La démonstration par les aires

Selon le temps dont on dispose, les élèves réalisent les trois figures ou je les projette.

Lorsque l'horaire le permet, il est préférable de faire réaliser aux élèves les figures, dans la mesure où cela favorise la mémorisation de la séquence.

J'annonce aux élèves le contenu de la séance: le but est d'arriver à la démonstration que, dans la figure 1, l'aire du carré vert est égale à l'aire du carré rouge plus l'aire du carré jaune. Pour cette démonstration, on va utiliser les figures 2 et 3. et procéder en deux étapes.

1) Première étape : s'assurer que les quadrilatères coloriés des figures 2 et 3 sont bien des carrés, et que ce sont les mêmes que les carrés de la figure 1.

Si le professeur a préparé les figures pour le rétroprojecteur, il peut utiliser un transparent de base, avec la figure 1 colorée, les figures 2 et 3 en blanc. Il superposera d'abord un transparent colorant les figures 2 et 3 avec des tons neutres; au fur et à mesure des démonstrations, il superposera d'autres transparents utilisant pour les figures 2 et 3 les couleurs de la figure 1. De cette manière, on ne conduit pas tout de suite l'élève à inférer les similitudes entre quadrilatères, et on fait mieux apparaître la nécessité de demontrer.

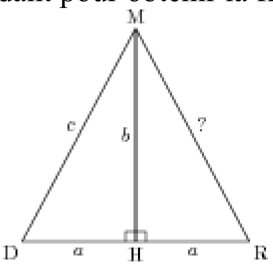
1.1) Le quadrilatère vert de la figure 2 est-il un carré ? Est-ce le même que le carré vert de la figure 1 ?

Il est bon ici de demander aux élèves ce qu'il faut démontrer pour arriver à répondre à la question.

La réponse attendue est qu'il faut démontrer que le quadrilatère vert a quatre cotés égaux et un angle droit. On obtient l'angle droit par calcul à l'aide d'un coté du carré qui donne un angle plat auquel on soustrait deux angles complémentaires du triangle rectangle. Pour l'égalité de longueur des cotés, c'est plus délicat ! on utilise la propriété « Si deux triangles rectangles ont leurs côtés de l'angle droit égaux deux à deux alors ils ont des hypoténuses égales ». Pour être tout à fait rigoureux, cette propriété doit également être démontrée. Voici deux démonstrations possibles:

- première démonstration:

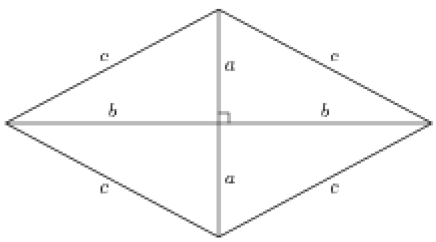
Soit deux triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit sont égaux deux à deux, on peut les accoler le long de deux côtés correspondant pour obtenir la figure suivante



On démontre facilement que la droite (MH) est la médiatrice du segment [DR]. Le point M est donc équidistant des points D et R et par conséquent, MR = c.

- deuxième démonstration:

On réunit quatre triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit sont égaux deux à deux, pour obtenir la figure suivante



Il suffit alors de justifier que le quadrilatère obtenu est un losange. Cette démonstration est facile mais un peu moins élégante dans la mesure où elle fait intervenir non pas deux mais quatre triangles rectangles.

Dans les deux cas, le professeur fournit les figures . En effet, cette démonstration est intermédiaire, et passer du temps à la réalisation des figures en classe ferait perdre de vue aux élèves l'objectif principal. À la fin de cette démonstration intermédiaire, il est bon d'indiquer aux élèves l'etape dans laquelle on se trouve, afin qu'il ne perdent pas le fil !

1.2) Le quadrilatère rouge de la figure 3 est-il un carré ? Est-ce le même que le carré rouge de la figure 1 ? Le quadrilatère jaune de la figure 3 est un carré ? Est-ce le même que le carré jaune de la figure 1 ?

Ces démonstrations ne posent pas de difficultés particulières.

1) Deuxième étape : comparer les figures 2 et 3.

aire de la figure 1 = aire du grand carré (vert) + $4 \times$ aire du triangle rectangle
aire de la figure 2 = aire du petit carré (rouge) + aire du moyen carré (jaune) + $4 \times$ aire du triangle rectangle

Or, on sait que aire de la figure 1 = aire de la figure 2; on peut donc écrire :

aire du grand carré (vert) + $4 \times$ aire du triangle rectangle = aire du petit carré (rouge) + aire du moyen carré (jaune) + $4 \times$ aire du triangle rectangle

Donc, si l'on retire, dans chaque figure, les quatre triangles rectangles, on obtient :

aire du grand carré (vert) = aire du petit carré (rouge) + aire du moyen carré (jaune)

C'est à dessein ici que l'on n'a pas poussé trop loin la mise en équation ; en effet, l'intérêt de cette démonstration est de rester proche des figures et de la géométrie concrète, et de ne pas demander aux élèves un grand effort d'abstraction. Il est bon que professeur fasse en permanence le rapport entre ce qu'il écrit au tableau et les figures 1, 2 et 3, voir qu'il l'énonce d'abord oralement en désignant les figures.

Si le professeur ne fait pas d'autre démonstration que celle-ci, et qu'il n'a pas encore fait noter aux élèves le théorème, il peut le faire à ce moment-là. Il est intéressant de l'exprimer de deux manières : par les aires et par les carrés des côtés. En effet, l'image mentale des aires, bien en place après les séquences précédentes, est très efficace; elle semble servir de support pour la mémorisation du théorème, même quand celui-ci est exprimé sous d'autres formes.