DUPLICATION DU CUBE

jeudi 12 avril 2013

Une pensée pour Bélaïd Djellali..........

Jean-Marc Duquesnoy

Lycée André Malraux Béthune

AVERTISSEMENT : Le document qui suit n'a pas l'ambition, bien au contraire, de donner une information exhaustive sur l'historique de la duplication du cube. Il a essentiellement pour objectif de proposer à une classe de terminale S quelques activités géométriques, analytiques ou algorithmiques, intégrées dans une progression annuelle, dont le fil rouge est la racine cubique de 2.
Il n'aura échapper à personne que les fonctions puissances ne sont plus inscrites au programme de mathématiques en terminale S depuis la rentrée 2012. C'est donc en AP que le nombre $2^{1/3}$ sera introduit dans le cadre d'une activité dont le thème est l'étude de l'évolution d'une tumeur cancéreuse sans ou avec traitement.

Table des matières

1 Introduction

La duplication du cube est l'un des trois principaux problèmes non résolus des mathématiques grecques(les deux autres étant la quadrature du cercle [1] et la trisection d'un angle [2]). Problème posé au moins cinq siècles avant J-C, il n'a été vraiment résolu qu'au dix-neuvième siècle, lorsqu'on on a su caractériser les équations polynomiales résolubles à l'aide des quatre opérations et des extractions de racines.

Il pourra être intéressant de consulter le site d'Alain Juhel [3] qui a consacré quelques pages au sujet.

Le but de ce document, très fortement inspiré d'un document d'accompagnement-*Mathématiques classes terminales de la série scientifique et de la série économique et sociale*-, est de découvrir plusieurs approches historiques du problème de la duplication du cube, mais aussi d'utiliser les outils **TICE** pour, dans chaque activité proposée, introduire, expérimenter, observer, conjecturer et(ou) démontrer, et ceci en parallèle de la progression annuelle.

J'ai fait le choix discutable dans un document traitant de l'historique de la découverte du nombre $2^{1/3}$ d'introduire ce nombre dans une première activité dont le sujet est l'étude de l'évolution d'une tumeur cancéreuse sans, puis avec traitement.

Cela pourra surprendre, dérouter ou « scandaliser ».

Je suis persuadé qu'il est important pour l'enseignement de notre discipline de montrer le lien entre l'histoire des mathématiques et les très nombreuses applications contemporaines, en médecine en ce qui concerne le prochain paragraphe, afin de répondre aux questions récurrentes de quelques-uns de nos élèves les plus réticents à l'apprentissage des mathématiques, à savoir :

- à quoi ça sert les maths ?
- ça vient d'où ?
- qui a trouvé ça ?
- etc...

1. http://fr.wikipedia.org/wiki/Quadrature_du_cercle
2. http://fr.wikipedia.org/wiki/Trisection_de_l'angle
3. http://home.nordnet.fr/~ajuhel/Delos/Delos_pb0.html

2 Évolution d'une tumeur cancéreuse

Remarques :

- **Ce qui suit aura été traité en *Accompagnement Personnalisé*. On pourra consulter le document *AP-2012-2013-SYNTHESE.pdf***
- **L'AP permet en effet de faire de l'approfondissement, et donc de sauter l'obstacle de l'absence des fonctions puissances dans le programme.**
- **La première partie2.1, indépendante du sujet de l'exposé, permet néanmoins de légitimer la modélisation de la partie suivante2.2.**

Tout cancer débute par la production d'une cellule cancéreuse. Au cours du temps, cette cellule va produire un ensemble de cellules filles appelé *tumeur*. On observe que le temps de doublement T d'une tumeur cancéreuse (c'est-à-dire le temps mis par cette tumeur pour doubler son nombre de cellules) est sensiblement constant et dépend du type de cancer. Ce temps de doublement, appelé *période* ci-dessous, peut être évalué sur des cellules prélevées dans la tumeur et mises en culture. Par exemple, pour un cancer du sein, $T = 14$ semaines ; pour certains cancers du poumon $T = 21$ semaines et pour les cancers du colon et du rectum, $T = 90$ semaines.

Supposons qu'une cellule cancéreuse apparaît dans l'organisme d'un individu.

Question :

▶ comment modéliser le nombre de cellules cancéreuses qui composeront la tumeur engendrée, **sans ou avec traitement(s)**, après une période, 2 périodes, 3 périodes, etc... ?

