CONSTRUCTION DU PETIT DODÉCAÈDRE ÉTOILÉ

Ce travail réalisé en sixième propose à partir de pentagones réguliers de construire un solide complexe : le petit dodécaèdre étoilé de Kepler. Pour plus d'informations, le lecteur pourra se reporter à la brochure : Le pentagone dans tous ses états, ou à l'article : Du pentagone au dodécaèdre étoilé, disponibles dans la partie publications du site. L'activité peut aussi être utilisée en quatrième lorsqu'on aborde les pyramides. On peut aussi justifier, en troisième, que le pentagone ABCDE est régulier.

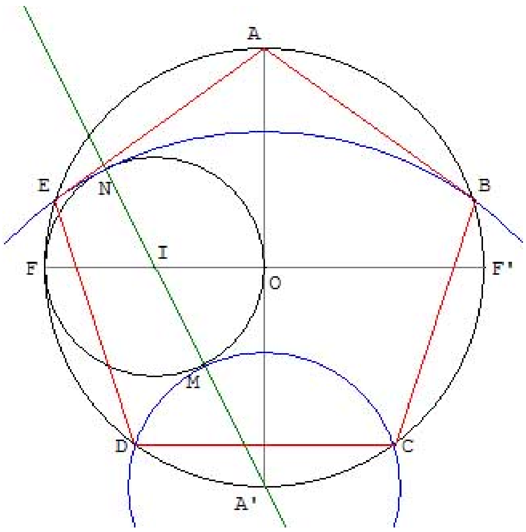
Durée de l'activité : 2 heures.

Matériel nécessaire : Pour chaque élève, une feuille blanche (160g de préférence), le matériel de dessin, des ciseaux et de la colle (liquide de préférence).

Points du programme abordés : Reproduire une figure plane à partir de données graphiques et numériques ; utiliser le vocabulaire relatif à la géométrie élémentaire ; reconnaître des figures dans un environnement complexe ; construction de solides.

1. Construction du pentagone convexe régulier :

Reproduire la figure suivante en prenant pour rayon $OA = 10$ cm.



Dans un premier temps, les élèves sont livrés à eux-mêmes, ils doivent deviner l'ordre logique de la construction.

Une mise en commun est ensuite nécessaire, on exploite les différentes erreurs rencontrées pour établir un ordre de construction correct. A l'issue de cette phase, les élèves recommencent la construction proprement sur la feuille cartonnée.

Enfin, on demande à chaque élève de rédiger le programme de construction de la figure. C'est l'occasion de travailler sur le vocabulaire relatif à la géométrie élémentaire et sur les intersections de ces différents éléments.

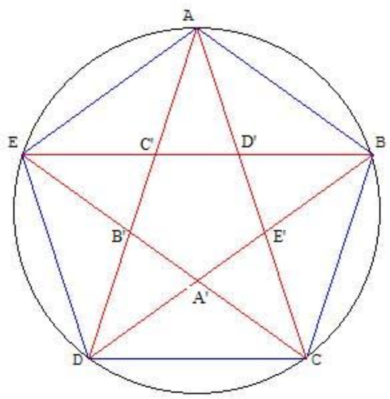
Exemple de programme de construction :

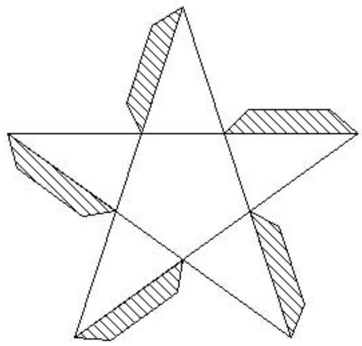
Dans un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 1, tracer deux diamètres perpendiculaires [AA'] et [FF']. On note I le milieu du segment [OF] et soit $(\mathcal{C}')$ le cercle de centre I passant par O. La droite (A'I) coupe $(\mathcal{C}')$ en M et N, et les cercles de centre A' passant par M et N recoupent le cercle $(\mathcal{C})$ en B, C, D et E. Tracer les segments [AB], [BC], [CD], [DE] et [EA].

