Rhind. ⁵ British Museum. BM10057-8 Brooklyn Museum. 37.1784E	!	7	>	1	X	3 ^②
fin de la 2 ^e Pério. Int.	Rouleau de Cuir ⁶ n° BM 10250 British Museum.	!	2	>	1	X	3 ^②
Ramsès IV XX ^e dy.	Pap. Harris ⁷ n° 9999 British Museum.	!	7	2		X	
Ramsès V XX ^e dy.	Pap. Wilbour. ⁸ n° E 34.5536 Brooklyn Museum	! ^A	7 ^C	7 ^B	2, 2 ^A		
Ep. gréco-romaine	Pap. démotiques ⁹		1	2	2	2	

Mesures de longueur

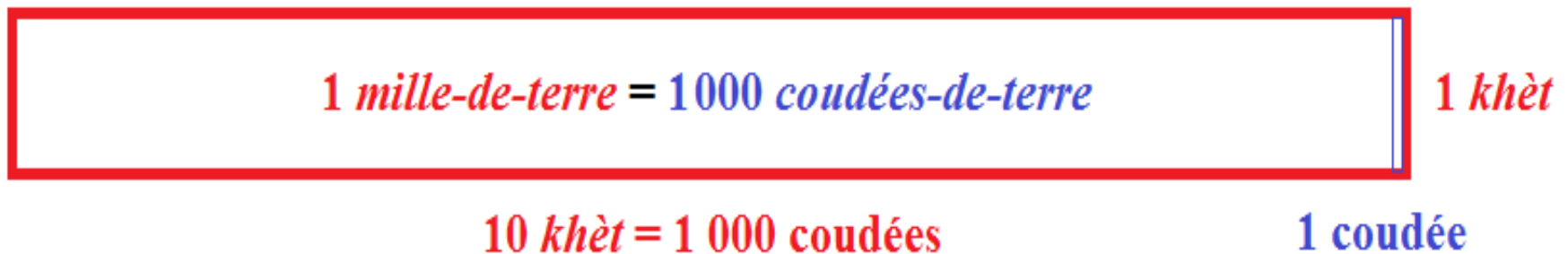


- 1 *coudée* \approx 52,5 *cm*
- 1 *coudée* = 7 *paumes*
- 1 *paume* = 4 *doigts*

- 1 *khèt* = 100 *coudées*

Mesures de superficie

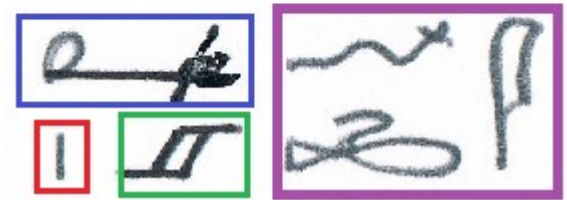
- 1 sétchat = 1 khèt² ≈ 30 ares
- 1 mille – de – terre = 10 sétchat
- 1 sétchat = 100 coudées – de – terre



Moitié-de-rectangle

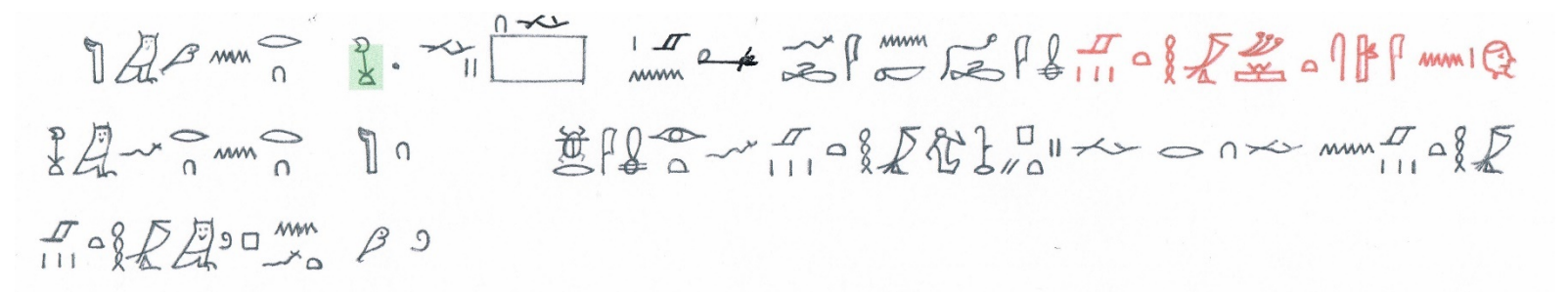
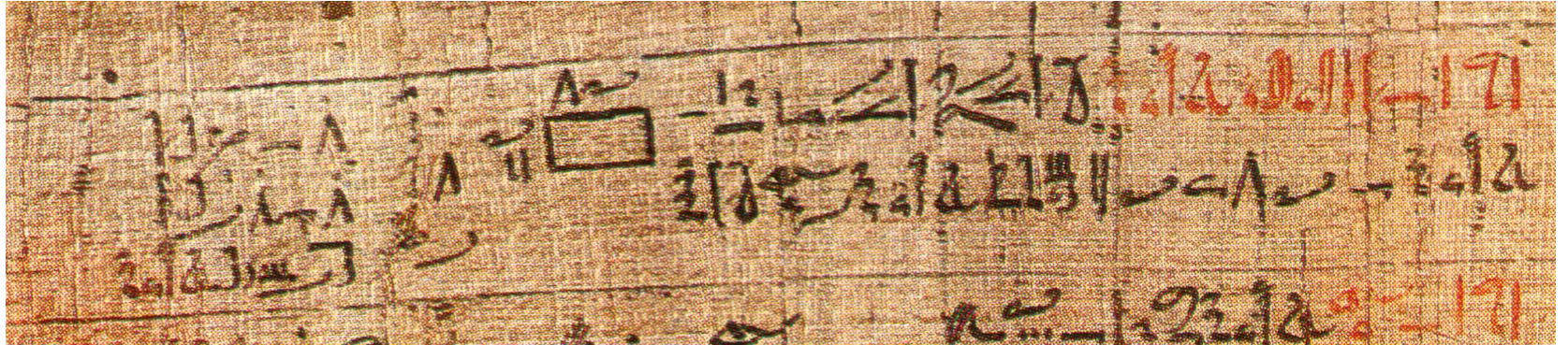
ifèd-rémèn : moitié-de-rectangle

- « lettres » *i* (j), *f* (f) et *d* (d)
- terre irriguée
- barre verticale,
marque d'un substantif.



- l'idéogramme du bras, *rémèn* (rmn),
aussi la notation abrégée de la moitié
de *sétchat* appelée du même nom

R49



R49

Exemple de « partage » d'une surface. S'il t'est dit : « La *moitié-de-rectangle* d'une surface <rectangulaire> de 10 *khèt* sur 2 *khèt*.

Quelle est sa superficie ? ».

La procédure telle qu'elle apparaît.