2.1 Période 1 : Sans traitement

Problématique : Modélisation discrète

1. L'algorithme suivant décrit le processus de division cellulaire :

```
Algorithme Évolution au cours de n périodes
Variable
    n : entier naturel
    u : entier naturel
Début
    Saisir la valeur de l'entier n
    u ← 1
    Pour i variant de 1 à n Faire
        u ← 2 × u
    Fin Pour
    Afficher u
Fin
```

Cette partie aura été l'occasion pour certains élèves de consolider les notions de suite géométrique et de modélisation « simple ».

2. **Problème posé aux élèves** : au bout de combien de périodes découvre-t-on une tumeur ? Actuellement, la plus petite tumeur cancéreuse détectable est constituée de 10^9 cellules, ce qui correspond à peu près à une tumeur de masse égale à 1 gramme.

Question : si on découvre aujourd'hui une tumeur ayant 10^9 cellules, depuis combien de périodes la première cellule cancéreuse est-elle apparue ?

L'algorithme suivant a été mis en place :

```
Algorithme Nombre de périodes avant la détection d'une tumeur
Variable
    n : entier naturel
    u : entier naturel
    A : nombre réel
Début
    Saisir la valeur du nombre réel A
    u ← 1
    n ← 0
    Tant que u < A Faire
        u ← 2 × u
    Fin Tant que
    Afficher n
Fin
```

3. Les questions supplémentaires qui suivent ont été proposées aux élèves

a. Après le traitement d'un cancer du sein ($T = 14$ semaines), il est d'usage de surveiller la personne concernée sans traitement nouveau sur une période de 5 ans. Sachant qu'un traitement chirurgical peut laisser en résidu indétectable une masse tumorale de 10^3 cellules, expliquer le choix de 5 ans comme durée de surveillance.

b. Pour le cancer du colon (T=90 semaines), on préconise un dépistage à partir de 50 ans. Expliquer ce choix. Justifier la réponse.

2.2 Période 2 : Une chimiothérapie

Les traitements par chimiothérapie détruisent les cellules cancéreuses, mais aussi des cellules saines. Il est donc nécessaire de laisser un temps de repos dans chaque cycle de traitement. Ainsi chaque cycle de traitement est composé de deux phases : une phase d'administration (considérée comme quasi instantanée) d'un (ou des) médicaments, suivie d'une phase de repos de durée τ (usuellement $\tau = 21$ jours, ou τ =3 semaines). Au cours de cette période de repos, la tumeur recommence à croître, selon le processus présenté dans la partie précédente.

Faisons l'hypothèse que l'on administre une chimiothérapie A.

On veut traiter une tumeur cancéreuse par une série de cycles consécutifs, chacun de durée τ. On suppose qu'après chaque phase de traitement par le médicament A, le nombre x des cellules de la tumeur sensibles à A, est multiplié par un coefficient $\alpha \in]0;1[$($1-\alpha$ quantifie donc l'efficacité du médicament A).

Autrement dit, Le nombre $(1-\alpha)x$ représente le nombre de cellules détruites et αx le nombre de cellules encore présentes à l'issue de cette chimiothérapie A.

Modélisation : Si x_0 représente le nombre de cellules cancéreuses au départ du traitement, que vaut x_1 à l'issue d'une cure de chimiothérapie, et comment exprimer, pour tout entier naturel n, x_{n+1} en fonction de x_n ?

Après quelques atermoiements, les élèves modélisent la suite (x_n) de la façon suivante :

$$x_0 = 10^9, \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ x_{n+1} = 2^{\tau/T} \times \alpha \times x_n$$

Ils constatent, à l'aide du logiciel *Scilab*, que les valeurs de α et de T influencent l'évolution de la suite (x_n).

La partie « modélisation »aura été très délicate pour les élèves.

Étude d'un cas particulier, et c'est ici que l'on retrouve le fil de notre exposé :

Si on fixe $\tau = 3$ et $T = 9$ semaines, et si x_n représente le nombre de cellules cancéreuses à l'issue de n cures de chimiothérapie, on montre que la suite (x_n) est géométrique de raison : $\alpha \times 2^{1/3}$.

