Calcul formel ou calcul numérique

IREM de Lille

Pierre Lapôtre
groupe AMECMI

11 Avril 2013

2

Avec Xcas

Soit la fonction définie sur $[\,0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}\,\exp(1-x)$

functionTSXcas.xws

? Sauver Config functionTSXcas.xws : exact real RAD 12 xcas

1 f(x):=sqrt(x)*exp(1-x)

// Interprete f
// Success compiling f

$$x \;\to (\sqrt{x})\cdot\exp(1-x)$$

2 f(1/2)

$$\frac{(\sqrt{2})\cdot\exp(\frac{1}{2})}{2}$$

3 f(0.5)

1.1658219908

4 f1:=function_diff(f)

// Success

$$`x` \;\to \frac{(\sqrt{`x`})^{-1}\cdot\exp(1-`x`)}{2}+(\sqrt{`x`})\cdot(-\exp(1-`x`))$$

5 factor(f1(x))

$$\frac{(2\cdot x-1)\cdot\exp(1-x)}{-2\cdot(\sqrt{x})}$$

3

Avec scilab

Et la même fonction $f(x) = \sqrt{x}\,\exp(1-x)$

```
function y=f(x);
    y=sqrt(x)*exp(1-x);
endfunction
Y=[];
for x=0:0.01:4
    y=f(x);Y=[Y,y];
end
disp("le maximum de f sur [0;4] semble être "+string(max(Y)));
disp("l image de 1/2 par f est approximativement "+string(f(1/2)))
```

```
le maximum de f sur [0;4] semble être 1.1658219907986

l image de 1/2 par f est approximativement 1.1658219907986
```

4

Une autre solution pour montrer les possibilités de scilab :

```
x=0:0.01:4;
y=sqrt(x);z=exp(1-x);
t=y.*z;
disp("le maximum de f sur [0;4] semble etre "+string(max(t)))
disp("l image de 1/2 est approximativement "+string(sqrt(1/2)*exp(1-1/2)) )
```

x est le vecteur $(0; 0.01; 0.02; \ldots; 3.99; 4)$

y est le vecteur dont les coordonnées sont les racines carrées des coordonnées de x.

z est celui dont les coordonnées sont les images par $x \longrightarrow exp(1-x)$ des coordonnées de x.

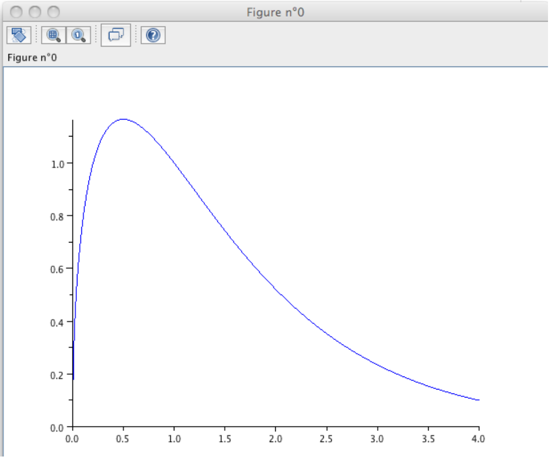
t est le vecteur produit coordonnée par coordonnée des deux précédents.

t est ainsi la table de valeurs de f de 0 à 4 avec un pas de 0.01.

5

Une sortie graphique :

```
function y=f(x);
    y=sqrt(x)*exp(1-x);
endfunction
x=linspace(0,4,400);
plot(x,f)
```



6

Problème du premier degré

Deux personnes n'ont qu'une seule bicyclette pour faire un parcours de 20 km. La première part avec la bicyclette à 15 $km.h^{-1}$ en même temps que la deuxième part à pied à la vitesse de $4,5\,km.h^{-1}$. Après un certain trajet, la première personne laisse la bicyclette sur le talus de la route et termine le parcours à pied à la vitesse de $5\,km.h^{-1}$. La deuxième personne trouve la bicyclette et termine le parcours à la vitesse de $12\,km.h^{-1}$. Les deux personnes arrivent en même temps à destination. Calculer la distance du point de départ à l'endroit où la bicyclette est abandonnée et la durée totale du trajet.