1	1 000
10	10 000
100	100 000
1000	1 000 000

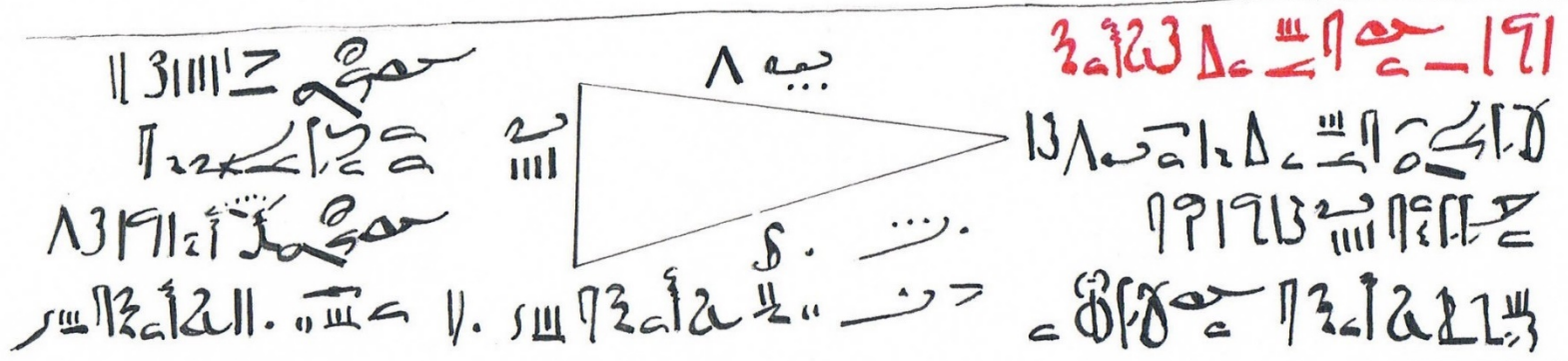
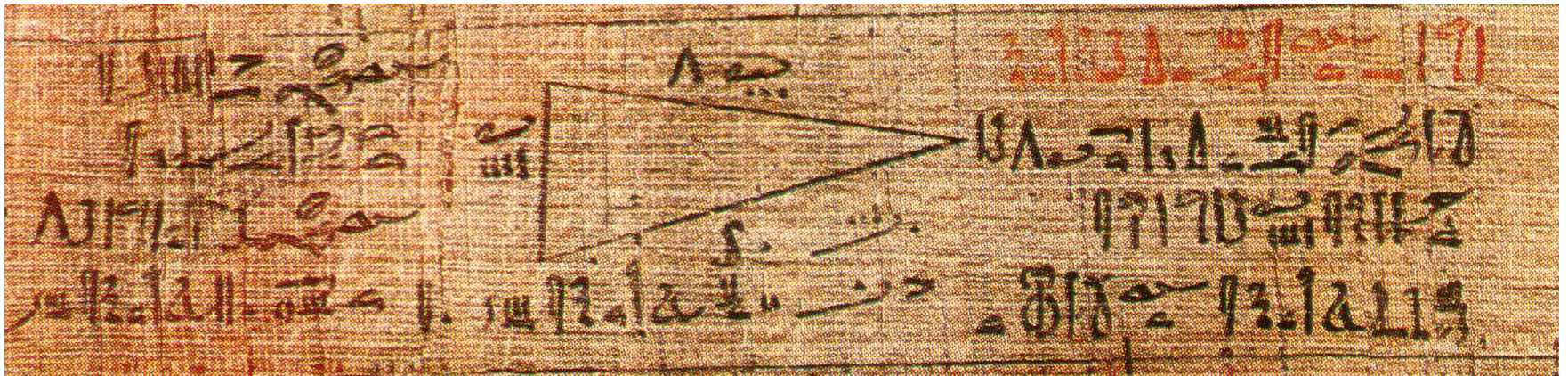
10 *khèt*



2
khèt

10000 : 10 000
= 1/10 : 1 000
= superficie
des-de-terre > !

R51



R51

Exemple de procédure à propos d'un triangle en tant que surface. S'il t'est dit : « Un triangle de 10 *khèt* de hauteur et 4 *khèt* de base. Quelle est sa superficie ? ».

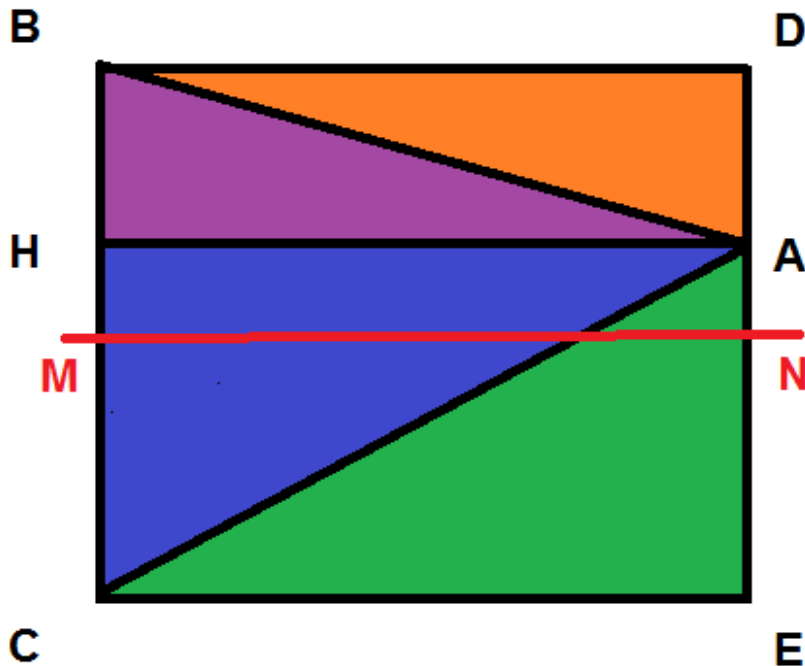
< ... >

Pour donner lieu (en superficie) à sa *moitié-de-rectangle*, tu feras la moitié de 4 : 2.

Tu multiplieras 10 par 2.

<2 *milles-de-terre* >, c'est sa superficie.