3 Approches historiques

3.1 Texte attribué à Ératosthène

D'après une certaine légende rapportée par *Ératosthène* dans *Le Platonicien* et par *Théon de Smyrne1* dans son *Arithmétique*, les habitants de Délos, victimes d'une épidémie de peste, demandèrent à l'oracle de Delphes comment faire cesser cette épidémie. La réponse de l'oracle fut qu'il fallait doubler l'autel consacré à Apollon, autel dont la forme était un cube parfait. Les architectes allèrent trouver *Platon* pour savoir comment faire. Ce dernier leur répondit que le dieu n'avait certainement pas besoin d'un autel double, mais qu'il leur faisait reproche, par l'intermédiaire de l'oracle, de négliger la géométrie.

Tandis que tous hésitaient depuis longtemps, *Hippocrate de Chio* le premier trouva que, si entre deux droites données, dont la plus grande est double de la plus petite, on parvient à obtenir deux moyennes proportionnelles en proportion continue, la duplication du cube sera obtenue ; et ainsi, son hésitation se transforma en une autre hésitation non moins grande.

D'après *Dedron* P. et *Itard J., Mathématiques et mathématiciens, Magnard, 1972, qui soulignent le caractère non confirmé de cette source.*

3.2 Cas du carré

La duplication du carré se résout facilement :

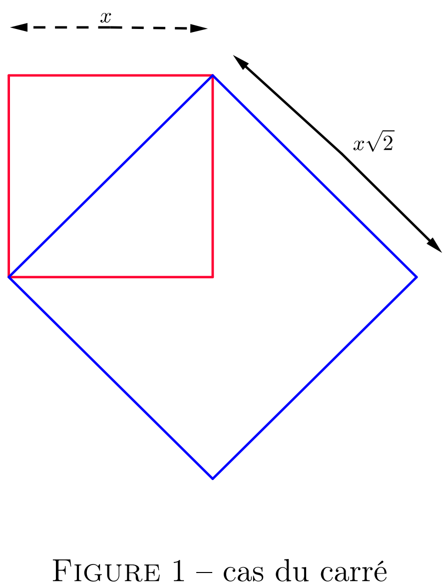


FIGURE 1 – cas du carré

Il suffit de prendre la diagonale du carré de côté x qui vaut $x\sqrt{2}$ et dans ce cas alors, si l'aire du premier carré vaut x^2, celle du deuxième vaut $2x^2$ et on a bien doublé l'aire du premier carré.

4 Explications

En notations modernes, construire un cube de volume double de celui d'un cube de côté a donné revient à chercher le côté x tel que $x^3 = 2a^3$, a étant le côté du cube initial. Ce qui nous donnera plus tard

$$x = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$$

Le nombre chez les Grecs.

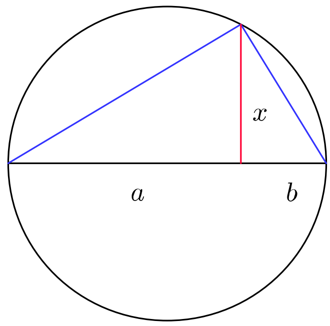


FIGURE 2 – le nombre chez les grecs

Pour les Grecs, un nombre est avant tout un rapport de longueurs ; construire un nombre donné, c'est donc construire deux segments (« droites »dans le texte ci-dessus) dans le rapport voulu, les seules constructions permises se faisant à la règle et au compas. Une « droite »x est moyenne de deux autres « droites » a et b si $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$; x est alors moyenne géométrique de a et b.

Donc, insérer deux moyennes proportionnelles, comme le propose *Hippocrate de Chio*, entre deux longueurs données a et b, c'est chercher deux autres longueurs x et y telles que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$;

on a alors $\left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a}{x} * \frac{x}{y} * \frac{y}{b}$,

soit avec $a = 1$ et $b = 2$, $x = \sqrt[3]{2}$.

5 Une solution attribuée à Platon

Sur la Figure 3, à partir de A et M sur les droites perpendiculaires (OA) et (OB), on construit la perpendiculaire en M à (AM) qui coupe (OA) en N, puis la perpendiculaire en N à (MN) qui coupe (OB) en P. On a alors

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OM}{ON} = \frac{ON}{OP}$$

on a ainsi inséré deux moyennes proportionnelles OM et ON entre OA et OP.

