2. Probabilités

2.1. Un peu d'histoire

Pierre de **Fermat**
(Beaumont-de-Lomagne, 17/8/1601 - Castres, 12/1/1665)

Jacques **Bernoulli**
(Bâle, 27/12/1654 - Bâle, 16/8/1705)

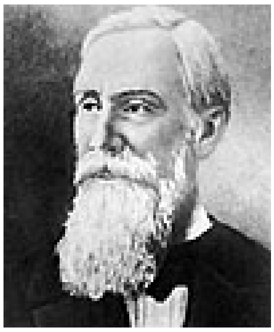
Pierre-Simon **Laplace**
(Beaumont-en-Auge, 23/3/1749 - Paris, 5/3/1827)

Les premiers écrits sur les probabilités sont l'œuvre de Jérôme **Cardan** (1501-1576), qu'un de ses biographes a surnommé « le joueur savant ». Un problème qui intéressait **Cardan** était le suivant : comment doit-on répartir les mises d'un jeu de dés si le jeu venait à être interrompu ? La même question fut posée en 1654 à Blaise **Pascal** par son ami le **Chevalier de Méré**, qui était un joueur impénitent. Un joueur parie qu'il tirera un as en huit coups de dés, mais la police interrompt le jeu après le troisième coup. Les assistants protestent, mais comment doit-on répartir les mises ? Cette question fut à l'origine d'une correspondance entre **Pascal** et **Fermat**, et leurs réflexions furent publiées en 1657 dans *Tractatus de ratiociniis in aleae ludo* (Traité sur les raisonnements dans le jeu de dés). L'auteur est le néerlandais Christiaan **Huygens**, plus connu pour ses travaux en astronomie et en physique. C'est donc à partir de problèmes posés par les jeux de hasard que se définirent les concepts et les premières approches de cette nouvelle branche des mathématiques.

On avait observé que, lorsque l'on répétait de nombreuses fois la même expérience, les fréquences tendaient à se stabiliser. On savait de plus que ces fréquences se stabilisaient autour des probabilités, lorsque celles-ci étaient connues. Ainsi, dans le cas d'un dé, au bout d'un grand nombre de tirages, chaque face était obtenue environ une fois sur six. Cette observation empirique pouvait-elle recevoir un fondement théorique ? Le premier à se poser la question est le bâlois Jacques **Bernoulli**, fils de Nicolas Bernoulli, premier membre d'une longue dynastie de mathématiciens, dont les plus célèbres sont Jacques, Jean (son frère) et Daniel (le fils de Jean). Jacques Bernoulli a écrit *Ars Conjectandi*, qui ne sera publié qu'après sa mort en 1713 par son neveu Daniel.

Au 19$^{\text{ème}}$ siècle, la croissance rapide des sciences rendit nécessaire l'extension de la théorie des probabilités au-delà des jeux de hasard. Elle devint très utilisée en économie et dans le domaine des assurances.

Pour faire de la théorie des probabilités une discipline à part entière, il ne manquait finalement plus qu'une chose : une définition précise de son objet, la probabilité.



Pafnouti Lvovitch **Tchebychev**
(Okatovo, 16/5/1821 - St-Pétersbourg, 8/12/1894)

Andrei Andreeivich **Markov**
(Ryazan, 14/6/1856 - St-Pétersbourg, 20/7/1922)

Andrei Nikolaevich **Kolmogorov**
(Tambov, 25/4/1903 - Moscou, 20/10/1987)

C'est **Laplace** qui s'en charge dans son ouvrage *Théorie analytique des probabilités*, paru en 1812 : « La probabilité est une fraction dont le numérateur est le nombre de cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles. »

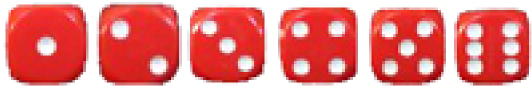
D'autres noms importants dans le domaine des probabilités sont Abraham **de Moivre** (1667-1754), Carl Friedrich **Gauss** (1777-1855), Denis **Poisson** (1781-1840), Pafnouti Lvovitch **Tchebychev** (1821-1894), Andrei Andreeivich **Markov** (1856-1922) et Andrei Nikolaevich **Kolmogorov** (1903-1987).

2.2. Univers, issues et événements

Une expérience aléatoire, comme celle consistant à jeter un dé, est appelée une **épreuve.**

Une **issue** est aussi appelée événement élémentaire.

Supposons que l'on jette un dé. Lorsqu'il s'immobilisera, il indiquera l'une des six **issues** suivantes : 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Les statisticiens appellent l'ensemble

$\Omega = \{$  $\}$

l'**univers des résultats**.

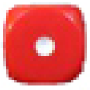
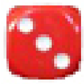
Plus formel

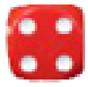
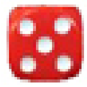
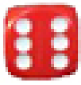
Soit Ω un univers comportant un nombre fini d'issues possibles.

$$\Omega = \{i_1, i_2, i_3, ..., i_n\}.$$

Les événements $I_1 = \{i_1\}$, $I_2 = \{i_2\}$, ... $I_n = \{i_n\}$ sont appelés **événements élémentaires**.

Exemple du dé

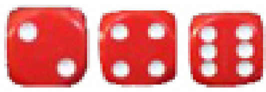
$I_1 = \{$  $\}$, $I_2 = \{$  $\}$, $I_3 = \{$  $\}$,

$I_4 = \{$  $\}$, $I_5 = \{$  $\}$, $I_6 = \{$  $\}$.

Événements

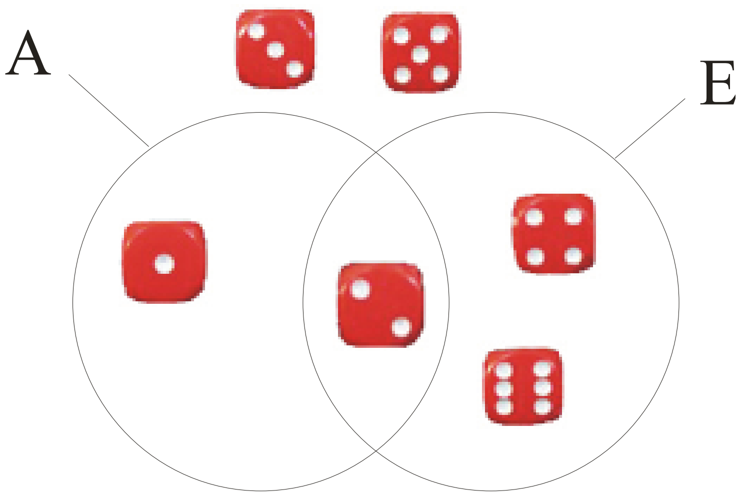
On appelle **événement** tout sous-ensemble de Ω, ou, ce qui revient au même, un ensemble d'événements élémentaires.