Triangle et moitié-de-rectangle

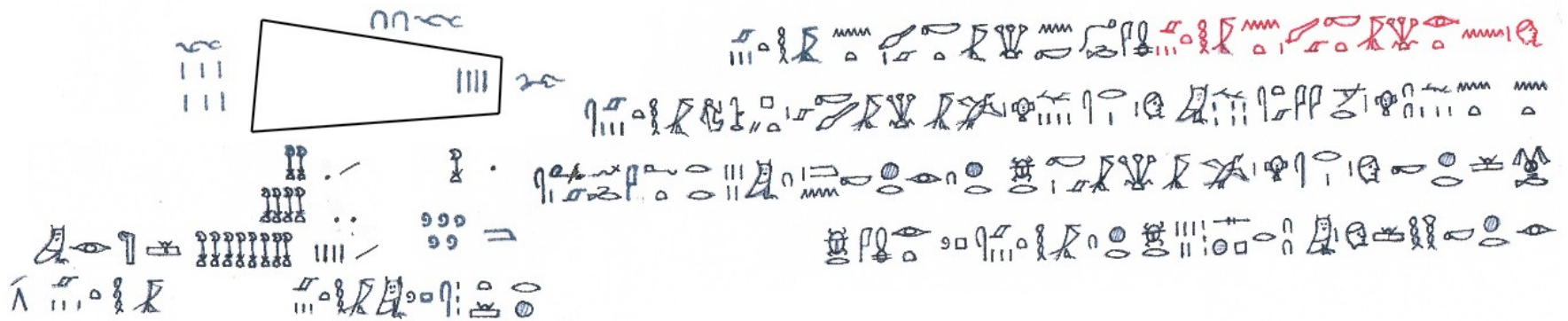
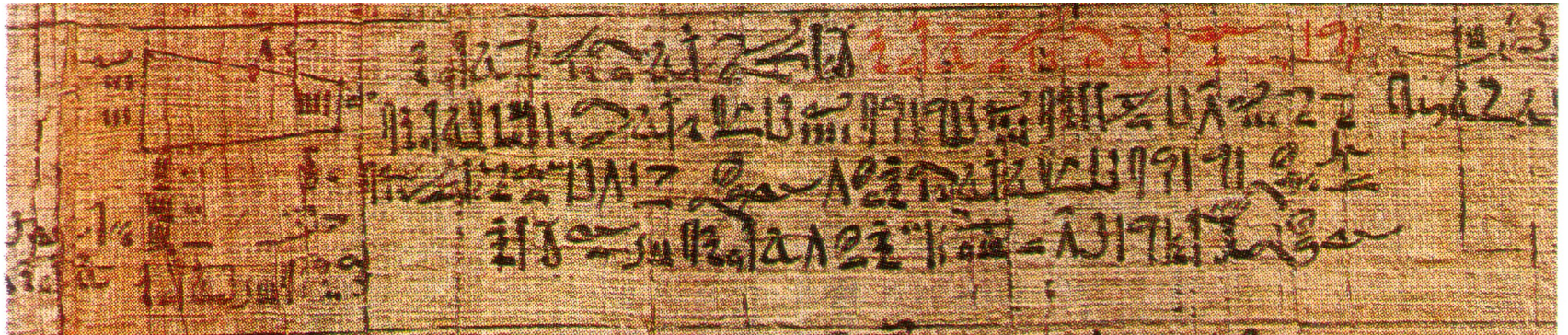


superficie BHAD = superficie BHA x 2

superficie HCEA = superficie HCA x 2

superficie BCED = superficie BCA x 2

R52



R52

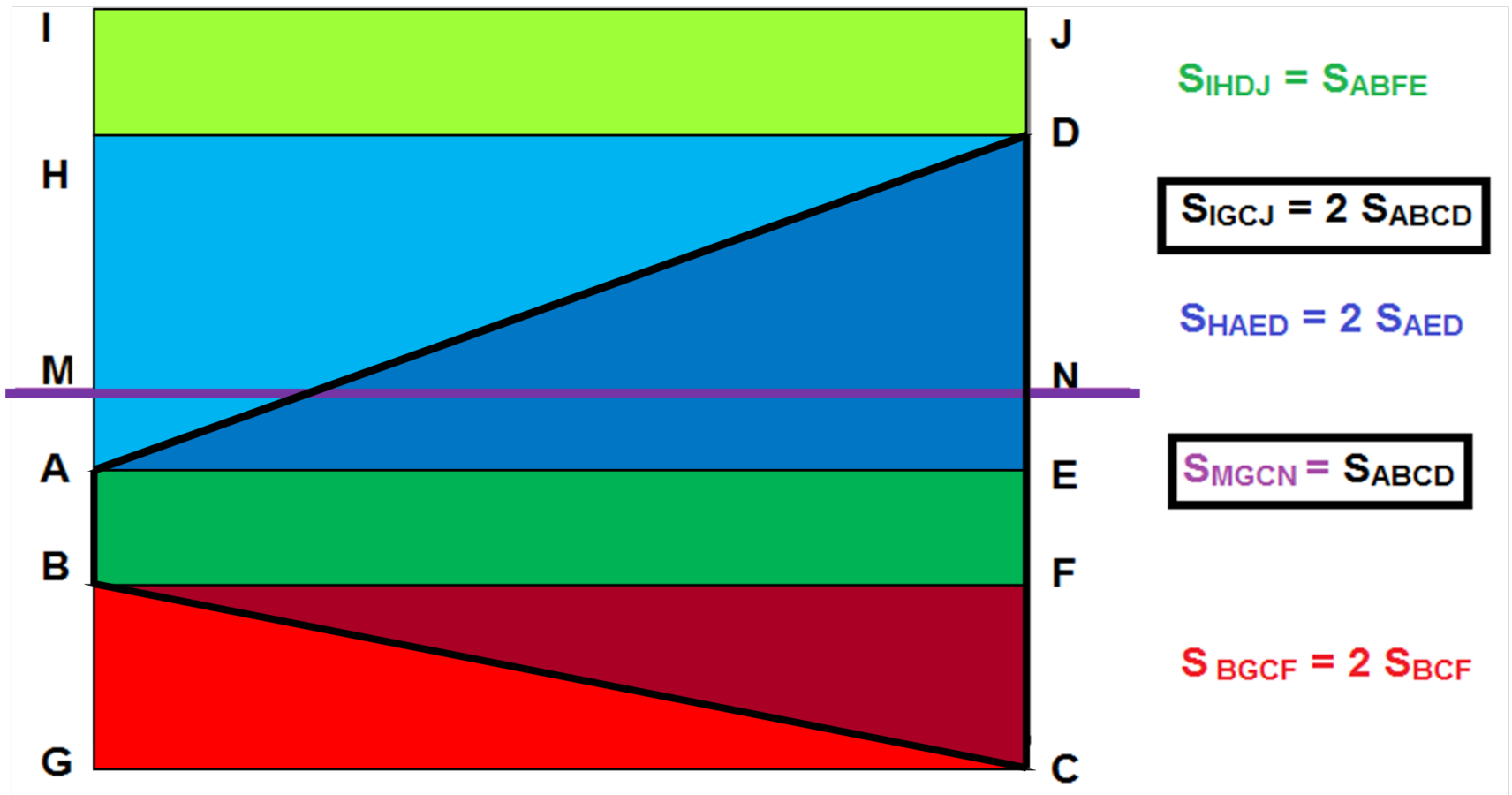
Exemple de procédure à propos d'un trapèze. S'il t'est dit : « Un trapèze de 20 *khèt* de « hauteur », 6 *khèt* de (grande) base et 4 *khèt* de petite base. Quelle est sa superficie ? ».

Tu additionneras sa (grande) base et sa petite base. Il en résultera 10.

Pour donner lieu (en superficie) à sa *moitié-de-rectangle*, tu feras la moitié de 10, à savoir, 5.

Tu multiplieras 20 par 5. Il en résultera 10 *milles-de-terre*. C'est sa superficie.

Trapèze et moitié-de-rectangle



Papyrus de Moscou M7

- **Méthode pour calculer un triangle**
- Si on te dit : un triangle d'aire 2 <milles-de-terre> et d'un « rapport » de $2 \frac{1}{2}$ <de la « longueur » à la « largeur »>
- Alors, tu fais en sorte de **doubler** l'aire.
- Il advient 40 <sétchat>

**Aire d'un disque
et
monstration**

Papyrus Rhind R50

• **Exemple de procédure** à propos d'une surface ronde de diamètre 9 *khèt*. Quelle est sa superficie < en *sétchat* > ?

Tu soustrairas son neuvième, à savoir, 1. Le reste est 8.

Tu multiplieras 8 par 8. Il en résultera 64.

C'est sa superficie : 64 *sétchat*.