Brevet élémentaire, Clermont, 1929

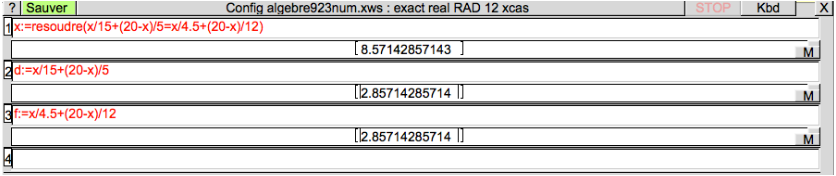
7

En notant x la distance cherchée, on obtient l'équation :

$$\frac{x}{15} + \frac{(20-x)}{5} = \frac{x}{4,5} + \frac{(20-x)}{12}$$

8

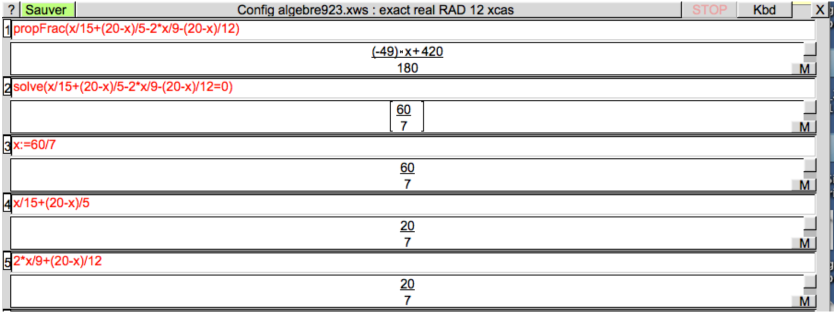
Avec Xcas, $1^{\text{ière}}$ version



Xcas donne des réponses sous forme décimale approchée !
Et le calcul formel ?

9

Avec Xcas, $2^{\text{ième}}$ version



10

Avec scilab

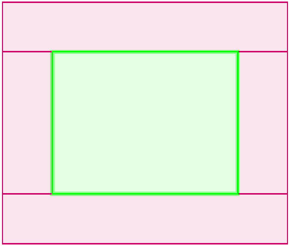
Rappel : $\dfrac{x}{15}+\dfrac{(20-x)}{5}=\dfrac{x}{4,5}+\dfrac{(20-x)}{12}$

```
-->p=poly([4-5/3 1/15-1/5-1/4.5+1/12],"x","coeff")
 p  =

    2.3333333333333 - 0.2722222222222x

-->x=roots(p)
 x  =

    8.5714285714286

-->d=x/15+(20-x)/5
 d  =

    2.8571428571429

-->
```

11

Problème du second degré

Un jardin a pour dimensions 40 m et 34 m. Une allée de largeur uniforme en fait le tour à l'intérieur. Quelle doit être cette largeur pour que la surface de l'allée soit le quart de la surface totale ?



12

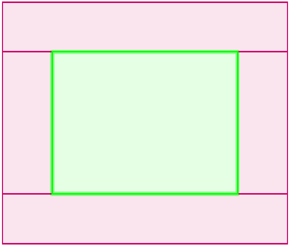
En notant x la largeur de l'allée, on obtient l'équation :

$$80x + (34 - 2x)2x = \frac{40 \times 34}{4}$$

$$80x + 68x - 4x^2 = 340$$

soit

$$x^2 - 37x + 85 = 0$$



13

Avec Xcas

? | Sauver | Config jardin.xws : exact real RAD 12 xcas

1 `A:=80*x+(34-2*x)*2*x-40*34/4`

$$80\cdot x+(34-2\cdot x)\cdot 2\cdot x-340$$

2 `A:=normal(A/4)`

$$-x^2+37\cdot x-85$$

3 `u:=solve(A)`

$$\left[\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot(-37+7\cdot(\sqrt{21})),\ \left(\frac{-1}{2}\right)\cdot(-37-7\cdot(\sqrt{21}))\right]$$