Ainsi, l'événement « le résultat d'un lancer de dé est un nombre pair » est identifié par le sous-ensemble

$E = \{$  $\}$

Opérations sur les événements

Les opérations sur les événements sont les opérations classiques sur les ensembles.
Soit l'événement « le résultat du lancer est plus petit que 3 » identifié par l'ensemble $A = \{1, 2\}$ et l'événement $E = \{2, 4, 6\}$.



Si l'intersection de deux événements E et F est vide ($E \cap F = \varnothing$), on dit que ces deux événements sont **incompatibles**.
Deux événements élémentaires sont bien évidemment incompatibles.

Intersection

$A \cap E$ représente l'événement « le résultat du lancer est un chiffre pair **et** plus petit que 3 », donc $B = A \cap E = \{2\}$.

Union

$A \cup E$ représente l'événement « le résultat du lancer est un chiffre pair **ou** un chiffre plus petit que 3 », donc $C = A \cup E = \{1, 2, 4, 6\}$.

Complémentaire

L'événement complémentaire de E, que l'on note $\overline{E}$ (on prononce « **non** E »), correspond à l'événement « le résultat du lancer est un nombre impair ». On a donc $\overline{E} = \{1, 3, 5\}$.

Exercice 2.1

On lance deux fois une pièce de monnaie. On écrit *p* si la pièce montre pile et *f* si elle montre face. Écrivez l'ensemble Ω.

Exercice 2.2

Une urne contient quatre boules numérotées 1, 2, 3 et 4.
On tire successivement deux boules de l'urne, sans remettre la première boule tirée avant le tirage de la seconde. Écrivez l'ensemble Ω.

Exercice 2.3

Quatre chevaux avec les dossards numérotés de 1 à 4 font une course. Écrivez l'ensemble Ω des tiercés possibles.

2.3. Premiers pas en probabilités

Considérons une expérience dont l'univers est Ω. Nous voulons assigner à chaque issue I un **nombre** $P(I)$ qui indiquera sa **probabilité**.

La probabilité d'une issue I est un nombre réel compris entre 0 et 1 :

$$0 \leq P(I) \leq 1$$

0 indiquera que l'issue est **impossible** et **1** qu'elle est **certaine**.

Par exemple, si on lance un dé non pipé, chaque face aura une probabilité égale de sortir (1 chance sur 6). On peut donc dire que la probabilité d'une face est de 1/6.

De plus, quand on lance un dé, on est sûr qu'il indiquera un chiffre de 1 à 6. On doit donc avoir $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$, ce qui est bien le cas.

Attention ! Cette propriété n'est toujours vraie que pour des événements élémentaires.

Donc, en généralisant :

$$P(I_1) + P(I_2) + \ldots + P(I_n) = P(\Omega) = 1$$

Événements élémentaires équiprobables

On vient de voir ce qui se passait avec un dé non pipé. Les événements {1}, {2}, {3}, {4}, {5} et {6} sont ce qu'on appelle des **événements élémentaires équiprobables** (ils ont tous la même probabilité).

Ce théorème est la version moderne de la définition qu'avait donnée *Laplace* en 1812 (voir introduction).

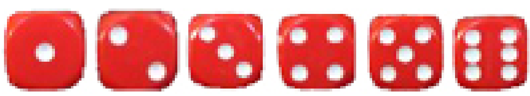
Soit Ω un univers comportant n événements élémentaires **équiprobables**. Si A est un événement de Ω formé de la réunion de k événements élémentaires, alors $P(A) = \frac{k}{n}$.

Autre formulation

« La probabilité est le nombre de cas favorables divisé par le nombre de cas possibles » (si tous les cas sont équiprobables).

Le seul moyen de vérifier qu'un dé n'est pas pipé, c'est de le lancer un grand nombre de fois, par exemple 6000 fois. On devrait alors en principe obtenir environ 1000 fois chacune des faces. Plus on lancera le dé, plus les fréquences observées seront proches des probabilités théoriques. C'est la **loi forte des grands nombres.**

Si on utilise un dé pipé, les issues ne sont plus équiprobables et le théorème ci-dessus n'est plus vrai ; on peut choisir par exemple un dé dont les faces ont les probabilités d'apparition suivantes :

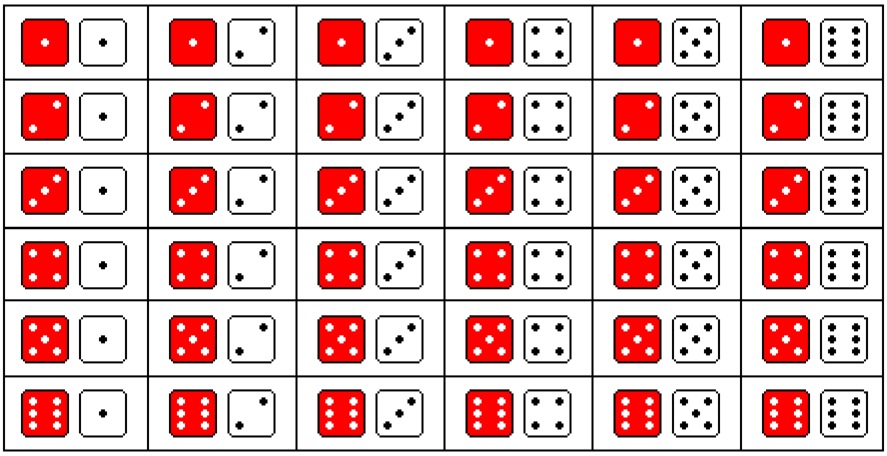


0.25 0.15 0.15 0.15 0.15 0.15

On peut vérifier que la somme des probabilités donne bien 1.

Exemple

On lance deux dés, un rouge et un blanc. Il y a 36 événements élémentaires possibles équiprobables. Chaque paire aura donc une probabilité d'apparition de 1/36 (1 cas favorable sur 36 possibles).
On notera chaque issue par la paire (r ; b) où r indiquera le résultat du dé rouge et b celui du dé blanc.



Description de l'événement	**Événement**	**Probabilité**
A : la somme des deux dés est 3	$A = \{(1; 2), (2; 1)\}$	$P(A)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$
B : la somme des deux dés est 6	$B = \{(1; 5), (2; 4), (3; 3), (4; 2), (5; 1)\}$	$P(B)=\frac{5}{36}$
C : le dé rouge montre un 1	$C = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6)\}$	$P(C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
D : la somme des dés est inférieure à 7 et est un nombre premier	$D = \{(1; 1), (1; 2), (1; 4), (2; 1), (2; 3), (3; 2), (4; 1)\}$	$P(D)=\frac{7}{36}$

Théorème 2.1

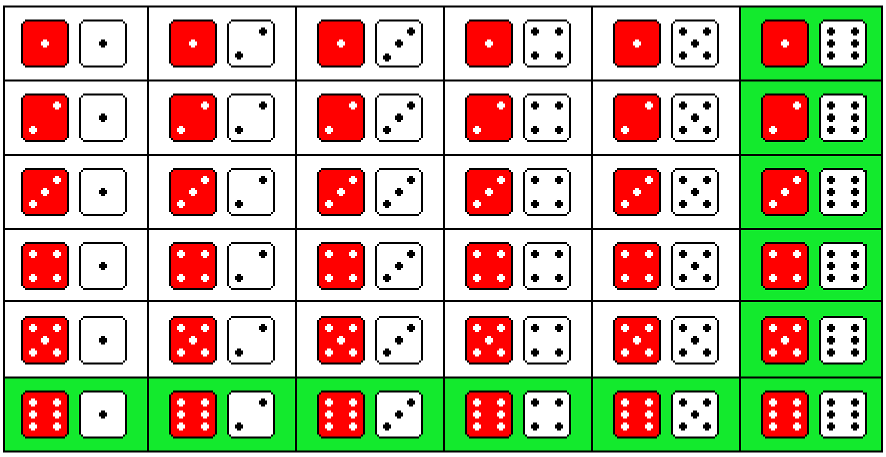
Reprenons l'exemple des deux dés. Soit E l'événement « le dé rouge montre un 6 » et F l'événement « le dé blanc montre un 6 ».