Aire d'un disque de diamètre D

-

$$A =$$

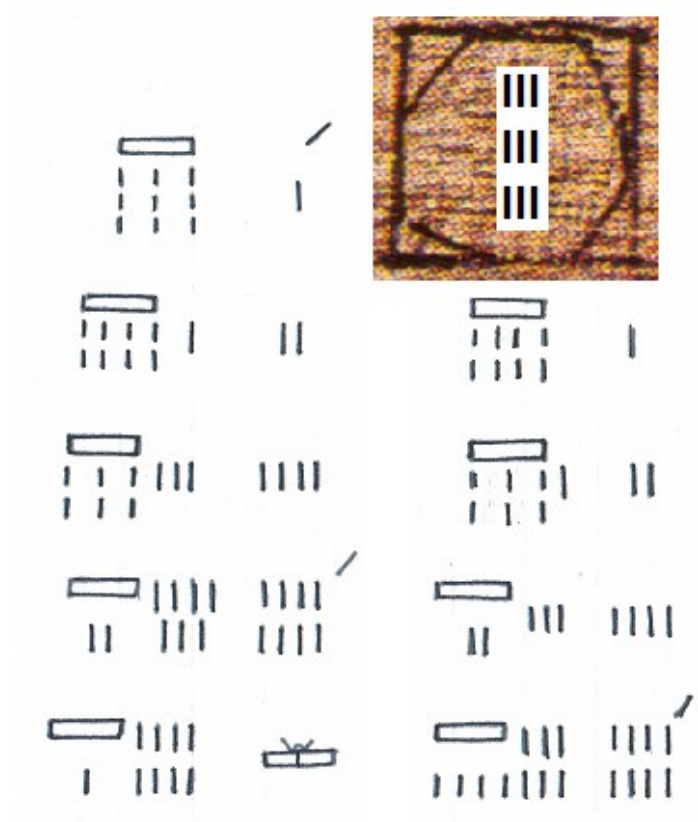
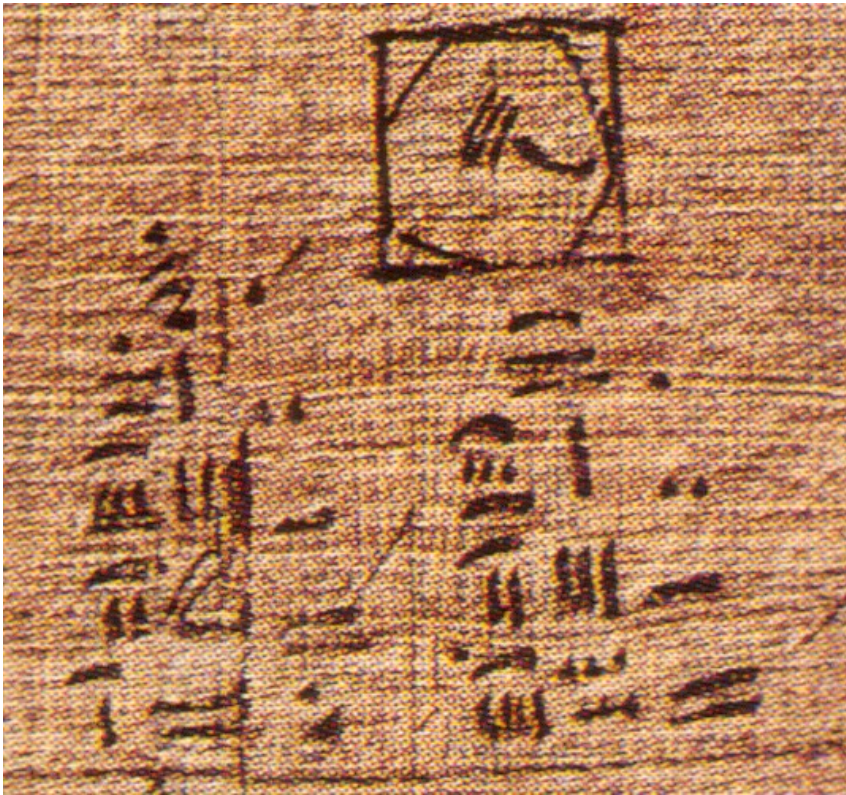
$$9 \times \left(1 - \frac{1}{9}\right) = 8$$

$$9 \times \left(1 - \frac{1}{10}\right) = 8,1$$

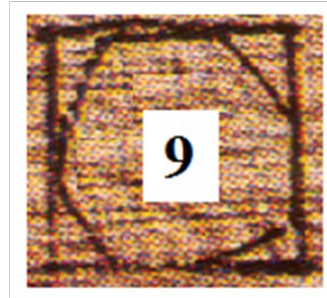
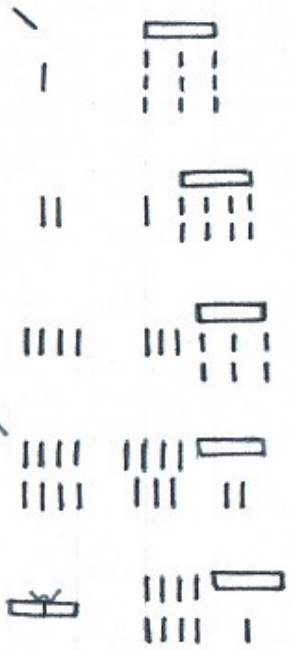
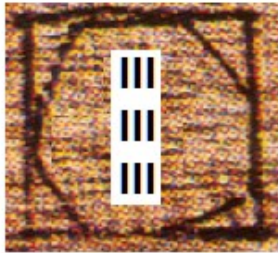
$$9 \times \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 7,875$$