4 `evalf(u)`

$$[2.46098506766,\ 34.5390149323]$$

5 `simplify((40-2*u(1))*(34-2*u(1))/(40*34))`

$$\frac{3}{4}$$

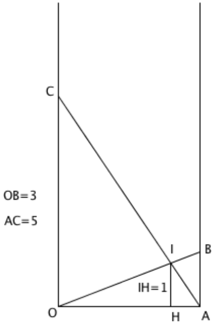
14

Avec scilab

```
-->p=poly([85 -37 1],"x","coeff")
 p  =

                    2
    85 - 37x + x

-->roots(p)
 ans  =

    34.539014932345
    2.4609850676546

-->
```

15

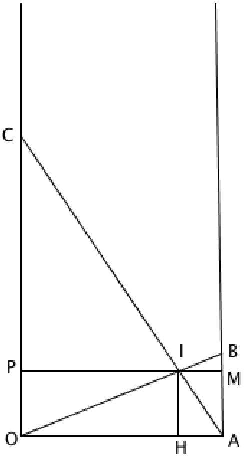
Une équation du quatrième degré



Deux échelles $[OB]$ de trois mètres et $[AC]$ de cinq mètres, sont respectivement appuyées sur deux murs verticaux et parallèles, coincées par l'autre mur comme sur le dessin. Elles se croisent à un mètre du sol supposé horizontal.

Problème : déterminer la distance entre les deux murs.

16



Dans un repère d'origine O, on note x_A l'abscisse de A, y_B l'ordonnée de B, y_C celle de C. On a alors

$$x_A^2 + y_B^2 = 9 \quad (1) \text{ et } x_A^2 + y_C^2 = 25 \quad (2)$$

- $\dfrac{IC}{IA} = \dfrac{IO}{IB} = \dfrac{CO}{AB} = \dfrac{y_C}{y_B}$
- $\dfrac{IO}{IB} = \dfrac{IP}{IM} = \dfrac{OP}{BM} = \dfrac{1}{y_B - 1}$

d'où $\dfrac{y_C}{y_B} = \dfrac{1}{y_B - 1}$ soit $y_C = \dfrac{y_B}{y_B - 1}$

- (2)−(1) donne $y_C^2 - y_B^2 = 16$ et on en déduit :

$$\left(\frac{y_B}{y_B - 1}\right)^2 - y_B^2 = 16$$

17

$\left(\dfrac{y_B}{y_B - 1}\right)^2 - y_B^2 = 16$ conduit alors à

$16(y_B - 1)^2 + y_B^2(y_B - 1)^2 - y_B^2 = 0$ soit encore

$y_B^4 - 2y_B^3 + 16y_B^2 - 32y_B + 16 = 0$

Le problème posé revient alors à résoudre l'équation du quatrième degré :

$$x^4 - 2x^3 + 16x^2 - 32x + 16 = 0$$

Avec Xcas

```
1 resoudre(x**4-2*x**3+16*x**2-32*x+16=0)
  Warning! Algebraic extension not implemented yet for poly [1,-2,16,-32,16]
  [0.803143142419, 1.31157122019]
2
```

Xcas ne donne pas de solutions exactes.

19

Solutions exactes (non vérifiées)

```
(%i1) solve([x**4-2*x**3+16*x**2-32*x+16=0], [x]);
```

(%o1)
$$[x=-\frac{\sqrt{-\frac{102\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{1/6}}{\sqrt{9\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{2/3}-87\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{1/3}+256}}-\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{1/3}-\frac{256}{9\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{1/3}}-\frac{58}{3}}}{2}-\frac{\sqrt{9\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{2/3}-87\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{1/3}+256}}{6\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{1/6}}+\frac{1}{2},$$

$$x=\frac{\sqrt{-\frac{102\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{1/6}}{\sqrt{9\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{2/3}-87\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{1/3}+256}}-\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{1/3}-\frac{256}{9\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{1/3}}-\frac{58}{3}}}{2}-\frac{\sqrt{9\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{2/3}-87\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{1/3}+256}}{6\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{1/6}}+\frac{1}{2},$$

$$x=-\frac{\sqrt{\frac{102\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{1/6}}{\sqrt{9\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{2/3}-87\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{1/3}+256}}-\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{1/3}-\frac{256}{9\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{1/3}}-\frac{58}{3}}}{2}+\frac{\sqrt{9\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{2/3}-87\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{1/3}+256}}{6\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{1/6}}+\frac{1}{2}$$

$$,x=\frac{\sqrt{\frac{102\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{1/6}}{\sqrt{9\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{2/3}-87\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{1/3}+256}}-\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{1/3}-\frac{256}{9\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{1/3}}-\frac{58}{3}}}{2}+\frac{\sqrt{9\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{2/3}-87\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{1/3}+256}}{6\left(\frac{32\sqrt{283}}{3^{3/2}}+\frac{4960}{27}\right)^{1/6}}+$$