Sur le plan théorique, en déplaçant M continûment sur sa demi-droite (consulter 8.2), le point P parcourt toute la demi-droite $[OB)$: il passe une fois et une seule par toute position donnée sur cette demi-droite. Il y a là l'intervention intuitive d'un principe de continuité, qui assure l'existence d'une position M pour laquelle P est confondu avec B ; alors $OM = \sqrt[3]{2}$.

En pratique, Platon a conçu un instrument s'appuyant sur le schéma ci-dessus ; du point de vue des Grecs, cette méthode fournit une approximation de la solution (l'existence théorique de la solution posant un problème crucial), mais aucune construction à la règle et au compas n'a pu (et pour cause) être trouvée.

Sur la Figure 4, on a déplacé le point M de telle sorte que les points P et B soient confondus. Dans ce cas-là, la distance OM vaut alors $\sqrt[3]{2}$

Aujourd'hui, un logiciel de géométrie dynamique, en particulier ***GeoGebra*** , permet d'avoir l'impression de déplacer continûment le point M (en fait, on le déplace pas à pas et on s'arrête

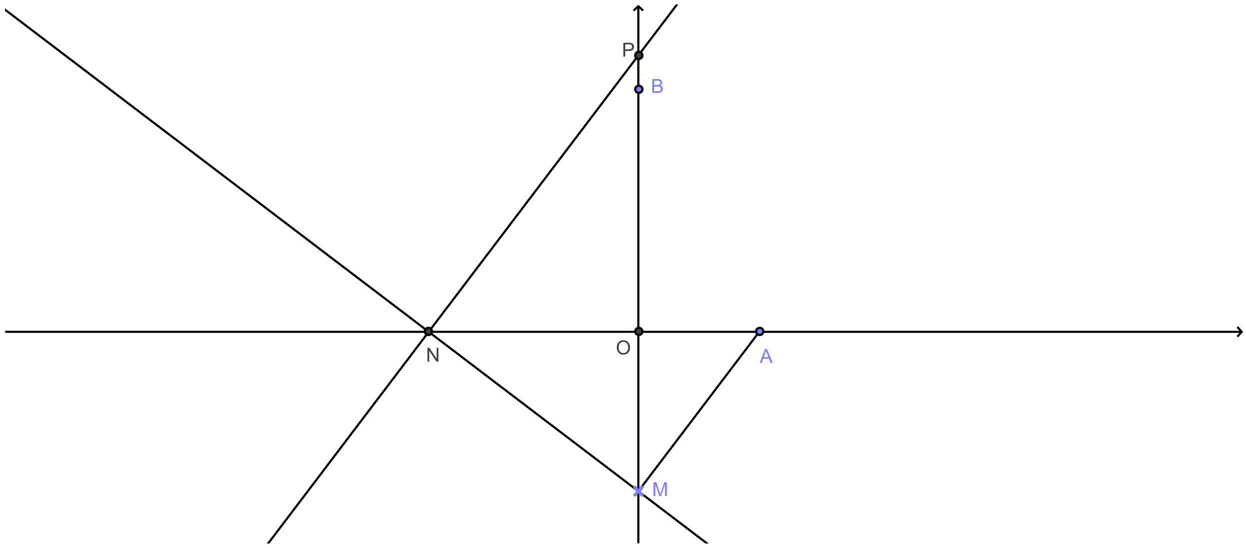


FIGURE 3 – une construction

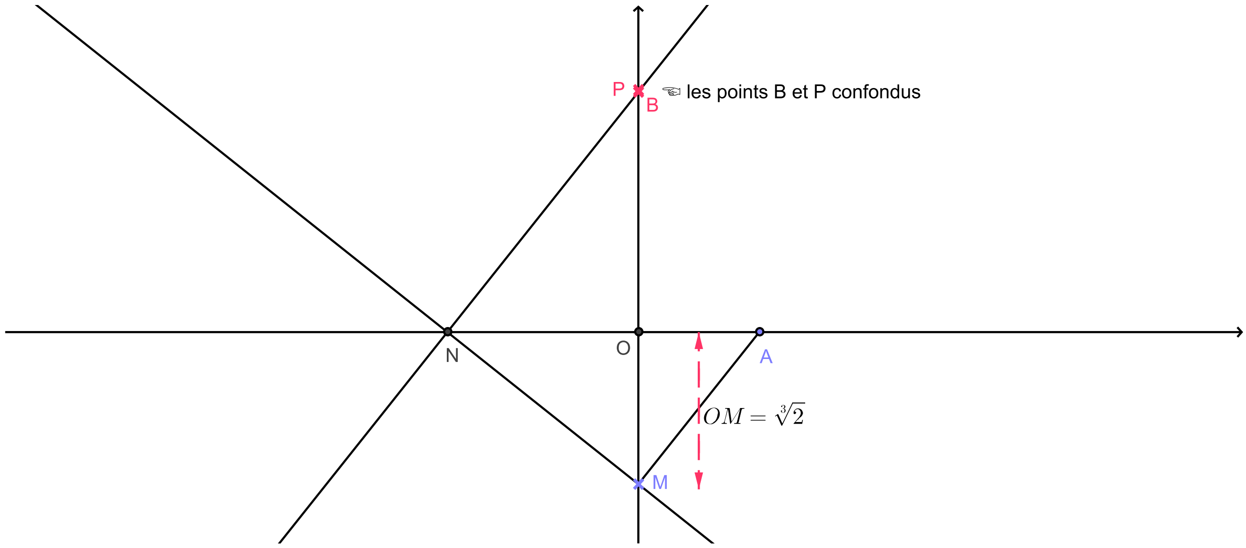


FIGURE 4 – une solution

