Exposé JA 2013
Calcul formel ou calcul numérique

Le titre de cet exposé n'est pas « Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur le calcul numérique et le calcul formel sans jamais oser le demander » . Les rubriques d'aide des logiciels concernés contiennent des centaines de pages. Il serait difficile d'être exhaustif et, de toute façon, point n'est besoin de tout connaitre pour utiliser ces outils, tirer profit de leurs possibilités et intéresser les élèves.
Il est bon, également, de garder un œil critique sur les résultats obtenus.
Cet exposé sera donc une somme de remarques et d'observations tirées de l'usage et de la pratique de ces logiciels, essentiellement Xcas pour le calcul formel et scilab pour le calcul numérique.
Il faut d'abord rappeler qu'il s'agit de logiciels gratuits, faciles à installer sur un ordinateur ou, pour Xcas, utilisable en ligne, c'est-à-dire ne nécessitant pas d'installation.

Page 2 Et cela permet d'obtenir des résultats spectaculaires. Par exemple, en terminale S, on considère la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}\mathrm{e}^{1-x}$.
• Dans la zone de saisie de Xcas, on tape :

$$f(x) := sqrt(x)exp(1-x)$$

on valide (Envoyer ou retour chariot), le logiciel indique, en bleu, qu'il a compris qu'une fonction avait été définie.
• Dans la ligne de saisie suivante, on tape $f(1/2)$ (envoyer)
et la valeur exacte de $f(1/2)$ apparait ; on est bien en calcul formel, tandis que $f(0.5)$ donne une approximation décimale.
• Dans la ligne de saisie suivante, on tape $f1 := function\_diff(f)$ (f' n'est pas accepté), on valide et on a défini la fonction dérivée de f.
Sa présentation n'est pas très éclairante, on tente alors une factorisation avec le bouton "factor" ou on tape dans la zone de saisie suivante : $factor(f1(x))$ (envoyer) et, apparait une expression de la dérivée de f acceptable, car permettant une étude aisée de son signe.
Étude pouvant d'ailleurs être réalisée par le logiciel en demandant, par exemple, la résolution de l'inéquation : $f1(x) >= 0$.
Ceci est un rapide aperçu d'une des nombreuses possibilités d'un logiciel de calcul formel ou symbolique. De coûteuses calculatrices, autorisées au baccalauréat, permettent d'effectuer le même travail.

Page 3 Avec scilab, noter la façon de définir une fonction avec le "function" avec un "u" et le "endfunction" collé.
Noter aussi la boucle " for " pour créer une table de valeurs. On a choisi ici un pas de 0.01, c'est une solution de facilité pour cet exemple là qui permet d'atteindre effectivement le maximum.

Page 4 Autre manière de procéder pour montrer les possibilités de scilab et sa capacité à calculer sur les matrices (ici matrices à une ligne, vecteur-ligne).

Page 5 Voici ensuite le moyen d'obtenir une sortie graphique avec scilab ; on utilise des vecteurs définis avec la commande " linspace ", puis la commande " plot ". Il est possible de choisir la couleur, l'épaisseur du trait, les graduations sur les axes. . . etc.

Page 6 Intéressons-nous maintenant aux différents types de réponses fournies par les logiciels.
Pour commencer, j'ai choisi un exercice issu d'un examen de 1929 qui s'appelait brevet élémentaire.

Page 7 La mise en équation conduit à un problème du premier degré.

Page 8 L'utilisation de Xcas donne ici une solution sous forme décimale.
"resoudre" peut être tapé au clavier, dans ce cas mieux vaut préférer "solve" ou obtenu en déroulant le menu "scolaire", puis "seconde". En pensant à nommer "x" la solution, cela permet de procéder à la vérification qui suit.
On peut s'étonner de n'avoir pas de solution exacte avec le calcul formel.
C'est qu'une des données a été entrée sous forme décimale.

Page 9 Au lieu de diviser par 4.5, on multiplie par 2 puis on divise par 9 et maintenant Xcas fournit une solution exacte.
La première ligne a pour objet, avec "propFrac" d'améliorer la présentation de l'équation.

Page 10 Avec scilab, noter la commande " poly " avec entre crochets, séparés par un espace les coefficients dans l'ordre des puissances croissantes (on laisse le soin au logiciel d'effectuer les calculs), puis entre guillemets le nom choisi pour la variable et, toujours entre guillemets "coeff". On aurait pu définir un polynôme par ses racines.
La commande "roots" donne la racine du polynôme sous forme décimale approchée. C'est du calcul numérique. On a eu la précaution de donner un nom à cette racine (on a défini une variable), ce qui permet ensuite d'utiliser ce nom (contenu de la variable) pour évaluer la durée du trajet.

Page 11 Voyons à présent un problème du second degré.

Page 12 Sa mise en équation ne présente pas de difficultés. On a deux longueurs de 40 m par xm de large puis on tient compte pour les largeurs de 34 m qu'il faut considérer deux rectangles de dimensions $(34-2x)$m par xm. Le second membre représente le quart de l'aire totale : 34×40.

Page 13 La solution Xcas avec un premier résultat donnant les solutions exactes (on n'en retiendra qu'une seule qui soit cohérente avec le problème posé). Le deuxième résultat donne des solutions décimales approchées. Il a été obtenu en ajoutant un point après 85 ce qui a pour effet de considérer cette donnée comme un nombre décimal, le résultat est donc fourni lui aussi sous forme décimale. On aurait pu aussi utiliser la commande "evalf" à la suite du premier calcul.
La troisième ligne est une vérification : la surface de jardin restante est bien les trois quarts de la surface initiale.

Page 14 Pour scilab on retrouve la syntaxe de définition d'un polynôme déjà rencontrée.