20

Avec scilab

```
-->p=poly([16 -32 16 -2 1],"x","coeff")
 p  =

                   2      3    4
    16 - 32x + 16x - 2x + x

-->roots(p)
 ans  =

  - 0.0573571813067 + 3.8969114478874i
  - 0.0573571813067 - 3.8969114478874i
    1.3115712201942
    0.8031431424192

-->
```

scilab signale aussi les solutions complexes

21

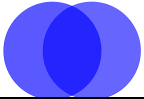
Les croissants réunis.

Pour son dixième anniversaire, la Société des Croissants Réunis a décidé de changer son logo. Le nouveau est constitué de deux cercles identiques qui se coupent, délimitant trois zones. Les aires de ces trois zones sont identiques et les deux zones extrêmes représentent deux croissants réunis par leur pointes, comme sur le schéma.

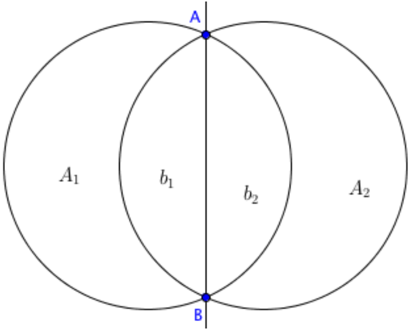
Le mur du hall d'entrée du siège social sera ainsi orné de ce nouveau sigle. Le peintre qui doit effectuer ce travail a peu d'éléments. Il connait les emplacements sur le mur des deux points A et B, pointes des croissants. Ces deux points sont sur une même verticale. Le peintre, perplexe, n'arrive pas à situer les centres des deux cercles de façon que les trois zones aient la même surface.

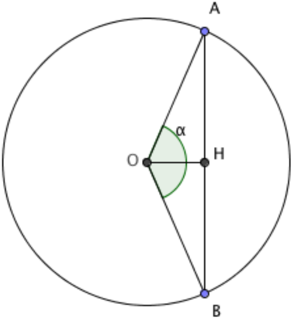
Aidez-le en calculant la distance de chacun des centres au milieu du segment $[AB]$.

Jeux et stratégie n° 13, Fev-Mars 1983



22





Aire du secteur angulaire d'angle α : $\dfrac{1}{2}\alpha R^2$.

Aire du triangle OAB : $\dfrac{1}{2}R^2 \sin\alpha$.

Aire de la zone b_2 : $\dfrac{1}{2}\alpha R^2 - \dfrac{1}{2}R^2 \sin\alpha$.

Et aire$(b_2) = \dfrac{1}{4}\pi R^2$ ce qui conduit à l'équation $\sin\alpha = \alpha - \dfrac{\pi}{2}$

23

Avec Xcas

```
? Sauver    Config : exact real RAD 12 xcas    STOP  Kbd  X
1 solve(sin(α)=α-pi/2,α)
Unable to isolate α in -2*α*tan(α/2)^2-2*α+pi*tan(α/2)^2+pi+4*tan(α/2)    M
2
```

Xcas ne sait pas mais offre une résolution numérique :

```
? Sauver    Config equanonpoly.xws : exact real RAD 12 xcas    STOP  Kbd  X
1 fsolve(sin(x)=x-pi/2,x,-0.6..1.6,newton)
2.30988146001    M
2
```

Avec scilab

```
-->x=-1+%pi/2:0.0001:1+%pi/2;

-->y=sin(x);

-->z=x-%pi/2;

-->t=find(abs(y-z)<=0.0001)
 t  =

    17392.

-->a=-1+%pi/2+17392*0.0001
 a  =

    2.3099963267949
```