lorsque la précision de dessin ne permet plus de distinguer B et P ; mais, il ne s'agit que d'une solution approximative. Pour une solution exacte au sens de la constructibilité à la règle et au compas, les points doivent être obtenus par intersection de deux droites, de deux cercles ou d'une droite et d'un cercle au terme d'une construction ne faisant intervenir qu'un nombre fini d'étapes.

Ce sera l'objet du prochain paragraphe.

6 Une solution attribuée à Dioclès

La figure décrite ci-après peut être étudiée avec ***GeoGebra***(on pourra consulter 8.3).

On se donne un cercle de diamètre [OI] (on peut supposer OI $= 1$) et la perpendiculaire Δ à (OI) en I. On fait tourner une droite D autour du point O : elle coupe le cercle en un deuxième point M et la droite Δ en N ; à tout point M, on fait correspondre le point M' de [ON] tel que $\overrightarrow{NM'} = \overrightarrow{MO}$.(On note respectivement m et m' les projetés orthogonaux de M et M' sur l'axe des abscisses.) Le lieu du point M' quand M décrit le cercle est appelé *cissoïde de Dioclès* (cf :*GeoGebra*). (Cette courbe a été effectivement introduite par *Dioclès* – IIe siècle avant J.-C. – pour résoudre le problème de la duplication du cube.)

L'équation de la cissoïde, dans le repère (O,I,J), s'obtient en utilisant les triangles semblables.

