Le volume et l'aire de la sphère

Fiche professeur

3e

Auteur : OSTENNE Emmanuel

But des activités : Établir la formule du volume d'une sphère à partir du volume d'un cylindre. Établir la formule de l'aire d'une sphère à partir de celle d'une pyramide.

Compétences engagées :

- ✔ Notion de volume et d'aire
- ✔ Notions de face, arête et sommet
- ✔ Représentation en perspective

Pré-requis :

- ✔ Formules d'aires usuelles : triangle, disque
- ✔ Formules de volumes usuels : cylindre, pyramide

Matériels utilisés :

- ✔ Salle de classe
- ✔ Tableau Numérique Interactif ou vidéoprojecteur.

Durée indicative : 2x1h (avec synthèse de cours, hors exercice)

Nom des logiciels utilisés :

- ✔ Navigateur internet :
  - support du Java
  - support de la vidéo en ligne si connecté.
- ✔ Lecteur video (VLC) si vidéo téléchargée au préalable.

Documents utiles à télécharger :

- ✔ éventuellement les vidéos ou animation Java si l'ordinateur n'est pas connecté à Internet.

Correspondance avec les instructions officielles :

- Programme de 3e : Géométrie :

« Les grands cercles de la sphère et les couples de points diamétralement opposés sont mis en évidence.Aucune difficulté n'est soulevée sur ces représentations. Le rapprochement est fait avec les connaissances que les élèves ont déjà de la sphère terrestre, notamment pour le repérage sur la sphère à l'aide des méridiens et des parallèles.»

- Programme de 3e : Grandeurs et mesures :

« Calculs d'aires et volumes.Calculer l'aire d'une sphère de rayon donné. Calculer le volume d'une boule de rayon donné. Dans le cadre du socle commun, les surfaces dont les aires sont à connaître sont celles du carré, du rectangle, du triangle, du disque et les solides dont les volumes sont à connaître sont le cube, le parallélépipède rectangle, le cylindre droit et la sphère. »

Organisation des séances :

1/ Volume d'une sphère :

- Projection directe du film « Deriving The Formula - Volume Of Sphere » :
  http://www.youtube.com/watch?v=aLyQddyY8ik
  C'est l'occasion de faire un peu d'anglais, assez basique.
- Analyse du scénario (étapes) : « Que venez-vous de voir ? » « Quelles sont les conditions expérimentales mises en évidence ? » « Quelles sont les limites d'une telle expérience ? ».
- Conclusion : « Le volume d'une sphère fait les deux tiers du volume du cylindre de même diamètre (rayon) de base et de même hauteur ».
- De cette égalité traduite littéralement on tire la formule du volume d'une sphère :

$$V_{sphère}=\frac{2}{3}V_{cylindre}$$

$$V_{sphère}=\frac{2}{3}B\times h$$ où B est l'aire de base du cylindre et h sa hauteur

$$V_{sphère}=\frac{2}{3}\times\pi r^2\times 2r$$ où r est le rayon de la sphère commun au rayon de base du cylindre

$$\boxed{V_{sphère}=\frac{4}{3}\pi r^3}$$

On fait ensuite la synthèse des différents volumes usuels et, en exercice, un calcul de volume de sphère ou boule.

La synthèse sur la sphère/la boule permet de définir ces 2 objets (distance au centre), et de voir le problème de la représentation en perspective : différentes images de sphère/boule sont affichées (recherche en ligne en direct) et commentaires.

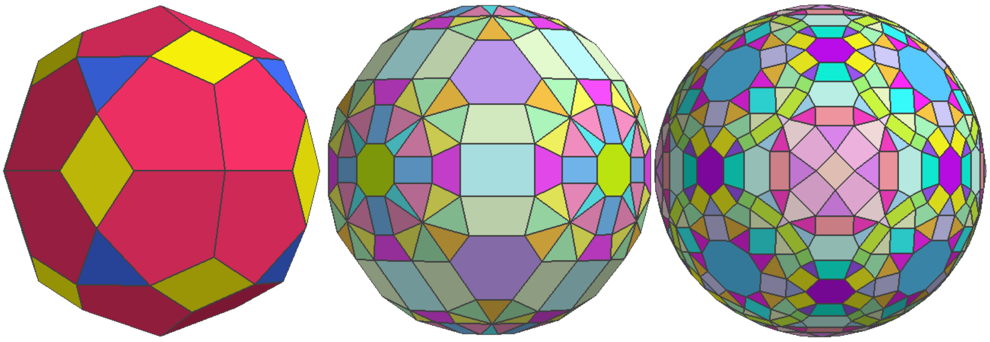
Le vocabulaire est largement vu en lien avec la géographie : méridien, longitude, grand cercle, petit cercle, cercle équatorial, pôle.