25

- La représentation des nombres se fait dans le système binaire.
- On ne peut représenter les entiers que de 0 à $2^{64} - 1$
- Avec Xcas les nombres peuvent être exacts ou approchés. Les calculs sont effectués en mode exact si tous les nombres qui interviennent sont exacts.
- La plus petite précision relative offerte par scilab est le nombre noté %eps qui vaut $2,220446049 \times 10^{-16}$
- soit 16 chiffres maximum de précision

25

- La représentation des nombres se fait dans le système binaire.
- On ne peut représenter les entiers que de 0 à $2^{64} - 1$
- Avec Xcas les nombres peuvent être exacts ou approchés. Les calculs sont effectués en mode exact si tous les nombres qui interviennent sont exacts.
- La plus petite précision relative offerte par scilab est le nombre noté %eps qui vaut $2,220446049 \times 10^{-16}$
- soit 16 chiffres maximum de précision

25

- La représentation des nombres se fait dans le système binaire.
- On ne peut représenter les entiers que de 0 à $2^{64} - 1$
- Avec Xcas les nombres peuvent être exacts ou approchés. Les calculs sont effectués en mode exact si tous les nombres qui interviennent sont exacts.
- La plus petite précision relative offerte par scilab est le nombre noté %eps qui vaut $2,220446049 \times 10^{-16}$
- soit 16 chiffres maximum de précision

25

- La représentation des nombres se fait dans le système binaire.
- On ne peut représenter les entiers que de 0 à $2^{64} - 1$
- Avec Xcas les nombres peuvent être exacts ou approchés. Les calculs sont effectués en mode exact si tous les nombres qui interviennent sont exacts.
- La plus petite précision relative offerte par scilab est le nombre noté %eps qui vaut $2,220446049 \times 10^{-16}$
- soit 16 chiffres maximum de précision

25

- La représentation des nombres se fait dans le système binaire.
- On ne peut représenter les entiers que de 0 à $2^{64} - 1$
- Avec Xcas les nombres peuvent être exacts ou approchés. Les calculs sont effectués en mode exact si tous les nombres qui interviennent sont exacts.
- La plus petite précision relative offerte par scilab est le nombre noté %eps qui vaut $2,220446049 \times 10^{-16}$
- soit 16 chiffres maximum de précision

26

- Ce qui peut conduire à quelques surprises :
- On considère le nombre $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Il est positif et son carré vaut 2.
- On a donc $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{2}$

26

- Ce qui peut conduire à quelques surprises :
- On considère le nombre $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Il est positif et son carré vaut 2.
- On a donc $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{2}$

26

- Ce qui peut conduire à quelques surprises :
- On considère le nombre $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Il est positif et son carré vaut 2.
- On a donc $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{2}$

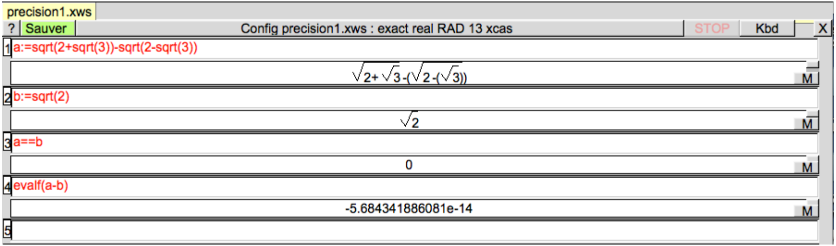
27

que nous donne scilab ?

```
-->a=sqrt(2+sqrt(3))-sqrt(2-sqrt(3))
 a  =

    1.4142135623731

-->b=sqrt(2)
 b  =

    1.4142135623731

-->a==b
 ans  =

  F

-->a-b
 ans  =

  - 2.220446049D-16
```

28

et Xcas ?



Ainsi, pour ces deux logiciels, il n'y a pas égalité entre ces deux nombres !