$E \cup F$: « le dé rouge **ou** le dé blanc montre un 6 ».

$E \cap F$: « le dé rouge **et** le dé blanc montrent un 6 ».

$P(E \cup F) =$
$\frac{6}{36}+\frac{6}{36}-\frac{1}{36}=\frac{11}{36}$

En comptant les paires vertes, on voit qu'il y en a bien 11 sur 36.



$E \cup F$ est toute la partie verte.
$E \cap F$ est l'intersection de la bande verticale et de la bande horizontale.
Cela illustre le théorème 2.1 :

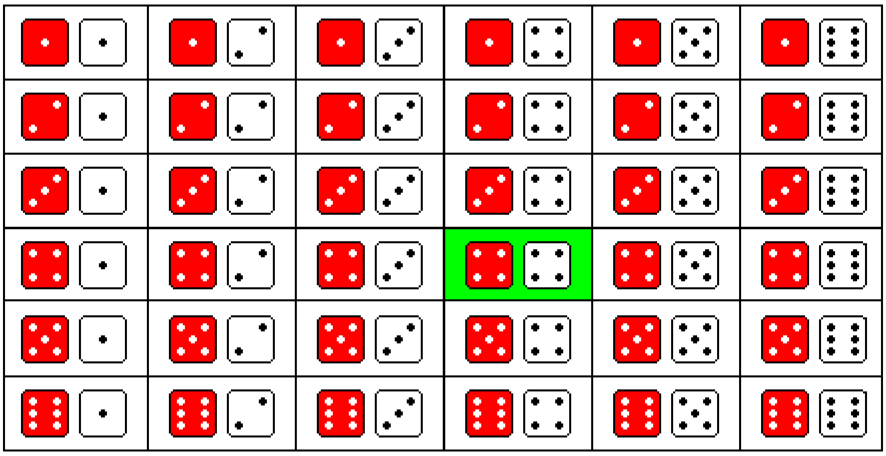
$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

Lorsque les deux événements sont **incompatibles**, le théorème 2.1 se simplifie et devient :

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F), \quad \text{car } E \cap F = \varnothing.$$

Théorème 2.2

Soit l'événement E « les deux dés montrent un 4 ». L'événement $\overline{E}$ est « au moins un des deux dés ne montre pas un 4 ».



$P(E)=\frac{1}{36}$

$P(\overline{E})=1-\frac{1}{36}=\frac{35}{36}$

On vérifie immédiatement sur le dessin que

$$P(\overline{E})=1-P(E)$$

On peut commenter ce théorème comme suit : la probabilité qu'un événement ne survienne pas est 1 moins la probabilité qu'il survienne. Par exemple, si la probabilité de toucher une cible est 0.23, la probabilité de rater la cible est 0.77.

Exercice 2.4

Dans un canton, il y a 40'000 voitures dotées de plaques numérotées de 1 à 40'000. En n'observant que les voitures de ce canton, quelle probabilité a-t-on de voir une voiture dont le numéro de plaque commence par 1 ?

Exercice 2.5

On lance deux dés. Quelle probabilité a-t-on d'obtenir…

a. un 3 et un 5 ? **b.** deux 3 ?
c. deux chiffres identiques ? **d.** un total de 8 ?

Exercice 2.6

On propose à Pierre de lancer simultanément trois pièces de monnaie parfaitement équilibrées de 10, 20 et 50 centimes respectivement. Il pourra conserver les pièces qui présentent le côté pile.

a. Décrivez l'univers.

Quelle probabilité a-t-il de gagner…

b. 20 centimes ? **c.** moins de 50 centimes ? **d.** plus de 20 centimes ?

Exercice 2.7

Un tétraèdre pipé vous sert de dé. Les faces sont numérotées de 1 à 4. Après le jet, la face gagnante est celle qui repose contre le sol.
La probabilité de gain est proportionnelle au numéro inscrit sur la face : par exemple, la face numéro 4 a une probabilité de sortie 4 fois plus élevée que la face numéro 1.
Quelle est la probabilité de sortie de la face numéro 3 ?

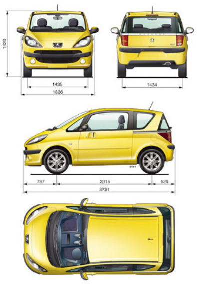
Exercice 2.8

On jette deux dés. Quelle est la probabilité que la somme des points soit i ? Faites les calculs pour $i = 2, 3, ..., 12$. Dessinez un histogramme.

Exercice 2.9

Deux boules sont tirées d'une urne contenant 6 boules blanches et 5 noires. Quelle est la probabilité qu'une des boules tirées soit blanche et l'autre noire ?

Exercice 2.10



Dans une enquête portant sur les pannes de voitures qui se sont produites au cours d'une année, on a pris en considération, pour un type de voiture déterminé, les possibilités suivantes :

P_0 : il n'y a pas eu de panne ;
P_1 : il y a eu une panne ;
P_2 : il y a eu deux pannes ;
P_3 : il y a eu plus de deux pannes.

Le dépouillement de l'enquête a montré que ces possibilités se sont produites respectivement 233, 310, 156 et 81 fois. Quelle probabilité y a-t-il, pour un possesseur d'une voiture de ce type, de tomber en panne dans l'année qui vient...

a. au moins une fois ?
b. moins de deux fois ?

Exercice 2.11

On tire d'un paquet de 52 cartes deux cartes au hasard. Quelle est la probabilité qu'elles forment un black jack, ou, autrement dit, que l'une soit un as et l'autre un dix, un valet, une dame ou un roi ?

Indication : utilisez les combinaisons.