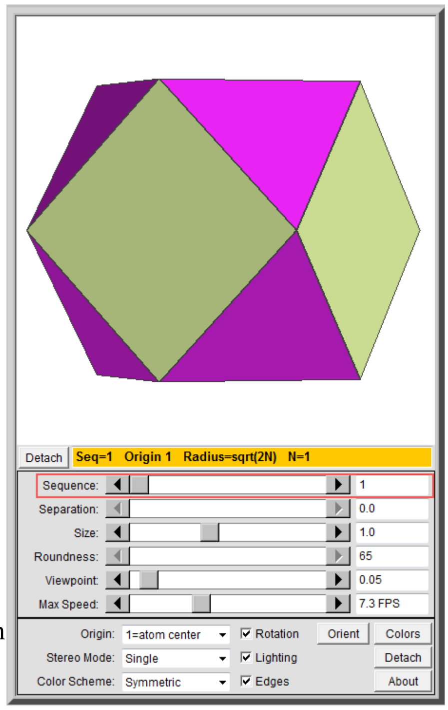
2/ Aire d'une sphère :

Voici une approche en 2 phases, la seconde permettant réellement de mettre en évidence la formule.

La 1ère phase permet de voir une représentation moins classique, mais jolie, pour montrer le passage polyèdre-sphère et discuter.

- Présentation de l'animation Java colorée des polyèdres de Waterman : http://dogfeathers.com/java/ccppoly.html



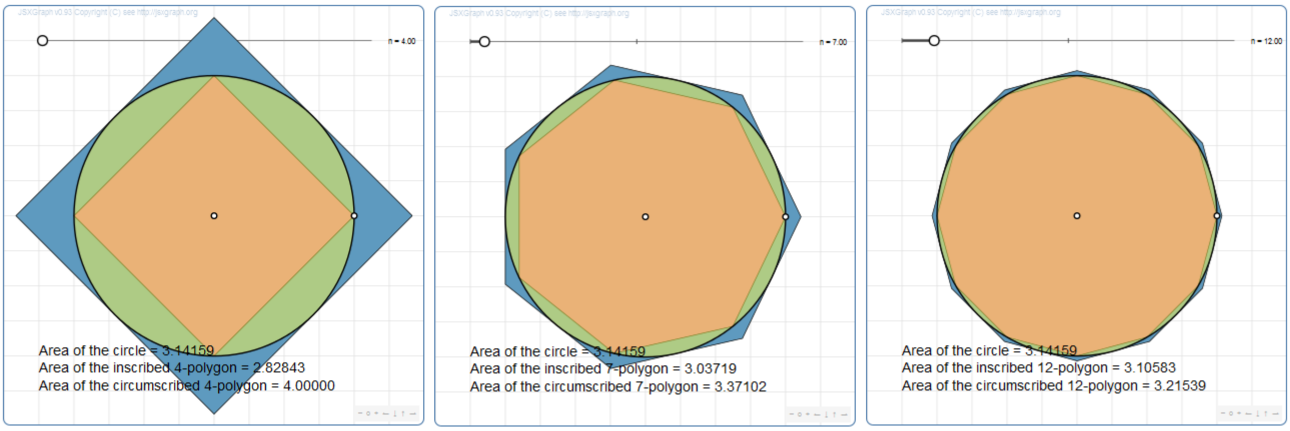


- La projection a été occultée temporairement (ou préparée dans un onglet séparé avant le début du cours) : le curseur Sequence est mis à 1 (voir ci-contre)
- Puis le professeur demande directement : «que voyez-vous ? »
- Au besoin on précise juste ce qu'est un polyèdre
- On augmente la valeur de Sequence et on demande aux élèves ce qu'ils voient (on peut faire bouger la représentation avec le crayon du TNI ou la souris)
- On bouge maintenant un peu plus, puis un peu plus : soit les élèves réagissent soit on leur pose toujours la question :
  on peut d'ailleurs analyser la représentation pour bien voir qu'il y a des faces plates
- Enfin on augmente considérablement Sequence pour voir apparaître une simulation de sphère par des polygones variés.