Page 15 Probléme de géométrie conduisant à la résolution d'une équation du quatrième degré. La démonstration utilise le théorème de Pythagore et la propriété de Thalès.

Page 16 Démonstration : expressions des différentes propriétés permettant d'établir des relations entre les différentes grandeurs inconnues.

Page 17 Ainsi est obtenue cette équation du quatrième degré.

Page 18 Xcas fournit instantanément deux solutions décimales approchées. Il estime, à raison, que l'affichage de solutions exactes n'est pas utilisable.

Page 19 En effet, avec un autre logiciel de calcul formel (Maxima) on obtient le résultat suivant.

Page 20 Avec scilab on obtient des valeurs décimales des quatre solutions y compris les solutions complexes.

Page 21 Quittons les équations polynomiales avec cet exercice proposé en 1986 en classe de seconde.

Page 22 Les dessins et les explications conduisent à cette équation non polynomiale.

Page 23 Déception, avec "solve", Xcas ne sait pas faire. Il faut une commande plus élaborée pour obtenir une réponse approchée. La commande "fsolve" demande dans quel intervalle on cherche la solution et quelle méthode utiliser pour l'obtenir. Ici "newton".

Page 24 Scilab ne dispose pas de commande "solve", on crée un vecteur "x" dont les coordonnées sont en progression arithmétique, le premier terme est $-1+\frac{\pi}{2}$, la raison 0.0001 le dernier terme $1+\frac{\pi}{2}$ (dans le cas général, non nécessairement atteint). La fin de cette ligne de commande comporte un point-virgule pour éviter l'affichage de ce très long vecteur.
À la ligne suivante, le vecteur "y" est l'image des éléments du vecteur "x" par la fonction sinus (premier membre de l'équation), la suivante, le vecteur "z" est le premier vecteur dont toutes les coordonnées ont été diminuées de $\frac{\pi}{2}$(deuxième membre de l'équation).
À la ligne suivante, on demande à scilab la ou les positions des éléments homologues de "y" et de "z" dont l'écart en valeur absolue est inférieur à 0.0001.
Scilab trouve qu'à la 17392ième position cette condition est remplie. Il ne reste plus qu'à évaluer

la coordonnée correspondante de "x". On peut constater qu'à 10^{-4} près, on a obtenu une réponse satisfaisante.
Enfin, connaissant α, il restera, pour répondre à la question, à évaluer OH par $OH = \dfrac{AB/2}{\tan \alpha/2}$.

Page 25... On aborde maintenant les problèmes de précision, de représentation des nombres dans un ordinateur. Scilab ne peut considérer que les entiers de 0 à 2^{64}, soit environ 1.8×10^{19} les autres nombres, les nombres flottants, ne sont pas véritablement des nombres au sens mathématique ; ils ont perdu les propriétés d'associativité de l'addition et de la multiplication et la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition. Pour des raisons techniques, il est évident qu'ils sont en nombre fini dans un ordinateur alors qu'en mathématiques on considère des ensembles infinis de nombres. Cela pose évidemment quelques problèmes.

Page 26... On demandait jadis au élèves de seconde de justifier cette égalité. La preuve est fondée sur l'utilisation des identités remarquables.

Page 27 Scilab trouve que l'égalité est fausse. On constate que la valeur absolue de l'écart entre les deux nombres correspond à la précision relative offerte par scilab.

Page 28 Situation identique avec Xcas.(la réponse 0 signifie Faux, 1 signifie Vrai)

Page29 Avec de grands nombres on rencontre également des abérrations.

Page 30 La commande "format(20)" permet d'afficher davantage de chiffres. y ayant un chiffre des unités égal à 7, son carré se termine par un 9 et sa puissance quatrième par un 1 or scilab trouve un zéro en chiffre des unités.

Page 31 On constate que dans ce calcul Xcas répond ici correctement.

Page 32 Mais on peut faire dire des bêtises (au sens mathématiques) à Xcas.

Page 33 Ce chercheur du CNRS propose cet exemple de propagation des erreurs d'arrondis. Application avec scilab.

Page 34 Puis avec Xcas. Remarquer qu'en remplaçant 4095.1 par $\dfrac{40951}{10}$ il n'y a plus d'anomalie avec Xcas.

Page 35 Un autre exemple de propagation d'erreurs d'arrondis avec cette suite dont on peut conjecturer qu'elle converge vers 2000 alors que sa limite est 2.

Page 36 Un programme scilab écrit dans l'esprit "scilab pour le lycée". Il utilise beaucoup de variables.

Page 37 Un programme Xcas pour l'étude des premiers termes de cette suite. Noter le nom attribué au programme suivi d'une parenthèse ouvrante et d'une parenthèse fermante. Il n'y a rien entre ces parenthèses car le programme ne dépend d'aucun paramètre. Noter aussi l'obligation de déclarer les variables locales, c'est-à-dire celles utilisées dans ce programme. Observer que l'on crée une liste vide qui est complétée au fur et à mesure. On demande en sortie l'affichage du rang du terme, sa valeur exacte et une approximation de cette valeur.
Remarquer que ce programme n'utilise que trois variables mais leur contenu change.

Page 38 La réponse est conforme à ce qui est attendu.

Page 39 Origines des anomalies constatées.

Page 40 Codage des décimaux, exemple de 0.3515625.

Page 41 Codage de 0.2.

Page 42 Exercice trouvé dans un manuel qui n'a pas pris en compte le rôle de $\%eps$ dans les tests d'égalité.

Page 43 Réponse étonnante.

Page 44 Programme modifié prenant en compte %eps.

Page 45 Réponse attendue.

Page 46 Nombres flottants utilisés par scilab.

Page 47 Fin.