Exercice 2.12

On admet que les C_5^{52} mains possibles au poker fermé sont équiprobables.
Quelle est la probabilité de recevoir...

a. une quinte royale (10, V, D, R, 1 de la même couleur) ?
b. une quinte flush (5 cartes consécutives de la même couleur, mais pas une quinte royale) ?
c. un carré (p. ex. D ♠, D ♣, D ♦, D ♥, 2 ♠) ?
d. un full, i.e. brelan + paire (p. ex. V ♠, V ♣, V ♦, 4 ♦, 4 ♥) ?
e. un flush (p. ex. 2 ♥, 3 ♥, 4 ♥, 9 ♥, V ♥) ?
f. une quinte (p. ex. 2 ♥, 3 ♣, 4 ♣, 5 ♦, 6 ♠) ?
g. un brelan (p. ex. 1 ♠, 1 ♣, 1 ♦, 5 ♦, 8 ♠) ?
h. deux paires (p. ex. 6 ♠, 6 ♣, 9 ♦, 9 ♠, 10 ♦) ?
i. une paire (p. ex. R ♠, R ♣, 7 ♦, 3 ♦, 2 ♠) ?

Exercice 2.13

a. Si n personnes sont présentes dans une pièce, quelle est la probabilité que leurs anniversaires tombent tous sur des jours différents ?
b. Quelle valeur faut-il donner à n pour que cette probabilité tombe en dessous de 1/2 ?

Pour simplifier, on exclura les gens nés le 29 février.

Indication
Commencez par calculer la probabilité de non-coïncidence pour n = 2, 3 et 4. Donnez ensuite la formule générale.

Exercice 2.14

Trois frères possèdent chacun trois chapeaux identiques, soit, au total, neuf chapeaux identiques, à part les initiales de chaque propriétaire, invisibles de l'extérieur.
Ces neuf chapeaux sont accrochés les uns à côté des autres. Un jour, les trois frères prennent chacun un chapeau au hasard.

Quelle est la probabilité qu'aucun des trois frères n'ait pris un chapeau qui lui appartienne ?

2.4. Axiomes du calcul des probabilités et théorèmes (résumé)

Résumons de manière un peu plus formelle nos constatations du § 2.3.

Axiome 2.1 La probabilité d'un événement E est un nombre réel compris entre 0 et 1 :

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

Axiome 2.2 La probabilité de l'événement certain est égale à 1 :

$$P(\Omega) = 1$$

Axiome 2.3 La probabilité de la réunion de deux événements **incompatibles** est égale à la somme de leur probabilité :

$$\text{si } E \cap F = \varnothing, \text{ alors } P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$

Théorème 2.1 $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

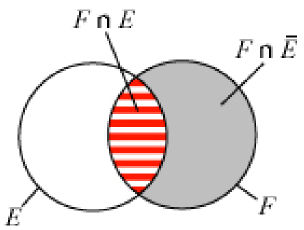
Théorème 2.2 $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

Théorème 2.3 $P(\varnothing) = 0$

Théorème 2.4 $P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n)$ si les événements E_i sont deux à deux incompatibles.

Théorème 2. 5 $P(F \cap \overline{E}) = P(F) - P(F \cap E)$

Preuve du théorème 2.5 $F \cap \overline{E}$ et $F \cap E$ sont incompatibles. En effet, $(F \cap \overline{E}) \cap (F \cap E) = \varnothing$ (voir dessin ci-contre).



Par ailleurs, $(F \cap \overline{E}) \cup (F \cap E) = F$.

Donc, en vertu de l'axiome 3 :

$$P(F) = P\big((F \cap \overline{E}) \cup (F \cap E)\big) = P(F \cap \overline{E}) + P(F \cap E)$$

ce qui prouve le théorème 2.5.

Exercice 2.15

Formules de Morgan :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

A, B et $A \cup B$ sont trois événements de probabilités 0.4, 0.5 et 0.6, respectivement. Calculez les probabilités des événements suivants :

a. $\overline{A}$ **b.** $\overline{B}$ **c.** $A \cap B$

d. $\overline{A} \cap B$ **e.** $A \cap \overline{B}$ **f.** $\overline{A} \cup B$

g. $A \cup \overline{B}$ **h.** $\overline{A} \cap \overline{B}$ **i.** $\overline{A} \cup \overline{B}$

2.5. Probabilité conditionnelle

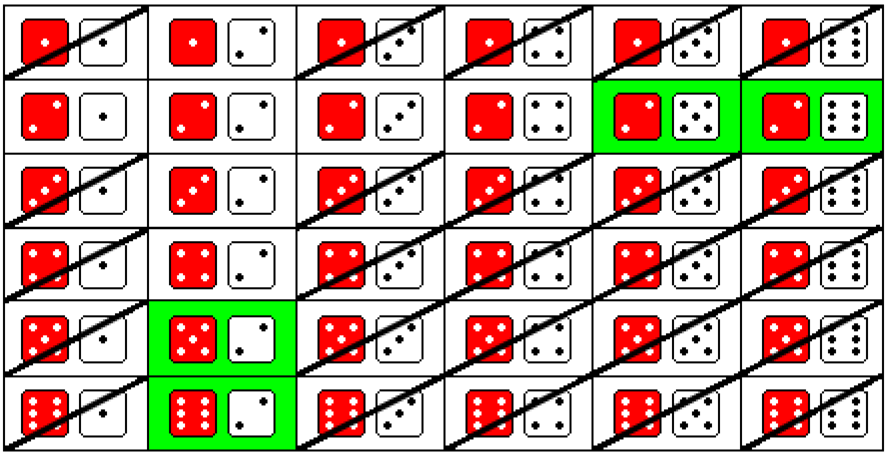
Nous noterons $P(E \mid F)$ cette nouvelle probabilité (probabilité conditionnelle de E, sachant que F s'est produit).

Supposons que nous attendions le résultat d'une épreuve et que nous connaissions la probabilité $P(E)$ de l'événement attendu E. Si, l'épreuve s'étant déroulée, nous recevons une information supplémentaire, par exemple que l'événement F s'est produit, ce renseignement va en général modifier la probabilité de réalisation de l'événement E.

Définition Soient E et F deux événements d'un univers Ω. Si $P(F) \neq 0$, on appelle **probabilité conditionnelle** de E par F le nombre noté $P(E \mid F)$ et tel que

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Exemple On lance deux dés. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme supérieure à 6, sachant que l'un des deux dés indique un 2 ?



Résolution sans la définition Remarquons tout d'abord que toutes les 36 paires « habituelles » ne sont pas envisageables. En fait, seules 11 sont possibles. Et sur ces 11 paires, 4 ont une somme supérieure à 6. Donc $p=\frac{4}{11}$.

Résolution avec la définition On pose : E : « la somme des dés est supérieure à 6 »
F : « un des deux dés indique un 2 ».
Donc $E \cap F$: « la somme des dés est supérieure à 6 **et** un des deux dés indique un 2 ».

Il est souvent plus facile de résoudre une probabilité conditionnelle **sans** la formule.

D'après la figure ci-dessus, on voit que $P(E \cap F)=\frac{4}{36}$ et $P(F)=\frac{11}{36}$.

Donc, selon la formule, on obtient bien $P(E|F)=\frac{\frac{4}{36}}{\frac{11}{36}}=\frac{4}{11}$.

Exercice 2.16

On choisit au hasard une famille parmi celles qui ont deux enfants. Quelle est la probabilité que ce soient deux garçons...

a. si l'on sait que l'un des deux au moins est un garçon ?

b. si l'on sait que l'un des deux enfants s'appelle Ernest ?