$$9 \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 7,976$$

Exemple R48

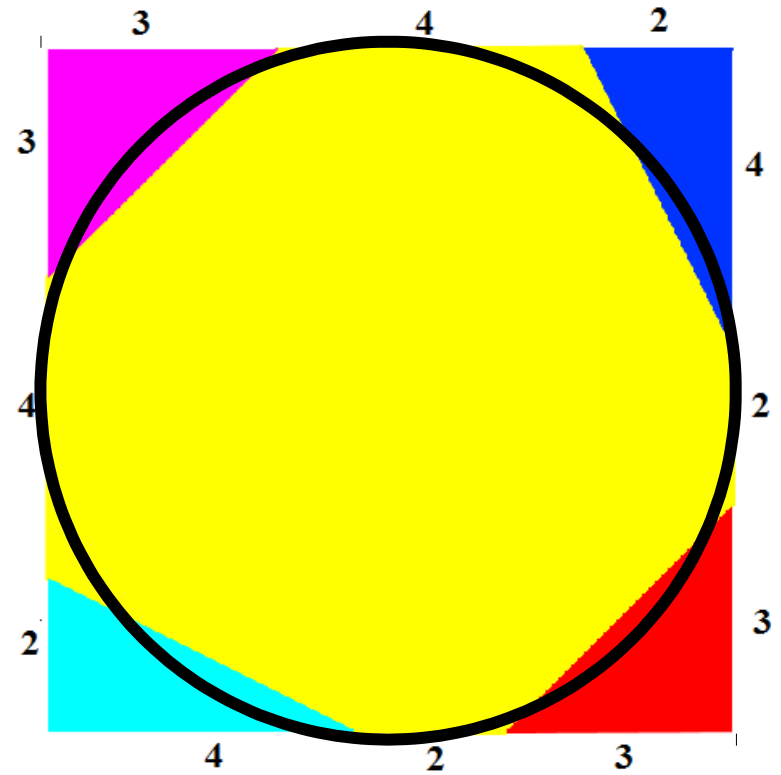


Papyrus Rhind R48

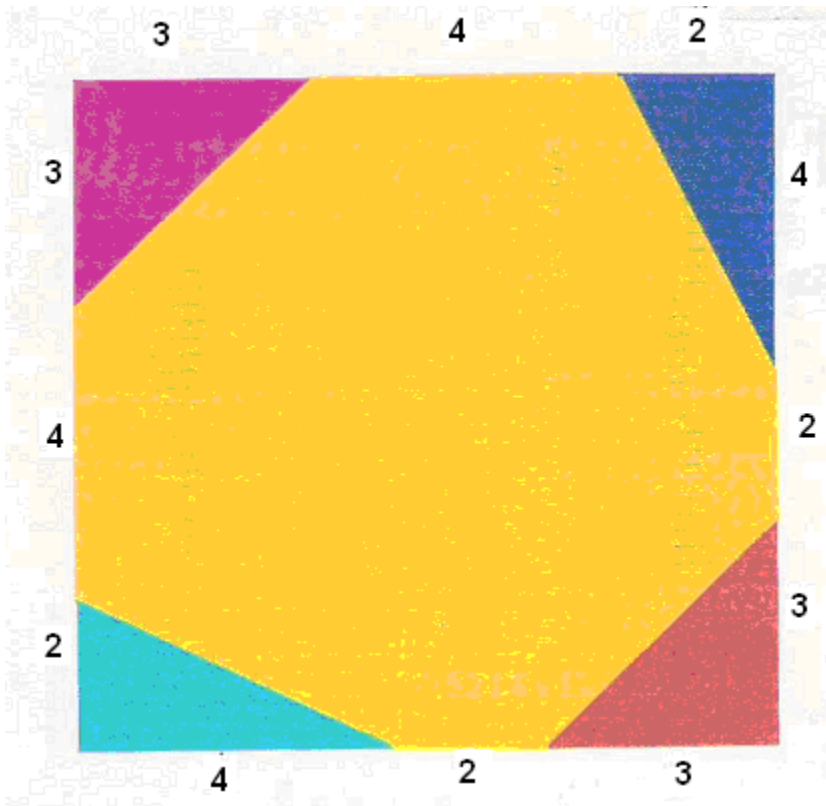


	\ 1	9 _s
1	8 _s	2 1 _m 8 _s
2	1 _m 6 _s	4 3 _m 6 _s
4	3 _m 2 _s	\ 8 7 _m 2 _s
\ 8	6 _m 4 _s	Total 8 _m 1 _s

Papyrus Rhind R48

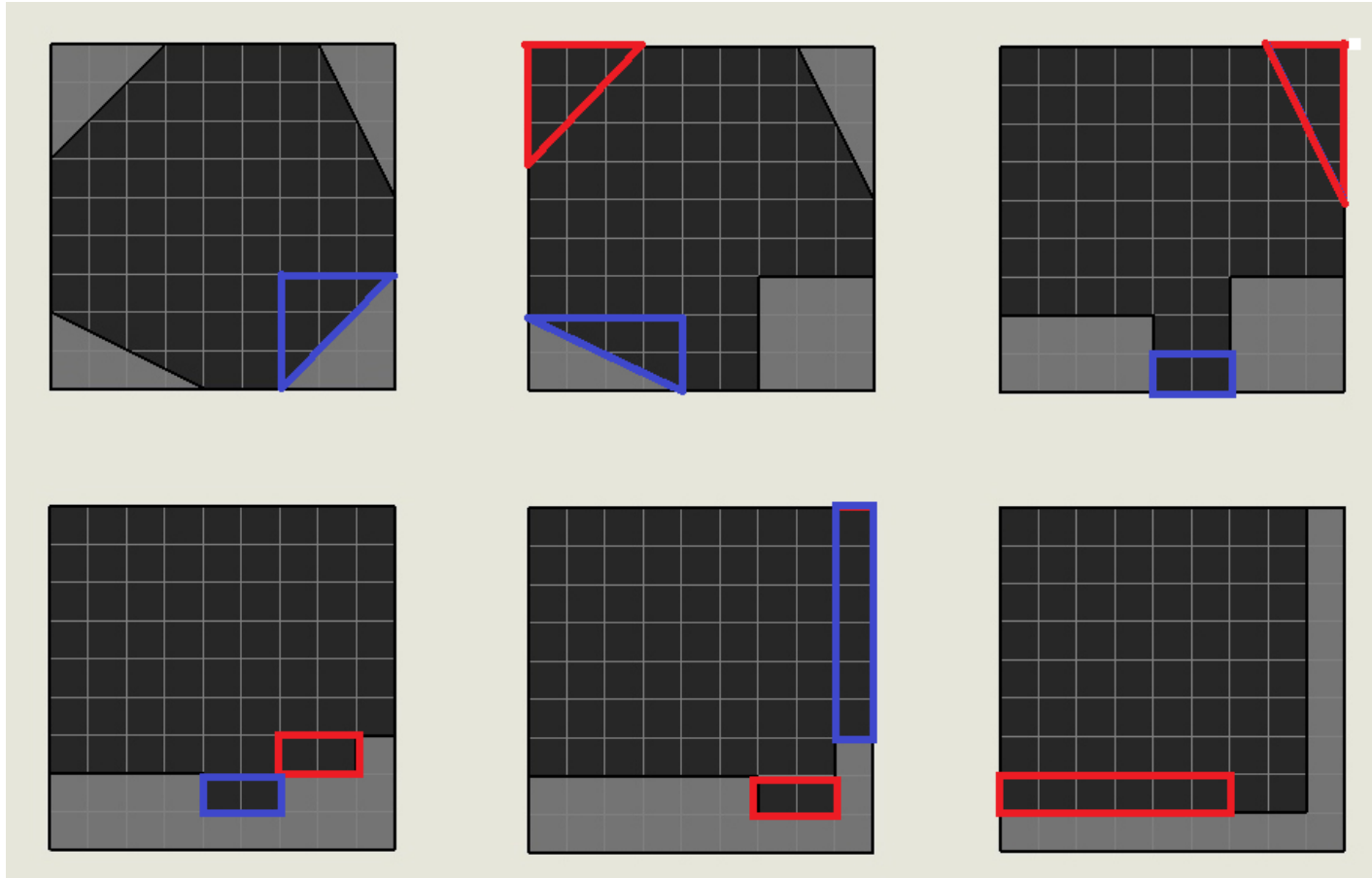


Monstration R48



- $9 \times 9 = 81$
- $8 \times 8 = 64$
- $3 \times 3 = 9$ $4 \times 2 = 8$
- $81 - (9 + 8) =$
 $= 81 - 17 = 64$