On peut alors discuter à nouveau sur les problèmes de représentation d'une sphère/boule et relier au problème de la représentation d'un cercle, notamment sur un écran d'ordinateur : la carte graphique simule un cercle avec un polygone ayant « beaucoup » de côté, de sorte qu'on a l'impression visuelle d'un cercle mais c'est en faire un polygone.

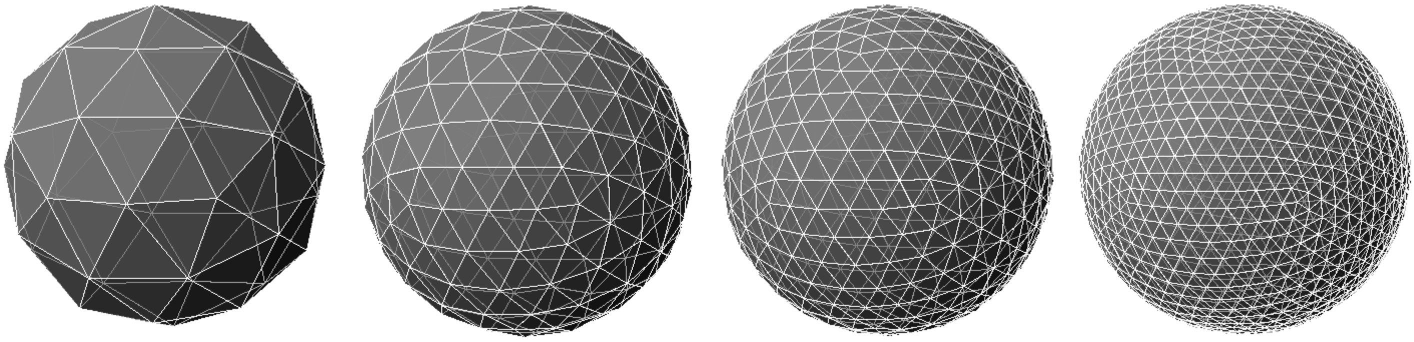
Pour en discuter et voir, cette animation peut être utile : http://jsxgraph.uni-bayreuth.de/wiki/index.php/Circle_approximation

En bougeant le curseur n on voit apparaître des polygones réguliers à n côtés inscrits et exinscrits à un cercle.



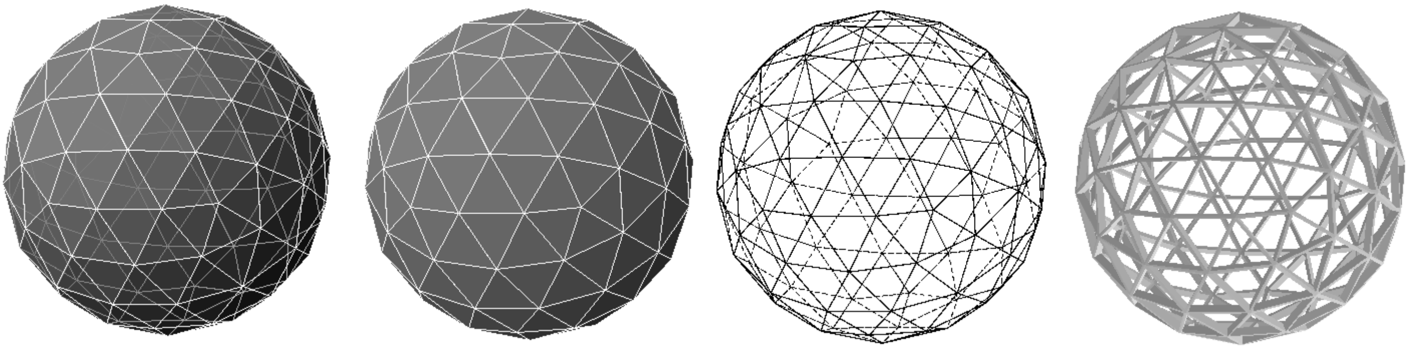
La seconde approche : avec des polyèdres plus réguliers, les géodes.