Exercice 2.17

Un sac contient vingt jetons ; la moitié sont noirs, les autres blancs. Cinq jetons portent en plus une marque spéciale et trois de ceux-là sont noirs.
On tire au hasard un jeton du sac. Quelle est la probabilité que ce jeton...

a. soit noir si l'on sait qu'il porte une marque ?

b. ne porte pas de marque si l'on sait qu'il est blanc ?

Exercice 2.18

On jette deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre un 6, sachant que les deux chiffres montrés sont différents ?

Exercice 2.19

On jette deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre un 6, sachant que la somme des deux est i ? Calculez le résultat pour toutes les valeurs possibles de i.

Exercice 2.20

Dans une petite ville, la police recherche un ivrogne. Il y a quatre chances sur cinq qu'il se trouve dans un des huit bars de la ville. Deux agents de police visitent sept des huit bars sans le trouver. Quelle est la probabilité qu'ils le trouvent dans le huitième bar ?

Exercice 2.21

On considère trois urnes. L'urne A contient 2 boules blanches et 4 rouges ; l'urne B, 8 blanches et 4 rouges ; l'urne C 1 blanche et 3 rouges. On tire une boule de chacune des urnes.
Quelle est la probabilité que la boule tirée de l'urne A soit blanche, si l'on sait que le tirage a livré 2 boules blanches exactement ?

Indication : utilisez la formule de la probabilité conditionnelle.

Formule de Bayes

Thomas **Bayes** (Londres, ?/?/1702 - Tunbridge Wells, 17/4/1761)

La formule de la probabilité conditionnelle peut être écrite sous une autre forme, appelée **formule de Bayes** :

$$P(E|F)=\frac{P(F|E)\cdot P(E)}{P(F|E)\cdot P(E)+P(F|\overline{E})\cdot P(\overline{E})}$$

Le numérateur découle de la formule de la probabilité conditionnelle :

$$P(F|E)=\frac{P(F\cap E)}{P(E)} \Rightarrow P(F\cap E)=P(F|E)\cdot P(E)$$

Le dénominateur s'obtient ainsi :

$$P(F)=P(F\cap E)+P(F\cap\overline{E})=P(F|E)\cdot P(E)+P(F|\overline{E})\cdot P(\overline{E})$$

Exemple
Un élève répond à une question à choix multiple. De deux choses l'une : soit il connaît la réponse, soit il la devine. Soit p la probabilité que l'élève connaisse la réponse et donc $1-p$ celle qu'il la devine. On admet que l'élève qui devine répondra correctement avec probabilité $1/m$ où m est le nombre de réponses proposées. Quelle est la probabilité qu'un élève connaisse la réponse à une question s'il y a répondu correctement ?

Soient E et F respectivement les événements « il connaît vraiment la réponse » et « l'étudiant répond correctement à la question ». Alors

$$P(E|F)=\frac{1\cdot p}{1\cdot p+\left(\frac{1}{m}\right)(1-p)}=\frac{m\cdot p}{1+(m-1)\cdot p}$$

En prenant par exemple $m = 5$ et $p = 0.5$, la probabilité qu'un élève connaisse la réponse à une question sachant qu'il a répondu correctement sera ainsi de $\frac{5}{6}$.

Exercice 2.22

Une maladie atteint une personne sur mille. Il existe un test pour savoir si une personne est infectée, mais ce test n'est pas parfait : si la personne est infectée, le test sera positif dans 99% des cas ; mais, dans 2% des cas, le test sera positif alors que la personne est saine.
Vous venez d'être examiné et le test est positif. Quelle est la probabilité que vous soyez vraiment atteint par cette maladie ?

2.6. Événements indépendants

Occurrence : apparition, réalisation

Deux événements E et F sont indépendants l'un de l'autre si l'occurrence de l'un n'a pas d'influence sur la probabilité de l'autre. Par exemple, le jet d'un dé n'a pas d'influence sur le jet d'un autre (sauf s'ils sont collés, magnétisés, etc.).

De la formule de la probabilité conditionnelle donnée au § 2.5, on sait que $P(E \cap F) = P(E \mid F)\cdot P(F)$. Si les deux événements E et F sont indépendants, alors $P(E \mid F) = P(E)$, donc $P(E \cap F) = P(E)\cdot P(F)$.

Définition On dit que deux événements E et F sont **indépendants** si $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$. Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont **dépendants**.

Exercice 2.23

On jette une pièce de monnaie deux fois de suite. Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?

A : « Le même côté sort deux fois. »

B : « Le nombre de côtés face est inférieur à deux. »

Exercice 2.24

On tire au hasard une carte d'un paquet de 52 cartes à jouer ordinaires. Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?

A : « La carte tirée est un as. »

B : « La carte tirée est un pique. »

Exercice 2.25

Je vais lancer une pièce de monnaie équilibrée pour la quatrième fois. Les trois premières fois j'ai obtenu pile. Quelle est la probabilité que j'obtienne pile encore cette fois ?

Exercice 2.26

Un hôpital comporte deux salles d'opération qui ont la même probabilité d'être occupées. La probabilité que l'une des salles au moins soit occupée vaut 0.9, celle que toutes deux soient occupées 0.5.

Questions **a** - **d** : voir exercice 2.15

Quelle probabilité y a-t-il...

a. que la première salle soit libre ?
b. que les deux salles soient libres ?
c. que l'une des deux salles au moins soit libre ?
d. qu'une seule salle soit libre ?
e. que la seconde salle soit libre si l'on sait que la première est occupée ?

f. Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?

A : « La première salle est occupée ».

B : « La seconde salle est occupée ».

Exercice 2.27

Un caméléon daltonien posé sur du vert prend soit la couleur verte, soit la couleur rouge, avec la même probabilité. Quand il est posé sur du rouge, il prend soit la couleur verte une fois sur cinq, soit la couleur rouge quatre fois sur cinq.
Julie étale chaque matin sa couverture bicolore sur l'herbe, une fois sur trois côté rouge visible, deux fois sur trois côté vert visible.
Un couple de caméléons daltoniens vient s'ébattre sur sa couverture.