2. Construction du petit dodécaèdre étoilé :

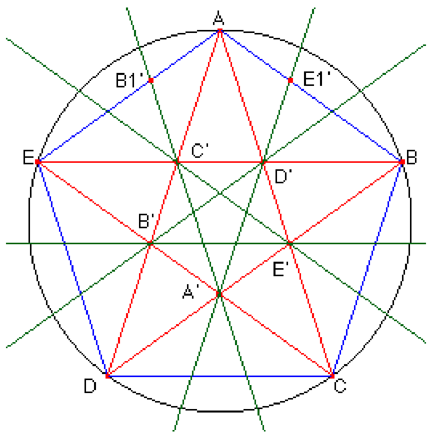
A partir de la construction précédente, on extrait les deux configurations suivantes :

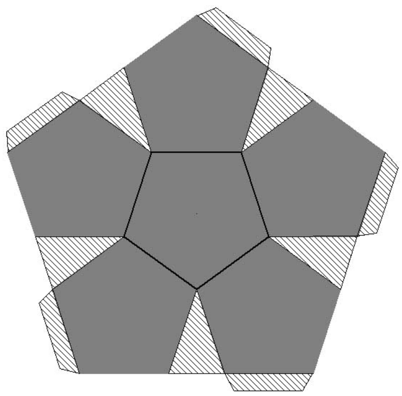
(1) **Le pentagone étoilé régulier :** il suffit de tracer les segments [AD], [BD], [BE], [EC] et [CA]. Chaque étoile est le patron d'une pyramide régulière à base pentagonale (il en faut douze). Il ne faut pas oublier d'ajouter les languettes sur les branches.



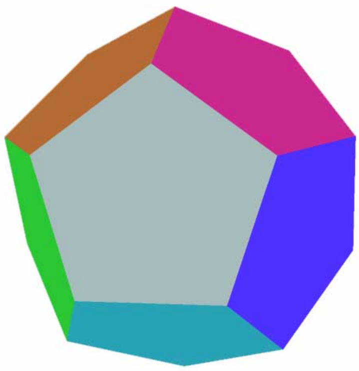


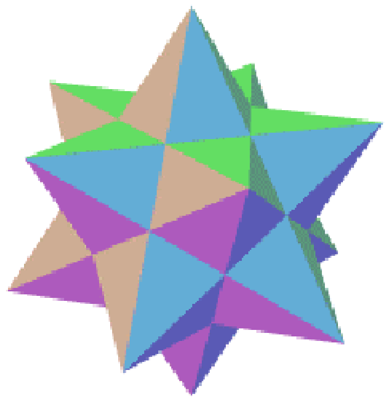
(2) **Les six pentagones convexes :** on commence par construire un pentagone étoilé puis on trace les droites (A'C'), (C'E'), (E'B'), (B'D') et (D'A'). On obtient ainsi douze pentagones réguliers superposables (il faut réaliser deux fois cette construction).





Les deux configurations des six pentagones seront pliées et assemblées de façon à obtenir un dodécaèdre régulier convexe. On colle ensuite les douze pyramides à base pentagonale sur chacune des faces du dodécaèdre (elles coïncident parfaitement) afin d'obtenir le petit dodécaèdre étoilé de Kepler.





3. Complément : démontrer que le pentagone ABCDE est régulier :

(1) En utilisant le triangle IOA', calculer la longueur A'I.
(2) Justifier que $A'D = A'M = A'I - IM$. En déduire la longueur de A'D.
(3) Démontrer que le triangle A'DA est rectangle en D et calculer l'angle $\widehat{DA'A}$
(4) Calculer l'angle $\widehat{A'OD}$.
(5) Justifier que C est le symétrique de D dans la symétrie d'axe (AA'). En déduire la mesure de l'angle $\widehat{DOC}$.
(6) Justifier que $A'N = A'I + IN$ et en déduire la longueur de A'E.
(7) Justifier que le triangle A'EA est rectangle en E et calculer l'angle $\widehat{EA'A}$.
(8) Calculer l'angle $\widehat{EOA}$.
(9) Quel est le symétrique de E dans la symétrie d'axe (AA') ? En déduire la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$
(10) Calculer $\widehat{EOD}$ et déduire $\widehat{COB}$
(11) Que peut-on dire du pentagone ABCDE ?