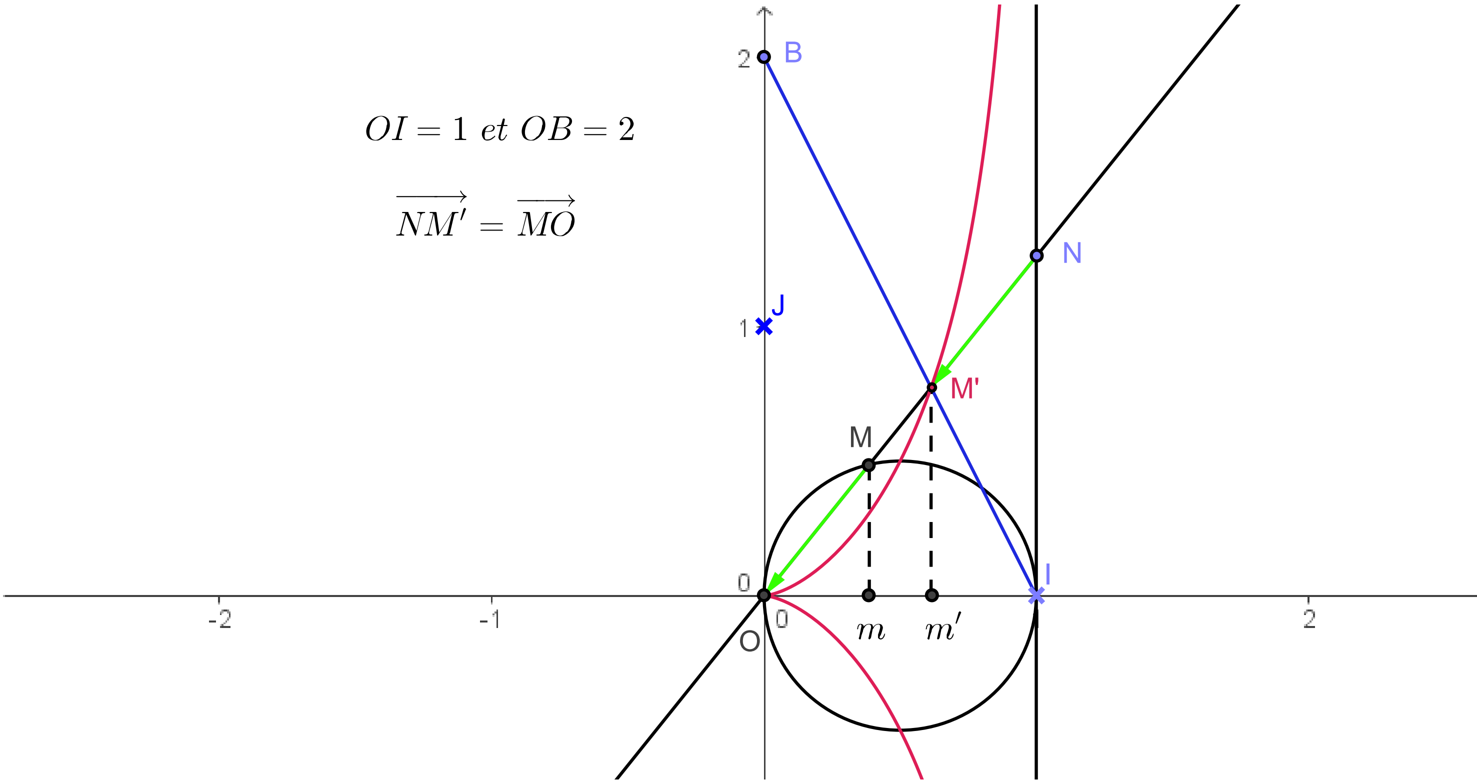


FIGURE 5 – la cissoïde

On a :

$$Mm^2 = Om.mI$$

car OMI est rectangle en M, donc

$$Mm^2 = Om.Om'$$

car $OM' = MN$, donc $Om' = mI$, d'où

D'où

$$\frac{Om'}{Om} = \frac{Mm^2}{Om^2} = \frac{Mm'^2}{Om'^2}$$

et

$$\frac{Om'^3}{Om} = M'm'^2$$

En notant $x = Om'$ et $y = M'm'$, on a $Om = m'I = 1 - x$ et on obtient l'équation de la cissoïde

$$y^2 = \frac{x^3}{1-x}$$

Dans le cas où M' est « au-dessus », on peut alors étudier la fonction f définie par :

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

Pour étudier cette fonction, on pourra utiliser le logiciel de calcul formel ***wxMaxima*** (on pourra consulter 8.4).

Pour obtenir une construction de $\sqrt[3]{2}$, il suffit maintenant de placer sur un axe perpendiculaire en O à (OI) le point B tel que $OB = 2$. Au plan théorique, soit M' le point d'intersection de (IB) et de la cissoïde.

Alors on pourra montrer que $IN = \sqrt[3]{2}$.

On montre ainsi l'existence de la solution ; toutefois, on ne peut tracer qu'un nombre fini de points de la cissoïde et il s'agit, là aussi, d'une solution approchée.

7 Questions au tour de $2^{1/3}$

Nous avons vu l'historique du nombre $2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$ et différentes méthodes d'introduction et de constructions géométriques. (consulter 8.1, 8.2, 8.3 et 8.4)

Voici quelques questions mathématiques qui peuvent se poser concernant l'existence, l'irrationalité, la localisation et des valeurs approchées de $2^{1/3}$, avec quelques éléments de réponse.

