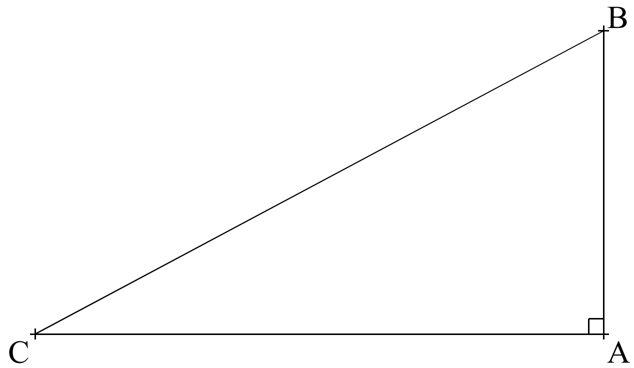
La démonstration par cosinus

Soit ABC un triangle rectangle en A, on veut démontrer que $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
Placer sur la figure ci-dessous le point H, projeté orthogonal de A sur (BC)



1^{ère} étape :

À l'aide du triangle ABC, on a $\cos \widehat{B} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

à l'aide du triangle AHC, on a $\cos \widehat{B} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

d'où l'égalité $\frac{AB}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{AB}$.

en multipliant chacun des termes de cette égalité par $AB \times BC$, on obtient $AB^2 = \dots\dots \times \dots\dots$

2^{ème} étape :

À l'aide du triangle ABC, on a $\cos \widehat{C} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

À l'aide du triangle AHC, on a $\cos \widehat{C} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

d'où l'égalité $\frac{AC}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{AC}$

en multipliant chacun des termes de cette égalité par $\dots\dots \times \dots\dots$, on obtient $AC^2 = \dots\dots \times \dots\dots$

3^{ème} étape :

Par conséquent, on peut affirmer que : $AB^2 + AC^2 = BC \times \dots\dots + BC \times \dots\dots$
ainsi, en factorisant par $\dots\dots$, on obtient : $AB^2 + AC^2 = BC \times (\dots\dots + \dots\dots)$
or $BH + HC = \dots\dots$
donc $AB^2 + AC^2 = BC \times \dots\dots$

En conclusion, on a démontré que $AB^2 + AC^2 = \dots\dots$

Commentaires

Je propose ici à l'élève un exercice à trous, par lequel ils arrivent à la démonstration du théorème de Pythagore.

Bien sûr, ce type d'exercice n'entraîne pas à la rédaction. Cependant, dans le cas d'une démonstration difficile, qui fait appel à une notion fraîchement acquise (ici le cosinus), un devoir à trous permet de focaliser l'attention de l'élève sur le contenu.