Suite de Syracuse
Programmation avec Xcas

$1^{\text{ère}}$

Fiche professeur

Auteur : Pierre Lapôtre

But de l'activité : : Étudier la conjecture de Syracuse (arithmétique). Programmation avec Xcas donnant la liste des termes de la suite de Syracuse associée à un entier non nul. Activité de familiarisation avec Xcas. L'algorithme est fourni. L'activité se termine par une question qui demande un peu d'astuce.

Compétences engagées :

✓ Entrées et sorties d'un algorithme.
✓ Boucle « tant que » et instruction conditionnelle « si ... sinon ».

Pré-requis :

✓ Aucun pré-requis en arithmétique.
✓ Initiation à Xcas.

Matériels utilisés :
✓ Ordinateur muni de Xcas.
✓ L'activité peut aussi se programmer sur calculatrice ou avec un autre logiciel.

Durée indicative : 1 heure

Noms des logiciels utilisés : Xcas (téléchargeable librement).

Documents utiles à télécharger : Fiche élève au format pdf.

Déroulement de la séance : Suivre la fiche élève. Certains élèves à l'aise avec Xcas pourraient peut-être programmer l'algorithme de Syracuse au lieu de le recopier. Le recopier permet au contraire de progresser dans l'utilisation de Xcas.

Commentaires : Cette activité a deux buts : promouvoir Xcas que nous apprécions (mais qui peut être remplacé par tout autre logiciel ou calculatrice) et familiariser les élèves à ce logiciel à partir d'une activité agréable.

Les élèves se demanderont sans doute qui a bien pû énoncer cette conjecture et à quoi cela peut bien servir. Elle a été énoncée par le mathématicien allemand Collatz en 1937 et démontrer cette conjecture (ou l'infirmer) est une idée très excitante. Ceci dit, cela ne servirait strictement à rien.

Il y a en arithmétique un certain nombre de conjectures célèbres compréhensibles par tout un chacun comme le théorème de Fermat, à savoir :

il n'existe pas d'entiers non nuls x, y et z tels que $x^n + y^n = z^n$, dès que l'entier n est ≥ 3.

C'était sans doute la plus célèbre conjecture mathématique. Elle a été démontrée en 1994 par le mathématicien anglais Andrew Wiles. Du coup, elle est devenue le théroème de Fermat-Wiles. En effet, quand une conjecture est démontrée, elle devient un théorème ; si au contraire elle est infirmée, on la jette aux oubliettes. Après cette activité, les élèves devraient faire la différence entre conjecture et théorème !

La conjecture de Syracuse est parfois présentée de manière un peu différente. Si, ayant obtenu 1, on continue en appliquant de nouveau l'étape 3 de l'algorithme, on obtient indéfiniment 1, 4, 2, 1, 4, 2. On travaille alors avec de vraies suites au sens mathématique (suites infinies) et la conjecture de Syracuse s'énonce alors comme suit : toute suite de Syracuse devient périodique de période 3 égale à 1, 4, 2. La présentation choisie est préférable en algorithmique.

Solution de la question : Si l'on part de $n = 2^p$, $p \geq 1$, le premier terme du vol sera 2^{p-1}, ce qui prouve qu'il y a des vols dont l'altitude maximale est aussi grande que l'on veut. Cela prouve aussi que la durée du vol de $n = 2^p$ est la durée du vol de $n = 2^{p-1}$ plus 1. On en déduit la durée du vol de $n = 2^p$, à savoir p. Il y a donc des vols de durée aussi grande que l'on veut.