Papyrus Rhind R48



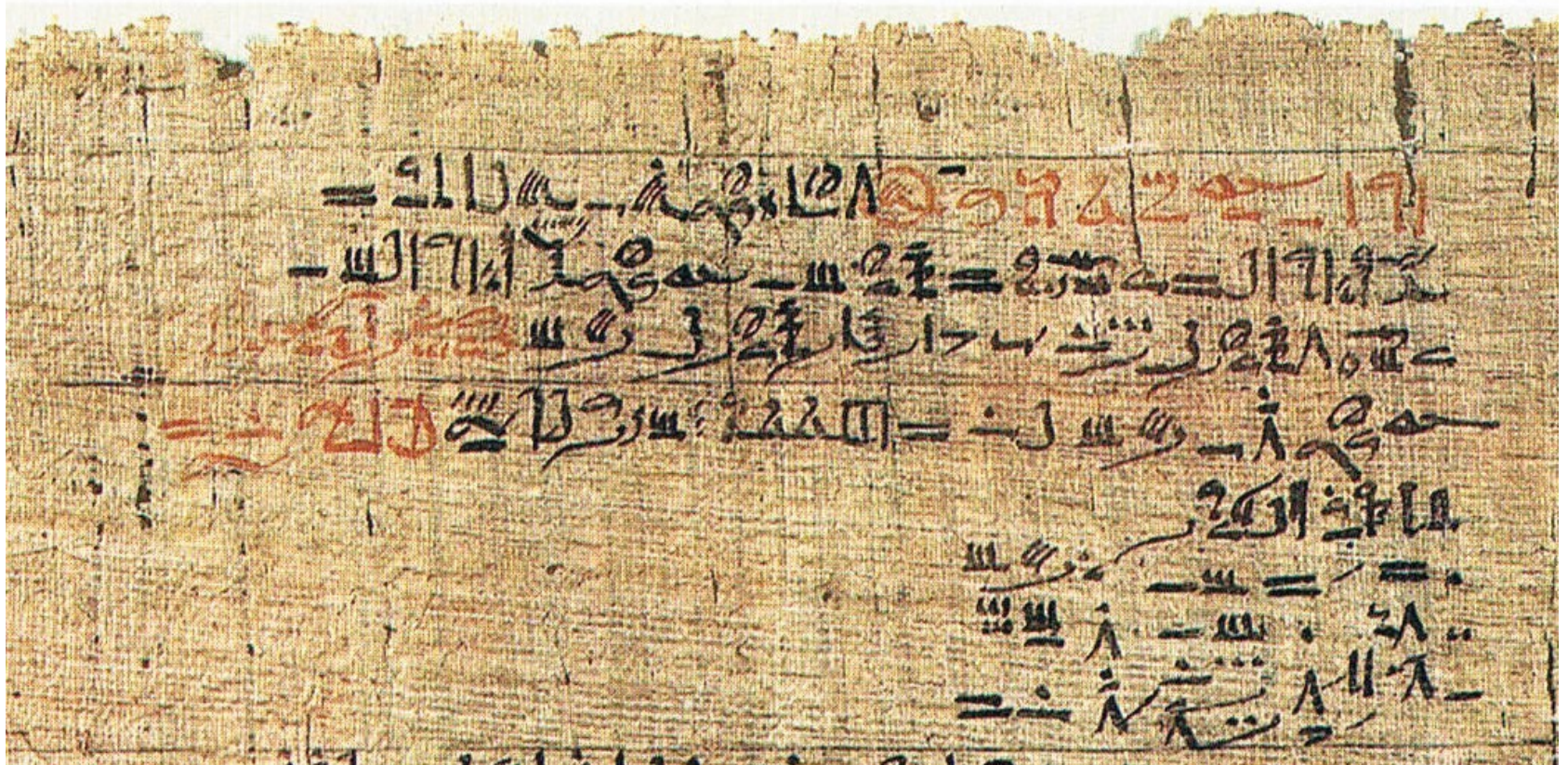
Capacité des greniers ronds

Mesures de capacité

- $52^3 = 140\,608$
- $53^3 = 148\,887$

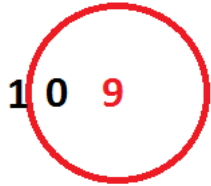
- 1 « ~~coudée-cube~~ » ≈ 150 litres
- 1 ~~khar~~ $= \frac{2}{3}$ « ~~coudée-cube~~ » ≈ 100 litres
- 1 ~~hecto-quadruple-héqat~~ $\equiv 400$ héqat $\equiv 20$ khar
- 1 ~~héqat~~ ≈ 5 litres
- 1 ~~héqat~~ ≈ 5 litres
- 1 ~~rô~~ $= \frac{1}{320}$ héqat
- 1 ~~rô~~ $\frac{1}{320}$ héqat

R 41



R41

Exemple de procédure à
propos d'un grenier rond de
9 <coudées de diamètre> et
de 10 <coudées> de hauteur,



De 9 tu soustrairas son $1/9$, à
savoir, 1. Il reste 8.

Tu multiplieras 64 par 10.

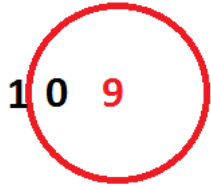
Il en résultera 640.

Ajoute-lui sa moitié.

Il en résultera 960, sa capacité en *khar*.

R41

Exemple de procédure à propos d'un grenier rond de 9 <coudées de diamètre> et de 10 <coudées> de hauteur,



De 9 tu soustrairas son $1/9$, à savoir, 1. Il reste 8.

Tu multiplieras 64 par 10.

Il en résultera 640.

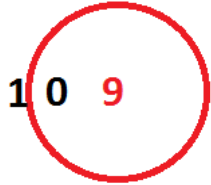
Ajoute-lui sa moitié.

Il en résultera 960, sa capacité en *khar*.

-
- $D = 9$
- $H = 10$

R41

Exemple de procédure à propos d'un grenier rond de 9 <coudées de diamètre> et de 10 <coudées> de hauteur,



De 9 tu soustrairas son $1/9$, à savoir, 1. Il reste 8.

Tu multiplieras 64 par 10.

Il en résultera 640.

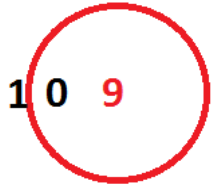
Ajoute-lui sa moitié.

Il en résultera 960, sa capacité en *khar*.

-
- $D = 9$
- $H = 10$
- $d = D \times \frac{1}{9}$

R41

Exemple de procédure à propos d'un grenier rond de 9 <coudées de diamètre> et de 10 <coudées> de hauteur,



De 9 tu soustrairas son $1/9$, à savoir, 1. Il reste 8.

Tu multiplieras 64 par 10.

Il en résultera 640.

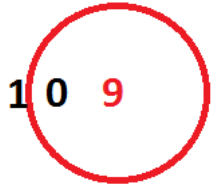
Ajoute-lui sa moitié.

Il en résultera 960, sa capacité en *khar*.

-
- $D = 9$
- $H = 10$
- $d = D \times \frac{1}{9}$
- $C = D - d$

R41

Exemple de procédure à propos d'un grenier rond de 9 <coudées de diamètre> et de 10 <coudées> de hauteur,



De 9 tu soustrairas son $1/9$, à savoir, 1. Il reste 8.

Tu multiplieras 64 par 10.

Il en résultera 640.

Ajoute-lui sa moitié.

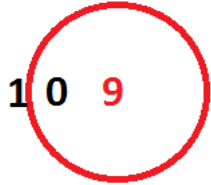
Il en résultera 960, sa capacité en *khar*.