1. *Existence de la racine cubique de 2.*

La stricte monotonie et la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction cube donneront une justification de l'existence de $\sqrt[3]{2}$.(consulter 8.5)

2. *La racine cubique de 2 est-elle un nombre rationnel ?*

On peut mettre en place un raisonnement par l'absurde.(consulter 8.6)

3. *Localisation de la racine cubique de 2.*

On pourra procéder par dichotomie.(consulter 8.7)

4. *Méthode permettant l'extraction de la racine cubique de 2 et étude de suites convergeant vers ce nombre.*

La méthode de Newton (voir ici `http://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_de_Newton`) nous donnera le moyen d'extraire la racine cubique de deux.(consulter 8.8)

8 Activités TICE, le fil rouge étant la duplication du cube

8.1 Activité 1 : Prise en main de *GeoGebra*

Le but de cette activité est la prise en main de quelques fonctions du logiciel : symétrie, trace, lieu et le tracé de la représentation graphique d'une fonction sur un intervalle donné. Il est entendu que la démonstration de l'existence du nombre $\sqrt[3]{y}$ se fera de manière rigoureuse par la suite.

1. Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, tracer la courbe représentative C_f de la fonction $f : x \in [0; +\infty[\longmapsto x^3$ ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

2. Tracer un point M sur C_f d'abscisse x, x étant un réel variant entre 0 et 3 (on pourra créer un curseur).

3. Tracer le symétrique, noté M', de M par rapport à la droite Δ.

4. Faire apparaître à l'écran les coordonnées des points M et M' (5 chiffres significatifs).

5. Faire varier le réel x dans l'intervalle $[0; 3]$. Que constate-t-on quant aux coordonnées des deux points ?

6. Faire apparaître la trace des points M' lorsque M décrit C_f.

8.2 Activité 2 : Prise en main de *GeoGebra* suite

1. Placer les points $A(1; 0)$ et $B(0; 2)$ dans $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$orthonormé.

2. Soit $M(0; x)$, x étant un réel strictement négatif. Placer le point M et tracer le segment $[AM]$ ainsi que la droite perpendiculaire à $[AM]$ passant par M. Cette droite coupe l'axe des abscisses en N.

La droite perpendiculaire à (MN) passant par N coupe l'axe des ordonnées en P.

Faire apparaître les deux points N et P, ainsi que les coordonnées de M.

3. Déplacer le point M de telle manière que les points B et P soient confondus. Dans ce cas, calculer la valeur exacte de x.

8.3 Activité 3 : la Cissoïde

Soit I le point de coordonnées $(1;0)$ dans $(\mathrm{O},\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$et Δ la droite perpendiculaire à (OI) passant par I. On note $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[OI]$.

$\mathcal{D}$ est une droite passant par O. Elle coupe le cercle $\mathcal{C}$ en un deuxième point M et Δ en N.

Au point M on associe le point $M' \in [ON]$ vérifiant $\overrightarrow{NM'} = \overrightarrow{MO}$.

On note respectivement m et m' les projetés orthogonaux de M et M' sur l'axe des abscisses.

1. Faire la figure à l'aide du logiciel **GeoGebra**.
2. Tracer le lieu des points M' lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$. On notera $\mathcal{C}'$ ce lieu.
3. Placer sur la figure le point $B(0;2)$. Tracer le segment $[IB]$.
4. Déplacer M pour que $M' \in [IB] \cap \mathcal{C}'$.
5. Démontrer que, si l'on se place dans la situation $M' \in (IB) \cap \mathcal{C}'$, alors $IN = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$

8.4 Activité 4 : Étude de la fonction $f : x \longmapsto x\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$

À l'aide du logiciel de calcul formel ***wxMaxima***, étudier la fonction $f : x \longmapsto x\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$. On notera C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(\mathrm{O},\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$.

1. Pour quelles valeurs du réel x $f(x)$ existe-t-il ?
2. Déterminer les limites de $f(x)$ aux bornes de son ensemble de définition. Que peut-on en déduire graphiquement ?
3. Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0. En déduire une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0.
4. Étudier les variations de f.
5. Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(\mathrm{O},\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$.