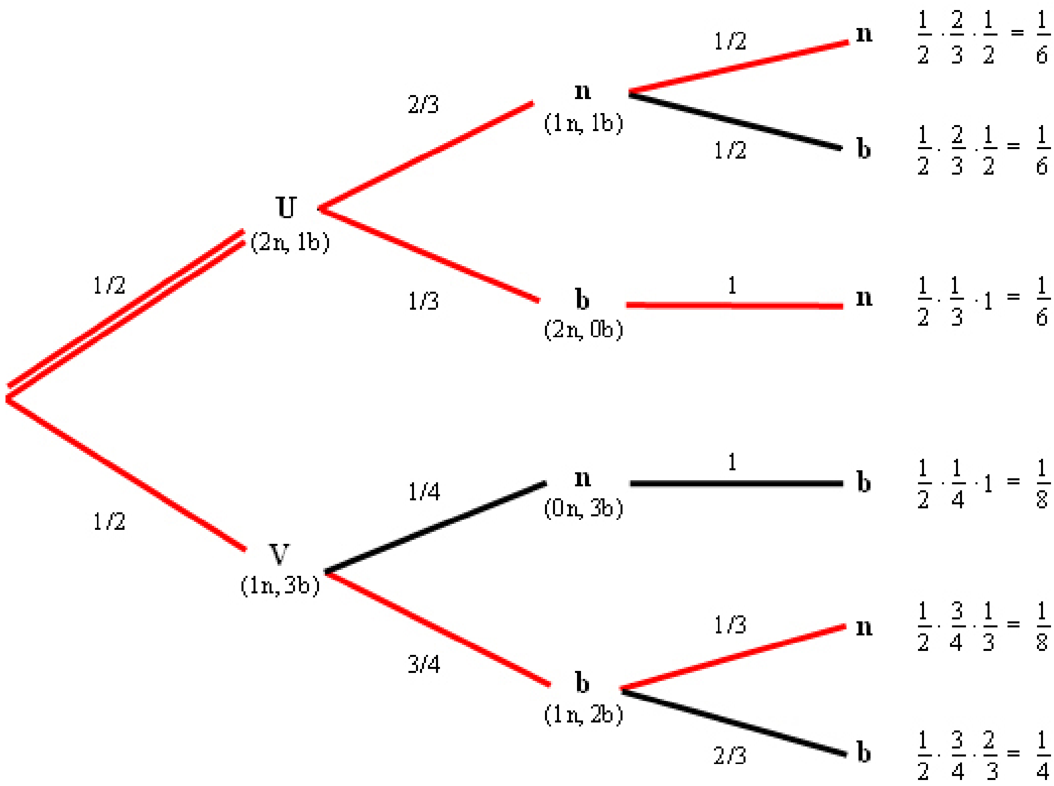
a. Calculez la probabilité qu'ils soient de la même couleur.
b. Les événements « le caméléon mâle est vert » et « le caméléon femelle est vert » sont-ils indépendants ?
c. Sachant qu'ils sont de couleurs différentes, calculez la probabilité que la face apparente de la couverture soit rouge.

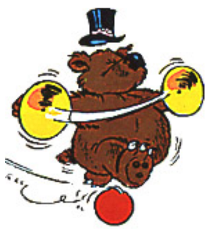
2.7. Épreuves successives

Dans de nombreuses applications, une épreuve globale se compose de n épreuves partielles successives. Les issues possibles sont alors des n-uplets $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Exemple On a deux urnes U et V extérieurement identiques. U contient 2 boules noires et 1 blanche, V contient 1 noire et 3 blanches.
On choisit d'abord une des deux urnes au hasard, puis on extrait d'elle successivement 2 boules (sans remettre la première dans l'urne).

L'arbre ci-dessous représente cette suite d'opérations, avec les probabilités associées :





La probabilité d'un chemin est égale au **produit** des probabilités des branches qui forment ce chemin. En effet, d'après la formule de probabilité conditionnelle : $P(E\cap F)=P(E|F)\cdot P(F)$.

On remarquera que dans un arbre deux chemins sont toujours incompatibles. Pour calculer la probabilité d'un événement qui est la réunion de plusieurs chemins, on **additionne** les probabilités de ces chemins (voir théorème 2.4).

Les questions suivantes se résolvent aisément à l'aide de l'arbre :

Ce sont les trois chemins rouges dans le dessin ci-dessus.

a. Quelle probabilité a-t-on de tirer en dernier une boule noire ?

$$P((-,-,\mathrm{n})) = P((\mathrm{U,n,n}) \cup (\mathrm{U,b,n}) \cup (\mathrm{V,b,n})) =$$
$$= P((\mathrm{U,n,n})) + P((\mathrm{U,b,n})) + P((\mathrm{V,b,n})) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{11}{24}$$

b. Quelle probabilité a-t-on de tirer deux boules de même couleur ?

$$P((-,\mathrm{n,n}) \cup (-,\mathrm{b,b})) = P((\mathrm{U,n,n}) \cup (\mathrm{V,b,b})) = \frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

c. Quelle probabilité a-t-on de tirer une boule noire en dernier si l'on sait que la première était blanche ?

Les questions **c** et **d** sont des probabilités conditionnelles.

$$P((-,-,\mathrm{n})|(-,\mathrm{b},-)) = \frac{P((-,\mathrm{b},\mathrm{n}))}{P((-,\mathrm{b},-))} = \frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}} = \frac{7}{13}$$

d. Quelle probabilité a-t-on d'avoir choisi l'urne U si la seconde boule tirée est noire ?

$$P((\mathrm{U},-,\mathrm{n})|(-,-,\mathrm{n})) = \frac{P((\mathrm{U},-,\mathrm{n}))}{P((-,-,\mathrm{n}))} = \frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}}=\frac{8}{11}$$

Exercice 2.28

Me voici sur une plage isolée d'Hawaii. J'ai l'intention d'y prendre un vrai bain de vagues, c'est-à-dire passer les brisants, nager tranquillement au large puis rentrer en me faisant ramener par une vague. Mais on me le déconseille fortement. Les vagues sont en effet ici colossalement fortes et charrient 2 mètres d'écumes environ. Aussi, 1 bon nageur sur 5 ne réussit pas à franchir les brisants et revient directement sur la plage. Quand on nage tranquillement au large, les requins vous dévorent 1 fois sur 4. Puis la probabilité de se noyer dans l'écume en suivant une vague au retour est de 40%. Pour finir, 3 personnes sur 20 parmi les rescapés apparents de ce bain s'effondrent terrassés par une crise cardiaque en arrivant sur le sable.

Quelle est donc la probabilité, si je me lance malgré tout en mer...

a. de me noyer ?
b. de revenir vivant sur la plage ?
c. de revenir vivant sur la plage après avoir passé les brisants ?

Épreuves successives indépendantes

Lorsqu'une épreuve globale est formée d'une succession d'épreuves **indépendantes** les unes des autres, ce qui constitue un cas particulier du paragraphe précédent, les formules à utiliser se simplifient considérablement. Par exemple si A, B et C sont trois événements relatifs à trois épreuves successives indépendantes, on aura :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Exemple On lance un dé trois fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir la suite 2, 5, 3 ?

La réponse est simplement $P((2,5,3)) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$.

Exercice 2.29

On lance un dé trois fois de suite. Quelle est la probabilité que ni le 3 ni le 5 n'apparaissent ?

Exercice 2.30

On atteint une cible 3 fois sur 10. Combien de fois faut-il tirer pour avoir plus de 99 chances sur 100 de toucher la cible au moins une fois ?

Exercice 2.31

Vous jouez 1000 grilles par an au *Swiss Lotto*, où il faut cocher 6 numéros sur 45.

a. Quelles sont vos chances de gagner le gros lot (i.e. d'avoir coché les 6 bons numéros) au moins une fois si vous persévérez à ce rythme pendant cinquante ans ?
b. À ce rythme, combien d'années devriez-vous jouer pour avoir plus d'une chance sur deux de gagner le gros lot au moins une fois ?

