Algorithme de Babylone
Programmation avec Xcas

1^{re}

Fiche élève

Auteur : Pierre Lapôtre

I. Expérimentation

Étant donné un entier naturel a, on se propose d'évaluer $\sqrt{a}$ par des rationnels.
Pour cela, on part d'un entier naturel non nul u et on le remplace par $\frac{1}{2}\left(u+\frac{a}{u}\right)$. On répète ensuite 9 fois ce procédé, ce qui nous donne 10 valeurs successives de u. Cela se traduit par l'algorithme suivant :

- Étape 1 : choisir un entier naturel non nul u (ci-dessous, on a choisi $u = a + 1$).
- Étape 2 : remplacer u par $\frac{1}{2}\left(u+\frac{a}{u}\right)$.
- Étape 3 : retourner à l'étape 2 (9 fois de suite).
- Étape 4 : afficher les 10 valeurs successives de u.

Voici un programme Xcas décrivant cet algorithme.

```
bab(a):={
local j,u,L;
u:=a+1;
L:=NULL; // L sera la suite des valeurs de u
for(j:=1;j<=10;j++) {u:=(u+a/u)/2;L:=L,evalf(u);}
return L;
}
:;
```

On constatera la rapidité de convergence de u en calculant $\sqrt{2}$ à l'aide de la commande :
`bab(2)`

II. Problème

Soit a un réel strictement positif. On considère la suite réelle (u_n) définie par la donnée de u_0, strictement positif, et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$

1. **a** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\quad u_n > 0$.

   b Déterminer u_0 pour que (u_n) soit une suite constante.

2. Dans la suite du problème, on supposera que $u_0^2 \neq a$.

   a Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,
   $$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2 \text{ et } \quad u_{n+1} + \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n}(u_n + \sqrt{a})^2.$$

   b Démontrer que (u_n) est strictement décroissante pour $n \geqslant 1$. En déduire que (u_n) converge.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$.

   a Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, v_{n+1} en fonction de v_n.

   b Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, v_{n+1} en fonction de v_1 et de n.

   c En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Prolongement : avec $a = 2$ et $u_0 = 3$, montrer successivement que : $u_1 - \sqrt{2} < \frac{1}{2}$, $\; u_2 - \sqrt{2} < 10^{-1}$, $u_3 - \sqrt{2} < 10^{-2}$, $\; u_4 - \sqrt{2} < 10^{-4}$ ... ce qui permet d'apprécier la qualité de l'approximation.