29

D'après l'IREM de Strasbourg. Avril 86

On cherche à calculer $9x^4 - y^4 + 2y^2$ pour $x = 10864$ et $y = 18817$
D'abord avec scilab :

```
x=10864;y=18817;
a=9*x^4-y^4+2*y^2;
b=(3*x^2+y^2)*(3*x^2-y^2)+2*y^2;
disp("a = "+string(a)+" ; b = "+string(b))
```

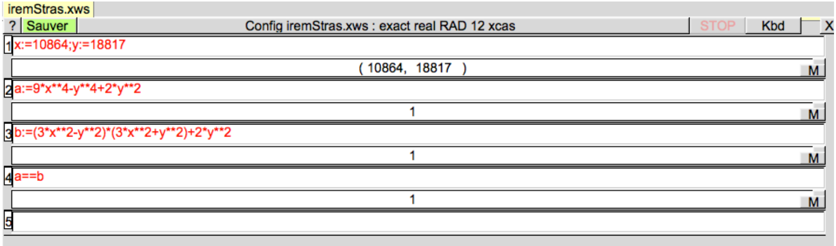
La réponse étonnante :

30

```
-->exec('/Users/pierrelapotre/scilab/iremStras1.sce', -1)

 a = 2 ; b = 1

-->format(20)

-->x**4
 ans  =

    13930253758038016.

-->y**4
 ans  =

    12537228453050112O.

-->
```

31

Et avec Xcas



Xcas a répondu correctement.

32

Mais Xcas peut aussi apporter des réponses curieuses

Unnamed | /Users/pierrelapotre/Xcas/imprecision.xws

? Sauver | Config imprecision.xws : exact real RAD 12 xcas | STOP | Kbd | X

1 a:=pi*pi;b:=pi;c:=a/b;

$$\left(\pi\cdot\pi,\ \pi,\ \frac{\pi\cdot\pi}{\pi} \right)$$

2 c==pi

0

3 evalf(c-pi)

-2.27373675443e-13

4 pi*pi/pi==pi

1

33

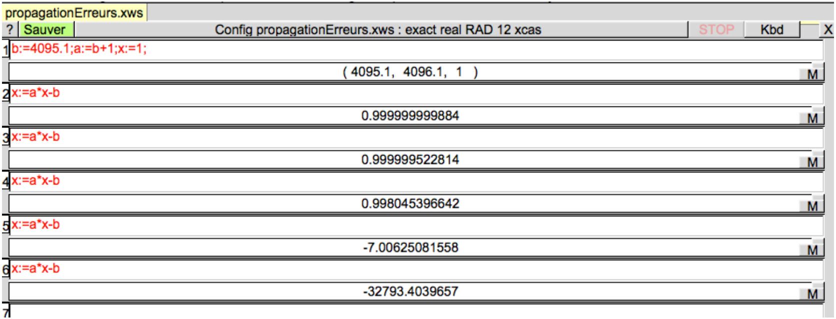
D'après Jean-François Colonna

http ://images.math.cnrs.fr/Un-ordinateur-est-il-une-parfaite.html

```
-->b=4095.1;a=b+1;x=1;

-->x=a*x-b;

-->x=a*x-b;

-->x=a*x-b;

-->x=a*x-b
 x  =

    1.0312591580864

-->x=a*x-b
 x  =

    129.04063743776
```

34

Xcas ne fait pas mieux



Remarque : $4095.1 = 2^{12} - 0.9$. Même phénomène avec $b = 63.1 = 2^6 - 0.9$ et aussi avec $b = 16777215.1 = 2^{24} - 0.9$

35

D'après V. Lefèvre et J-F. Muller

http ://images.math.cnrs.fr/Erreurs-en-arithmetique-des.html

Soit la suite définie par : $u_0 = \frac{3}{2}, u_1 = \frac{5}{3}$ et, pour tout n, naturel non nul

$$u_{n+1} = 2003 - \frac{6002}{u_n} + \frac{4000}{u_n u_{n-1}} \quad (1)$$

On montre (par récurrence) qu'une suite satisfaisant la relation (1) est de la forme

$$u_n = \frac{\alpha + \beta.2^{n+1} + \gamma.2000^{n+1}}{\alpha + \beta.2^n + \gamma.2000^n}$$

où α, β et γ dépendent de u_0 et u_1. On en déduit aisément que si γ est non nul, alors la suite tend vers 2000 tandis que si γ est nul mais pas β alors la suite tend vers 2.