– Proposer l'animation Java en bas de la page http://rouxjeanbernard.ch/AM/html/amch104.html

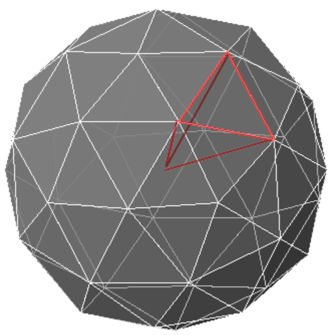
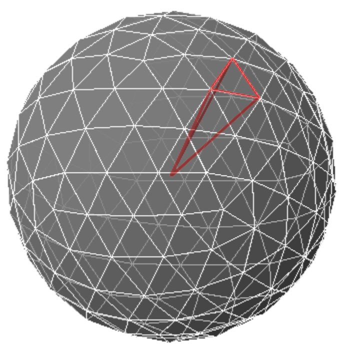


– La faire bouger en la lançant au crayon/souris
– Interroger les élèves sur les particularités de cette représentation : qu'est-ce ? Nature des faces ? …
– Changer Geode2 en Geode3 : que s'est-t-il passé ?
– Et ainsi de suite : les élèves doivent réagir et voir/dire qu'à partir de Geode6 on simule à nouveau une sphère.
Plus il y a de faces, plus la simulation est bonne « visuellement ». La limite est celle de la puissance de calcul de l'ordinateur (ici sur une machine peu puissante des saccades et des artéfacts de représentation peuvent apparaître!).

On peut aussi jouer sur les réglages de la 2ème liste : transparent, rempli, fil de fer, … pour voir d'autres représentation :



– De là il faut expliquer aux élèves pourquoi on s'intéresse aux géodes ? C'est parce qu'elles ont des régularités qui vont nous permettre de trouver la formule de l'aire d'une sphère !
Partant de la géode, on voit alors la boule (plus que la sphère) comme une série de pyramides de base un triangle isocèle toujours identique et dont le sommet est le centre de la boule :

	
Geode2	Geode4

– Le volume d'une géode est donc la somme des volumes de ces pyramides.
Elles sont donc identiques donc si il y en a n, on a :
$V_{géode} = n \times V_{pyramide}$ avec $V_{pyramide} = \frac{B \times h}{3}$ où B est l'aire d'un triangle isocèle et h la hauteur de cette pyramide.
Ce qui donne :
$V_{géode} = \frac{n \times B \times h}{3}$ où on peut remarquer que $n \times B$ est en fait l'aire de la surface de la géode

d'où $V_{géode} = \frac{A_{géode} \times h}{3}$

- Si on a une géode avec « beaucoup », « énormément » de faces,
  h se rapproche du rayon *r* de la sphère et $A_{géode}$ se rapproche de l'aire de la sphère de rayon *r* !
  De là on trouve que $V_{sphère} = \frac{A_{sphère} \times r}{3}$
- Mais on connaît la formule du volume de la sphère donc $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{A_{sphère} \times r}{3}$
  On peut simplifier un *r* et le 3, il reste $\boxed{A_{sphère} = 4\pi r^2}$ qui est la formule de l'aire d'une sphère de rayon *r*.

Les élèves remarquent alors (ou on les aides) que cette formule ressemble à la formule de l'aire d'un disque de rayon *r* : $A_{disque} = \pi r^2$. Non seulement les formules sont voisines, mais on en conclut que l'aire d'une sphère de rayon *r* est exactement 4 fois plus grande que l'aire de son disque équatorial, grand disque de rayon *r*.

Enfin, on peut terminer en rappelant les moyens mnémotechnique de retenir ces formules liées au cercle de rayon r :

Formule	Exposant de *r*	Unité de mesure
$P_{disque} = 2\pi r$	Rien (1)	m
$A_{disque} = \pi r^2$ et $A_{sphère} = 4\pi r^2$	2	m^2
$V_{sphère} = \frac{4}{3}\pi r^3$	3	m^3

Et une piste pour la présence du tiers :
avec les géodes on a vu que le volume de la sphère semble dériver aussi du volume de pyramides, dont la formule comporte aussi un tiers.