Exercice 2.32

Cette politique de « surréservation » (overbooking) est très courante parmi les compagnies d'aviation.

Un guide dispose d'un minicar à 10 places pour faire visiter Paris. Avec le temps, il a remarqué qu'une personne qui a réservé une place annule sa réservation 1 fois sur 5. Il décide donc de toujours louer 11 places.

Quel est le nombre approximatif de jours dans l'année où le guide devra renvoyer un de ses clients par manque de place, en supposant qu'il travaille 250 jours par an ?

Exercice 2.33

Problème du Chevalier de Méré (posé à Blaise **Pascal** en 1654).
Qu'est-ce qui est le plus probable : obtenir au moins un 6 en quatre lancers d'un dé, ou obtenir au moins un double-6 en lançant 24 fois deux dés ?

Exercice 2.34

Quand je plante des capucines, ça marche 1 fois sur 4. Combien de capucines (au minimum) dois-je planter pour avoir plus de 3 chances sur 4 d'en voir au moins une fleurir ?

Exercice 2.35

Un automate peut délivrer du thé, du lait ou du chocolat. Un second bouton permet de préciser si la boisson doit être chaude ou froide.
À la suite d'un dérangement le bouton permettant le choix de la boisson ne fonctionne que 1 fois sur 2 en moyenne et celui qui permet le choix de la température que 2 fois sur 3 en moyenne.
Un consommateur tient absolument à avoir une tasse de chocolat chaud. Il est prêt à payer 3 fois de suite pour satisfaire son désir. Quelle probabilité a-t-il de ne pas obtenir satisfaction ?

Exercice 2.36

On tire successivement 4 cartes d'un jeu de 36 cartes. Le jeu ayant été brassé convenablement, quelle probabilité a-t-on de tirer...

a. dans l'ordre : as ♠, as ♣, as ♦, as ♥ ?
b. les quatre as ?
c. les quatre as sachant que les deux premières cartes tirées étaient des as ?
d. un as et trois autres cartes (ordre indifférent) ?
e. un as au moins ?
f. un as au moins sachant que la première carte tirée n'était pas un as ?

Exercice 2.37

Deux urnes U et V contiennent respectivement :
U : 3 boules rouges, 2 boules bleues
V : 1 boule rouge, 1 boule bleue
On enlève une boule de U puis l'on met les boules restantes dans V. On tire alors une boule de V. Calculez la probabilité...
a. que cette boule soit rouge
b. que cette boule soit rouge si l'on sait que la première boule tirée était rouge
c. que la première boule tirée ait été rouge si au second tirage on a une boule rouge.

Exercice 2.38

Un joueur professionnel garde dans sa poche 2 pièces, l'une normale et l'autre ayant ses deux faces identiques, disons deux fois pile. Il en prend une au hasard et la lance ; elle montre pile.
a. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la pièce normale ?
b. Il jette la pièce une seconde fois et elle montre à nouveau pile. Même question.

Exercice 2.39*

Un jeu de dés très populaire dans les casinos est le *craps*.
Le joueur lance deux dés. Si la somme des deux dés est 2, 3 ou 12, le joueur a perdu. Si la somme est 7 ou 11, il gagne. Dans les autres cas, la somme est mémorisée. Le joueur doit alors relancer les dés jusqu'à ce qu'il obtienne à nouveau cette somme ou un 7. S'il réussit à obtenir la même somme, il gagne ; mais s'il fait un 7, il perd.
Calculez la probabilité de gain.

2.8. La loi binomiale

Schéma

Une urne contient N boules. R de ces boules sont rouges. On tire une boule de cette urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne. On répète cette épreuve n fois de suite.
La probabilité de tirer k boules rouges est égale à :

p est la probabilité de tirer une boule rouge lors d'un tirage (succès).
p ne varie pas au cours du temps.
$1 - p$ est la probabilité d'échec.
k est le nombre de succès.
$n - k$ est le nombre d'échecs.

$$C_k^n p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{avec} \quad p = \frac{R}{N}$$

Cette loi s'utilise lorsqu'il n'y a que **deux issues possibles** à l'épreuve : **succès** (boule rouge) ou **échec** (boule pas rouge) et que l'on s'intéresse au nombre de succès possibles (k) sur un total de n épreuves.

Exemple On lance un dé équilibré 20 fois de suite. Quelle probabilité a-t-on d'obtenir respectivement 1, 2, 3, 4 fois « 6 » ?

$$P(1 \text{ fois « 6 »}) = C_1^{20}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{19} \approx 0.104$$

$$P(2 \text{ fois « 6 »}) = C_2^{20}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{18} \approx 0.198$$

$$P(3 \text{ fois « 6 »}) = C_3^{20}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{17} \approx 0.238$$

$$P(4 \text{ fois « 6 »}) = C_4^{20}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^{16} \approx 0.202$$

Exercice 2.40

Quand p=1/2, les calculs se simplifient beaucoup, car p = 1–p.

On lance une pièce de monnaie 20 fois de suite. Quelle probabilité a-t-on d'obtenir...

a. 8 fois face
b. 9 fois face
c. 10 fois face
d. plus de 7 fois et moins de 13 fois face
e. moins de 4 fois face ?

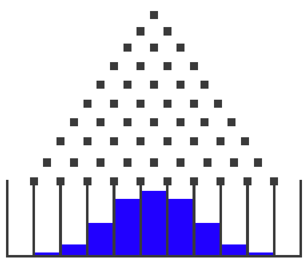
Exercice 2.41

On admet qu'un trait physique (telle la couleur des yeux ou le fait d'être gaucher) chez un homme est déterminé par une paire de gènes. On désignera par d le gène de la paire qui est dominant, et par r celui qui est récessif. Une personne portant dd sera ainsi à dominance pure, une autre portant rr sera à caractère récessif pur, alors que rd entraînera une dominance hybride. Les dominances pures et hybrides ne se distinguent pas extérieurement. Un enfant recevra un gène de chacun de ses parents. Si, pour un trait particulier, les deux parents sont hybrides et s'ils ont 4 enfants, quelle est la probabilité que 3 de ceux-ci manifestent extérieurement le trait dominant ?

Exercice 2.42

Le crible de Galton

Des billes tombent verticalement sur un assemblage de clous placés en quinconce sur des lignes horizontales et équidistants de leurs voisins immédiats (voir dessin ci-contre). Le diamètre des billes est égal à la distance entre les clous. Chaque fois qu'une bille tape un clou, elle a la même probabilité (p = 0.5) de continuer sa chute à gauche ou à droite.
En bas du crible se trouvent des compartiments dans lesquels tombent les billes. Si nous réalisons l'expérience un grand nombre de fois, les billes viennent s'accumuler dans les compartiments et forment ainsi un histogramme. La hauteur d'un bâton de l'histogramme est proportionnelle au nombre de billes s'y trouvant.



a. Déterminer l'histogramme théorique du crible de Galton ci-contre. On laisse tomber 1024 billes.
b. Même question si la probabilité que la bille tombe à droite d'un clou est p = 0.25. Dessinez la répartition obtenue et comparez-la avec l'histogramme du point **a.**

Exercice 2.43

Il y a en moyenne 10% de gauchers. Calculez la probabilité d'avoir au moins 4 gauchers parmi 20 personnes.

