## Commentaires sur la formule des 5 niveaux

La formule des 5 niveaux est l'une des nombreuses formules censées donner en peu de calcul une valeur si possible bien approchée de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ d'une fonction continue $f$ sur un intervalle $[0,1]$. Pour mieux comprendre pourquoi cette méthode a été introduite, il faut d'abord remarquer que la formule des 5 niveaux :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{90}(7\cdot f(0) + 32\cdot f(\frac{1}{4}) + 12\cdot f(\frac{1}{2}) + 32\cdot f(\frac{3}{4}) + 7\cdot f(1))$$

donnant un résultat exact lorsque $f$ est l'un des polynômes $p_0$, $p_1$, $p_2$, $p_3$, $p_4$ donne aussi un résultat exact lorsque $f$ est un polynôme de degré $\leq 4$. On peut alors penser que si une fonction $f$ prend aux points $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ les mêmes valeurs qu'un polynôme $p$ de degré $\leq 4$, ce polynôme ressemblera suffisamment à la fonction $f$ pour que leurs intégrales sur l'intervalle $[0,1]$ prennent des valeurs voisines. Par conséquent, on aura

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &\approx \int_0^1 p(x)\,dx \\ &= \frac{1}{90}(7\cdot p(0) + 32\cdot p(\frac{1}{4}) + 12\cdot p(\frac{1}{2}) + 32\cdot p(\frac{3}{4}) + 7\cdot p(1)) \\ &= \frac{1}{90}(7\cdot f(0) + 32\cdot f(\frac{1}{4}) + 12\cdot f(\frac{1}{2}) + 32\cdot f(\frac{3}{4}) + 7\cdot f(1)),\end{aligned}$$

ce qui donne finalement la formule d'approximation des 5 niveaux :

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{90}(7\cdot f(0) + 32\cdot f(\frac{1}{4}) + 12\cdot f(\frac{1}{2}) + 32\cdot f(\frac{3}{4}) + 7\cdot f(1))$$

que l'on peut donc appliquer sans calculer le polynôme $p$ qui est apparu dans le raisonnement heuristique précédent.

**Commentaires** Dire que tel nombre est une approximation de tel autre n'a aucune valeur si l'on n'est pas capable de majorer l'erreur que l'on fait en utilisant cette approximation. Nous ne voulons pas développer ce point de vue qui demanderait des connaissances de mathématiques hors programme. Mais on peut remarquer que si 2 fonctions $f$ et $g$ continues sur l'intervalle $[0,1]$ ont les mêmes valeurs aux points $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$, la formule des 5 niveaux va donner la même valeur approchée aux intégrales $\int_0^1 f(x)\,dx$ et $\int_0^1 g(x)\,dx$ alors que leurs valeurs exactes peuvent être très différentes. Par exemple si $f$ est la fonction identiquement nulle sur $[0,1]$ et si $g$ est la fonction

$$x \mapsto g(x) = x^2\cdot (x-\frac{1}{4})^2\cdot (x-\frac{1}{2})^2\cdot (x-\frac{3}{4})^2\cdot (x-1)^2 \tag{1}$$

(polynôme de degré 10), la formule d'approximation des 5 niveaux donne :

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 g(x)\,dx \approx 0.$$

Or $\int_0^1 g(x)\,dx$ est un nombre $\alpha > 0$ qu'il n'est pas utile de calculer et qui est l'erreur d'approximation quand on calcule $\int_0^1 g(x)\,dx$ par la formule des 5 niveaux. Si on multiplie la fonction $g$ par $10^n$ par exemple, l'erreur d'approximation sera $10^n\cdot\alpha$. On voit donc que l'erreur d'approximation peut être aussi grande que l'on veut : il suffit de bien choisir la fonction intégrée.

En conclusion, la formule des 5 niveaux doit être impérativement accompagnée d'une majoration de l'erreur d'approximation, même si le cas proposé, à savoir l'intégrale de la fonction $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$ sur $[0,1]$, marche remarquablement bien. L'erreur d'approximation ne sera raisonnablement contrôlée qu'en imposant des conditions aux fonctions que l'on intègre. La formule des 9 niveaux semble donner plus de garanties (par exemple, elle donne un résultat exact quand $f$ est un polynôme de degré $\leq 8$, ce qui est mieux que la formule des 5 niveaux, mais elle donne la même valeur approchée à l'intégrale de la fonction $g$ définie par (1) !). On peut en effet lui opposer les mêmes objections qu'à la formule des 5 niveaux, pour la même raison de fond : elle ne tient compte que des valeurs de la fonction intégrée aux points

$$0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1$$

et comme entre 2 points même rapprochés, une fonction continue peut faire n'importe quoi (l'expérience montre que cela échappe à notre imagination), on trouvera toujours des cas catastrophiques pour la formule d'approximation !