36

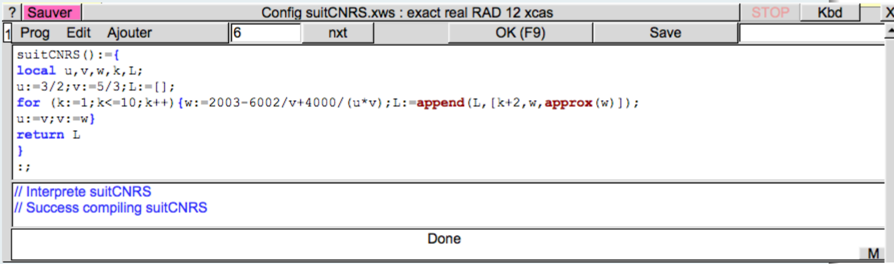
Les valeurs initiales u_0 et u_1 ont été choisies pour que γ soit nul. La suite tend donc vers 2. Mais, avec le calcul numérique, les erreurs d'arrondis font que γ n'est plus nul ce qui fait tendre (u_n) vers 2000.

```
3.     1.8000000000002
4.     1.888888889091
5.     1.9411766846349
6.     1.9699174994632
7.     2.2085111769288
8.     204.74869262199
9.     1982.5318590274
10.     1999.982412248
11.     1999.9999824292
12.     1999.9999999824
13.     2000.
14.     2000.
```

```
u(1)=3/2;u(2)=5/3;
for n=2:20
    u(n+1)=2003-6002/u(n)+4000/(u(n)*u(n-1))
    disp([n+1,u(n+1)])
end
```

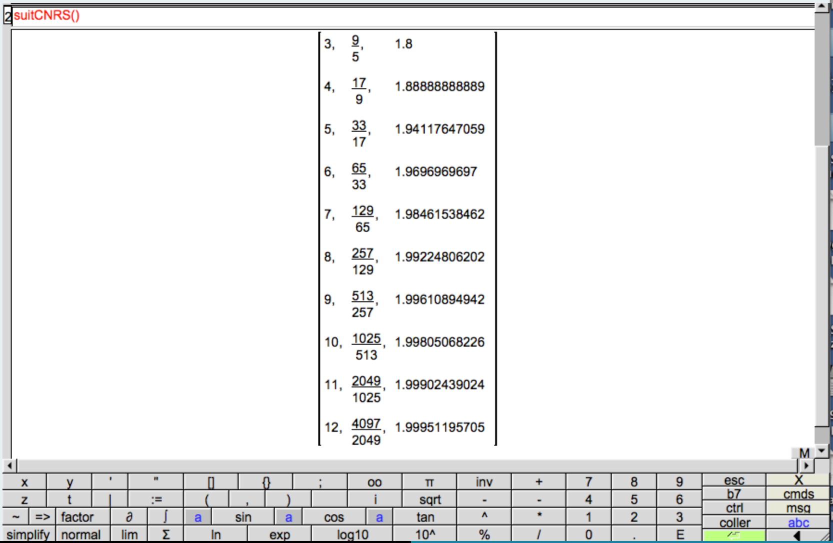
37

tandis qu'avec Xcas. . .



38

qui donne pour réponses. . .



39

Origines de ces anomalies

- Les nombres seront souvent tronqués ce qui implique des erreurs dues aux arrondis.
- Le %eps qui correspond pratiquement au zéro du logiciel.
- Le dépassement de la capacité du logiciel.
- Le codage en binaire des décimaux.

39

Origines de ces anomalies

- Les nombres seront souvent tronqués ce qui implique des erreurs dues aux arrondis.
- Le %eps qui correspond pratiquement au zéro du logiciel.
- Le dépassement de la capacité du logiciel.
- Le codage en binaire des décimaux.

39

Origines de ces anomalies

- Les nombres seront souvent tronqués ce qui implique des erreurs dues aux arrondis.
- Le %eps qui correspond pratiquement au zéro du logiciel.
- Le dépassement de la capacité du logiciel.
- Le codage en binaire des décimaux.