Exercice 2.44

Un graphologue prétend être capable de déterminer le sexe d'une personne d'après son écriture dans 90% des cas. On lui soumet 20 échantillons d'écriture.
On accepte son affirmation s'il réussit à identifier au moins 15 fois le sexe correct. Dans le cas contraire, on rejette son affirmation. Quelle est la probabilité...

a. que l'on accepte son affirmation alors qu'il répond au hasard ?
b. que l'on rejette son affirmation alors qu'elle est fondée ?

2.9. La loi multinomiale

Il s'agit d'un tirage avec remise dans une urne multicolore. Une urne contient des boules de k couleurs différentes r_k. On note p_j la proportion de boules de couleur r_j. On effectue n tirages avec remise.

Considérons une expérience aléatoire avec k résultats possibles, disons les résultats r_1, r_2, …, r_k.

La probabilité du résultat r_j sera notée p_j. On a donc $0 \leq p_j \leq 1$ et $\sum_{j=1}^{k} p_k = 1$.

Maintenant, considérons n répétitions indépendantes de cette expérience aléatoire. La probabilité d'obtenir n_1 fois le résultat r_1, n_2 fois le résultat r_2, …, et n_k fois le résultat r_k est donné par la formule :

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$$

avec $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Exercice 2.45

Une urne contient 10 boules rouges, 15 bleues, 3 jaunes et 8 vertes. On tire une boule de cette urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne. On répète cette épreuve dix fois de suite.
Quelle est la probabilité d'avoir noté 3 boules rouges, 4 bleues, 1 jaune et 2 vertes ?

Exercice 2.46

On lance un dé équilibré 24 fois de suite. Quelle probabilité a-t-on d'obtenir...

a. 5 six et 5 cinq ?
b. 9 six et 12 nombres impairs ?
c. les 6 chiffres 4 fois ?

Exercice 2.47

On « alourdit » un dé pour que le 6 apparaisse 30% du temps, pour que la face opposée 1 apparaisse 10% du temps, et pour que chacune des autres faces apparaisse 15% du temps. On jette le dé six fois. Calculez la probabilité que...

a. chaque face apparaisse une fois ;
b. les faces 4, 5 et 6 apparaissent chacune deux fois.

2.10. Exercices supplémentaires

Exercice 2.48

Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules noires. On y tire au hasard 3 boules une par une, d'abord en les remettant chaque fois dans l'urne (méthode 1), puis sans les y remettre (méthode 2). Avec quelle méthode a-t-on le plus de chances de tirer ainsi une boule blanche et 2 boules noires (l'ordre d'apparition n'a pas d'importance) ?

Exercice 2.49

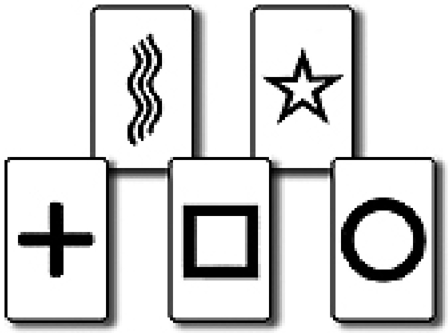
Sur un damier dont chaque case carrée mesure 58 mm de côté, on lance une pièce de 5 centimes (dont le diamètre est de 17 mm). Quelle est la probabilité que la pièce tombe à l'intérieur d'une case, sans en déborder ?

Exercice 2.50

Au début des années trente J. B. **Rhine** à l'université Duke (États-Unis) aurait obtenu des résultats significatifs avec des sujets apparemment doués. L'une de ses expériences de clairvoyance avec l'étudiant H. E. **Pearce** est restée célèbre : celui-ci avait su dire exactement 558 fois sur 1 850 tirages successifs (la probabilité pour que ce résultat ait été dû au hasard est de 10^{-22}) quelle carte *Zener* avait été tirée en un lieu éloigné de 90 à 230 mètres de lui.

À partir des années 1930, la perception extrasensorielle fit l'objet d'investigations standardisées en laboratoire. Le matériel comprenait des cartes *Zener*, c'est-à-dire un jeu de vingt-cinq cartes portant cinq symboles simples (un cercle, une croix, un carré, trois lignes ondulées, une étoile). Dans les expériences de perception extrasensorielle, il s'agit de deviner la carte retournée par un sujet manipulant les cartes hors de la vue du « devin ».

On fait deviner à un sujet vingt-cinq cartes *Zener* en tirant les cartes successivement. Quelle est la probabilité qu'il devine juste…



a. les 25 cartes (sans remise) ?
b. les 25 cartes (avec remise) ?
c. entre 0 et 7 cartes (avec remise) ?
d. entre 8 et 16 cartes (avec remise) ?
e. entre 17 et 25 cartes (avec remise) ?

Exercice 2.51

Let's Make A Deal ! était un jeu très populaire diffusé sur une chaîne américaine dans les années septante. À la fin du jeu, Monty Hall vous offrait la possibilité de gagner ce qui se trouvait derrière une porte.

Vous avez trois portes devant vous : derrière une se trouve un prix magnifique (par exemple une voiture) et derrière les deux autres un prix moins intéressant (par exemple une chèvre). Vous choisissez une porte. Pour ménager le suspense, l'animateur, avant de révéler ce qu'il y a derrière votre porte, ouvre une des deux autres portes (derrière laquelle se trouve toujours une chèvre). Il vous pose alors la question : « Parmi les deux portes encore fermées, laquelle choisissez-vous ? »

Vaut-il mieux garder la première porte choisie ou au contraire prendre l'autre porte ? À moins que cela n'ait aucune importance...

Exercice 2.52

Australian Airlines

Pour cet exercice, nous supposerons que les jeunes filles australiennes mesurent entre 1.50 m et 1.75 m, qu'elles pèsent entre 40 kg et 70 kg, que toutes les mesures possibles sont équiprobables et qu'il n'y a pas de lien particulier entre la taille et le poids (ouf !).
Australian Airways recrute des hôtesses de l'air parmi les jeunes filles qui mesurent au moins 1.65 m et pèsent au plus 10 kg de moins que leur nombre de centimètres au-dessus d'un mètre.
Quelle est alors la proportion de jeunes filles australiennes pouvant prétendre à un poste d'hôtesse de l'air chez Australian Airways ?

Indication
Faites un graphique avec la taille en abscisse et le poids en ordonnée. Comparez ensuite des aires.

2.10 Ce qu'il faut absolument savoir

Connaître les axiomes	❏ ok
Connaître les théorèmes	❏ ok
Reconnaître et calculer les probabilités conditionnelles	❏ ok
Reconnaître deux événements indépendants	❏ ok
Savoir faire un arbre pour résoudre un problème d'épreuves successives	❏ ok
Maîtriser la loi binomiale	❏ ok
Maîtriser la loi multinomiale	❏ ok