-
- $D = 9$
- $H = 10$

- $d = D \times \frac{1}{9}$
- $C = D - d$
- $A = C \times C$

R41

Exemple de procédure à propos d'un grenier rond de 9 <coudées de diamètre> et de 10 <coudées> de hauteur,



De 9 tu soustrairas son 1/9, à savoir, 1. Il reste 8.

Tu multiplieras 64 par 10.

Il en résultera 640.

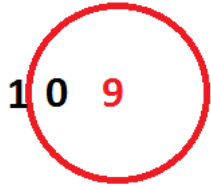
Ajoute-lui sa moitié.

Il en résultera 960, sa capacité en *khar*.

-
- $D = 9$
- $H = 10$
- $d = D \times \frac{1}{9}$
- $C = D - d$
- $A = C \times C$
- $V_c = A \times H$

R41

Exemple de procédure à propos d'un grenier rond de 9 <coudées de diamètre> et de 10 <coudées> de hauteur,



De 9 tu soustrairas son $1/9$, à savoir, 1. Il reste 8.

Tu multiplieras 64 par 10.

Il en résultera 640.

Ajoute-lui sa moitié.

Il en résultera 960, sa capacité en *khar*.

-
- $D = 9$
- $H = 10$
- $d = D \times \frac{1}{9}$
- $C = D - d$
- $A = C \times C$
- $V_c = A \times H$
- $V_k = \frac{V_c}{2} + (V_c : 2)$

R43

Un « grenier rond ». Sa hauteur est de 6 coudées et son diamètre de 8 coudées. En « grains », que contient-il ?

Opère à partir de 8. Tu lui ajouteras son $\frac{1}{3}$. Il en résultera : $10 \frac{2}{3}$.

Multiplie $10 \frac{2}{3}$ par $10 \frac{2}{3}$.

Il en résultera $113 \frac{2}{3} \frac{1}{9}$.

Multiplie $113 \frac{2}{3} \frac{1}{9}$ par 4 qui est $\frac{2}{3}$ de 6 « coudées », la hauteur.

Il en résultera $455 \frac{1}{9}$.

C'est sa capacité en *khar*.

R43

Un « grenier rond ». Sa hauteur est de 6 coudées et son diamètre de 8 coudées. En « grains », que contient-il ?

-
- $D = 8$
- $H = 6$

Opère à partir de 8. Tu lui ajouteras son $\frac{1}{3}$. Il en résultera : $10 \frac{2}{3}$.

Multiplie $10 \frac{2}{3}$ par $10 \frac{2}{3}$.

Il en résultera $113 \frac{2}{3} \frac{1}{9}$.

Multiplie $113 \frac{2}{3} \frac{1}{9}$ par 4 qui est $\frac{2}{3}$ de 6 « coudées », la hauteur.

Il en résultera $455 \frac{1}{9}$.

C'est sa capacité en *khar*.

R43

Un « grenier rond ». Sa hauteur est de 6 coudées et son diamètre de 8 coudées. En « grains », que contient-il ?

Opère à partir de 8. Tu lui ajouteras son $\frac{1}{3}$. Il en résultera : $10 \frac{2}{3}$.

Multiplie $10 \frac{2}{3}$ par $10 \frac{2}{3}$.

Il en résultera $113 \frac{2}{3} \frac{1}{9}$.

Multiplie $113 \frac{2}{3} \frac{1}{9}$ par 4 qui est $\frac{2}{3}$ de 6 « coudées », la hauteur.

Il en résultera $455 \frac{1}{9}$.

C'est sa capacité en *khar*.

-
- $D = 8$
- $H = 6$

- $t = D \times \frac{1}{3}$

R43

Un « grenier rond ». Sa hauteur est de 6 coudées et son diamètre de 8 coudées. En « grains », que contient-il ?

Opère à partir de 8. Tu lui ajouteras son $\frac{1}{3}$. Il en résultera : $10 \frac{2}{3}$.

Multiplie $10 \frac{2}{3}$ par $10 \frac{2}{3}$.

Il en résultera $113 \frac{2}{3} \frac{1}{9}$.

Multiplie $113 \frac{2}{3} \frac{1}{9}$ par 4 qui est $\frac{2}{3}$ de 6 « coudées », la hauteur.

Il en résultera $455 \frac{1}{9}$.

C'est sa capacité en *khar*.

-
- $D = 8$
- $H = 6$

- $t = D \times \frac{1}{3}$
- $T = D + t$

R43

Un « grenier rond ». Sa hauteur est de 6 coudées et son diamètre de 8 coudées. En « grains », que contient-il ?

Opère à partir de 8. Tu lui ajouteras son $\frac{1}{3}$. Il en résultera : $10 \frac{2}{3}$.

Multiplie $10 \frac{2}{3}$ par $10 \frac{2}{3}$.

Il en résultera $113 \frac{2}{3} \frac{1}{9}$.

Multiplie $113 \frac{2}{3} \frac{1}{9}$ par 4 qui est $\frac{2}{3}$ de 6 « coudées », la hauteur.

Il en résultera $455 \frac{1}{9}$.

C'est sa capacité en *khar*.

-
- $D = 8$
- $H = 6$

- $t = D \times \frac{1}{3}$
- $T = D + t$
- $B = T \times T$

R43

Un « grenier rond ». Sa hauteur est de 6 coudées et son diamètre de 8 coudées. En « grains », que contient-il ?

Opère à partir de 8. Tu lui ajouteras son $\frac{1}{3}$. Il en résultera : $10 \frac{2}{3}$.

Multiplie $10 \frac{2}{3}$ par $10 \frac{2}{3}$.

Il en résultera $113 \frac{2}{3} \frac{1}{9}$.

Multiplie $113 \frac{2}{3} \frac{1}{9}$ par 4 qui est $\frac{2}{3}$ de 6 « coudées », la hauteur.

Il en résultera $455 \frac{1}{9}$.

C'est sa capacité en *khar*.

-
- $D = 8$
- $H = 6$

- $d = D \times \frac{1}{3}$
- $T = D + d$
- $B = T \times T$
- $h = H \times \frac{2}{3}$

R43

Un « grenier rond ». Sa hauteur est de 6 coudées et son diamètre de 8 coudées. En « grains », que contient-il ?

Opère à partir de 8. Tu lui ajouteras son $\frac{1}{3}$. Il en résultera : $10 \frac{2}{3}$.

Multiplie $10 \frac{2}{3}$ par $10 \frac{2}{3}$.

Il en résultera $113 \frac{2}{3} \frac{1}{9}$.

Multiplie $113 \frac{2}{3} \frac{1}{9}$ par 4 qui est $\frac{2}{3}$ de 6 « coudées », la hauteur.

Il en résultera $455 \frac{1}{9}$.