39

Origines de ces anomalies

- Les nombres seront souvent tronqués ce qui implique des erreurs dues aux arrondis.
- Le %eps qui correspond pratiquement au zéro du logiciel.
- Le dépassement de la capacité du logiciel.
- Le codage en binaire des décimaux.

40

Codage des décimaux

Pour convertir un nombre de l'intervalle $[0\,;1[$ en binaire, on utilise les puissances négatives de 2.
Par exemple, pour coder $0,3515625$ sur 8 bits, on effectue les opérations suivantes :
• on calcule de $0,3515625 \times 2^8 = 90$
• on retire au résultat la plus grande puissance de 2 possible, ici $90 - 2^6 = 26$
• on recommence jusqu'à obtenir 2 ou 1 : $26 - 2^4 = 10$
• $10 - 2^3 = 2$
Ainsi, $90 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2$ d'où
$0,3515625 = \dfrac{2^6 + 2^4 + 2^3 + 2}{2^8} = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{2^5} + \dfrac{1}{2^7}$ et

$$\boxed{0,3515625 = (0.01011010)_2}$$

Ce nombre sera ainsi codé sans problème.

41

Par contre, pour $0,2$ sur 8 bits :

$$\frac{1}{5}\times 2^8 = 51,2 = 51 + \frac{1}{5} = 2^5 + 2^4 + 2 + 1 + \frac{1}{5}$$

$\frac{1}{5} = \frac{2^5+2^4+2+1}{2^8} + \frac{1}{5}\times\frac{1}{2^8}$ et on constate qu'il va falloir tronquer :

$$\boxed{0,2 \approx (0.00110011)_2}$$

Dans le cas présent, on voit qu'on obtient facilement le codage sur 16 bits, 32 ...

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5} &= \frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{2^8}\\
&= \frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{2^8}\right)\frac{1}{2^8}\\
&= \frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^{11}}+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{2^{15}}+\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{2^{16}}\ldots etc
\end{aligned}$$

42

On trouve dans un manuel en usage dans les classes de 1$^{\text{ières}}$S le programme suivant que les élèves sont invités à tester :

```
x1=input("x1=");
y1=input("y1=");
x2=input("x2=");
y2=input("y2=");
r=x1*y2-y1*x2;
if r==0
  afficher("Les vecteurs sont colineaires")
else
  afficher("Les vecteurs ne sont pas colineaires")
end
```

On le teste donc avec des données fournies dans la même page du manuel et on obtient :

43

```
-->exec('/Users/pierrelapotre/scilab/colinHyperbole.sce', -1)
x1=1-sqrt(5)
y1=1
x2=5-sqrt(5)
y2=-sqrt(5)

 Les vecteurs ne sont pas colineaires

-->
```

Ce n'est pas la réponse attendue. Que se passe-t-il ?

44

Voici un programme modifié :

```
u=input("vecteur u = ");
v=input("vecteur v = ");
r=u(1)*v(2)-u(2)*v(1);
if abs(r/(u(1)*v(2)))<%eps then disp("u et v sont colineaires")
    else disp("u et v ne sont pas colineaires")
end
```

qui donne comme réponse :

45

```
-->exec('/Users/pierrelapotre/scilab/coliineariteV2.sce', -1)
vecteur u = [1-sqrt(5),1]
vecteur v = [5-sqrt(5),-sqrt(5)]

 u et v sont colineaires

-->
```

46

Avec scilab, les calculs se font avec des nombres flottants. La norme IEEE-754 (Institute of Electrical and Electronic Engineers) est utilisée pour représenter les nombres. Lorsqu'un calcul aboutit à un nombre non représentable par les nombres de cette norme, il faut l'arrondir. La façon de faire n'est pas unique.

En calcul numérique, il est peu prudent de tester l'égalité de deux nombres flottants. Il vaut mieux les comparer à %eps près.

47

Remerciements

http ://gradus-ad-mathematicam.fr

Mes remerciements vont à mes collègues du groupe AMECMI, en particulier Raymond Moché, Jean-Marc Duquesnoy et Emmanuel Ostenne pour leur aide et leur contribution pour la réalisation de cet exposé.
De tout cœur, merci.

Pierre Lapôtre.