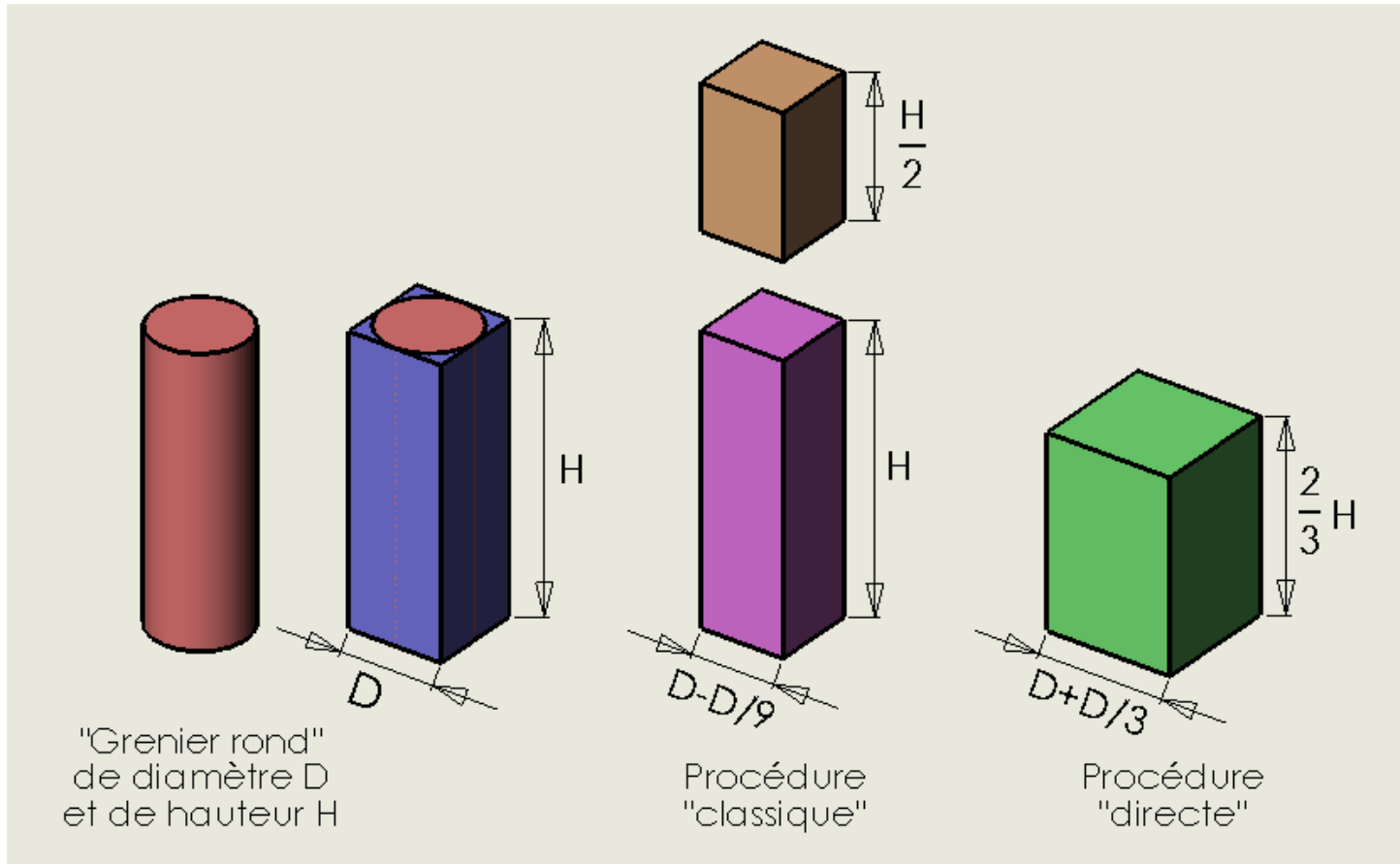
C'est sa capacité en *khar*.

-
- $D = 8$
- $H = 6$

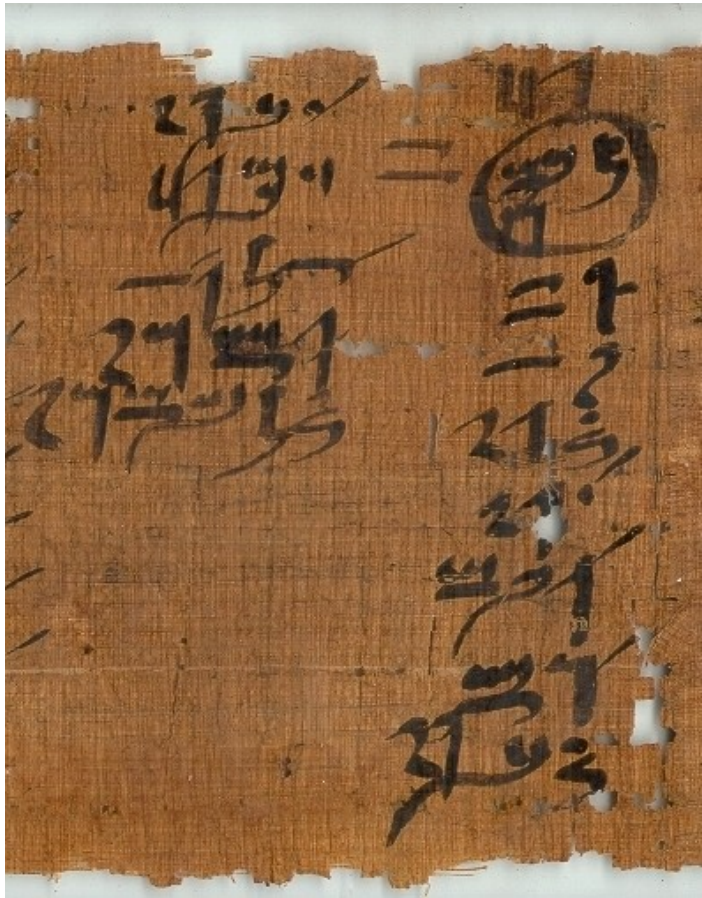
- $t = D \times \frac{1}{3}$
- $T = D + t$
- $B = T \times T$
- $h = H \times \frac{2}{3}$

- $V_k = B \times h$

Deux procédures



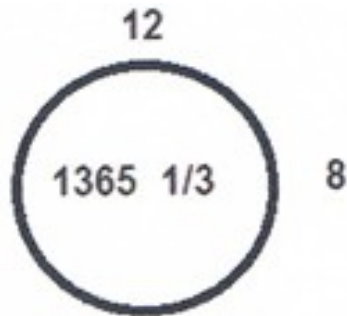
Fragment d'El-Lahoun UC 32160 = Kahun IV 3



	12		\ 1	256
	1365 1/3	8	2	512
			\ 4	1024
			2/3*1	<170 2/3>
2/3	8		< 1/3 >	85 1/3
1/3	4		total	1365 1/3
total	16			
\ 1	16			
\ 10	160			
\ 5	80			
total	256			

Fragments d'El-Lahoun

UC 32160 = Kahun IV 3



2/3	8
1/3	4
total	16
\ 1	16
\ 10	160
\ 5	80
total	256

\ 1	256
2	512
\ 4	1024
2/3*1	<170 2/3>
<\ 1/3>	85 1/3
total	1365 1/3

-
- $D = 12$
- $H = 8$
- $t = D \times \frac{1}{3}$
- $T = D + t$
- $B = T \times T$
- $h = H \times \frac{2}{3}$
- $V_k = B \times h$



Maquette de greniers cylindriques et détail du mesurage avec le boisseau-*héqat*

Le grenier provient du musée du pain de Ulm en Allemagne
La maquette provient du musée d'Hildesheim en Allemagne

Merci