Voici une solution [4] faisant appel au logiciel de calcul formel wxMaxima :

Déclarons la fonction f définie sur [0 ;1[par $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$:

```
(%i1) assume(x>=0 and x<1);
```

(%o1) $[x >= 0, x < 1]$

```
(%i2) f(x):=x*sqrt(x/(1-x));
```

(%o2) $\mathrm{f}(x) := x\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$

Calculons la limite de f en 1

```
(%i3) limit(f(x),x,1,minus);
```

(%o3) ∞

Calculons la dérivée de f, factorisons l'expression , puis déterminons-en le signe sur [0 ;1[

```
(%i11) diff(f(x),x);factor(%);sign(%);
```

(%o11) $$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2\,(1-x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\,\sqrt{x}}{2\,\sqrt{1-x}}$$

4. Permet à l'élève de valider ses calculs, de trouver une solution s'il bloque sur une question, ou au professeur de présenter un corrigé

(%o12) $\dfrac{\sqrt{x}\,(2\,x-3)}{2\,\sqrt{1-x}\,(x-1)}$

(%o13) pz

Comment aurait-on pu étudier la dérivabilité de f en 0 ?

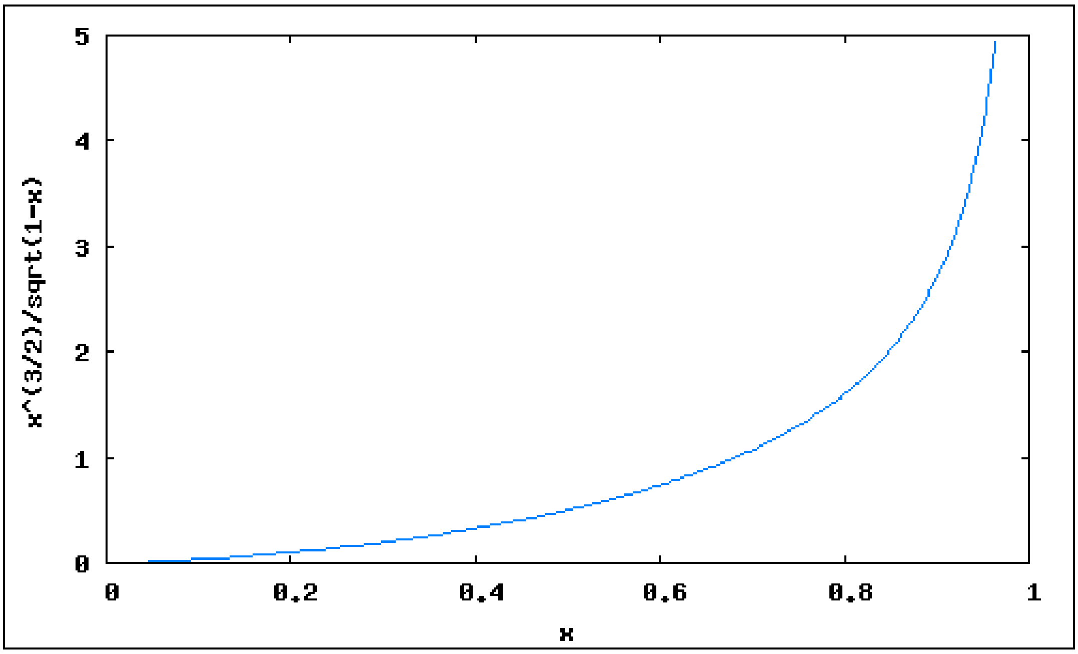
```
(%i15) limit((f(x)-f(0))/x,x,0,plus);
```

(%o15) 0

Les deux limites calculées permettent d'en déduire l'existence d'une asymptote d'équation $x = 1$ et d'une tangente parallèle à l'axe des abscisses à l'origine

```
(%i17) wxplot2d([f(x)], [x,0,1],[y,0,5])$
```

(%o17)



8.5 Activité 5 : Existence de la racine cubique de 2

On considère la fonction f qui, à tout nombre réel x, associe $f(x) = x^3$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On affiche la courbe (C_f).

Que signifie graphiquement l'expression « Résoudre[5] l'équation $x^3 = 2$ » ?

La lecture graphique[6] permet de dire qu'il existe un **unique** nombre réel, que l'on notera α, vérifiant

$$\alpha^3 = 2 \Longleftrightarrow \alpha^3 - 2 = 0$$

La *continuité et la stricte monotonie* de la fonction cube sur $\mathbb{R}$ permettent de démontrer rigoureusement l'existence de α.

5. Permet de réinvestir le vocabulaire *image, antécédent, équation*
6. On peut localiser α entre 1 et 2

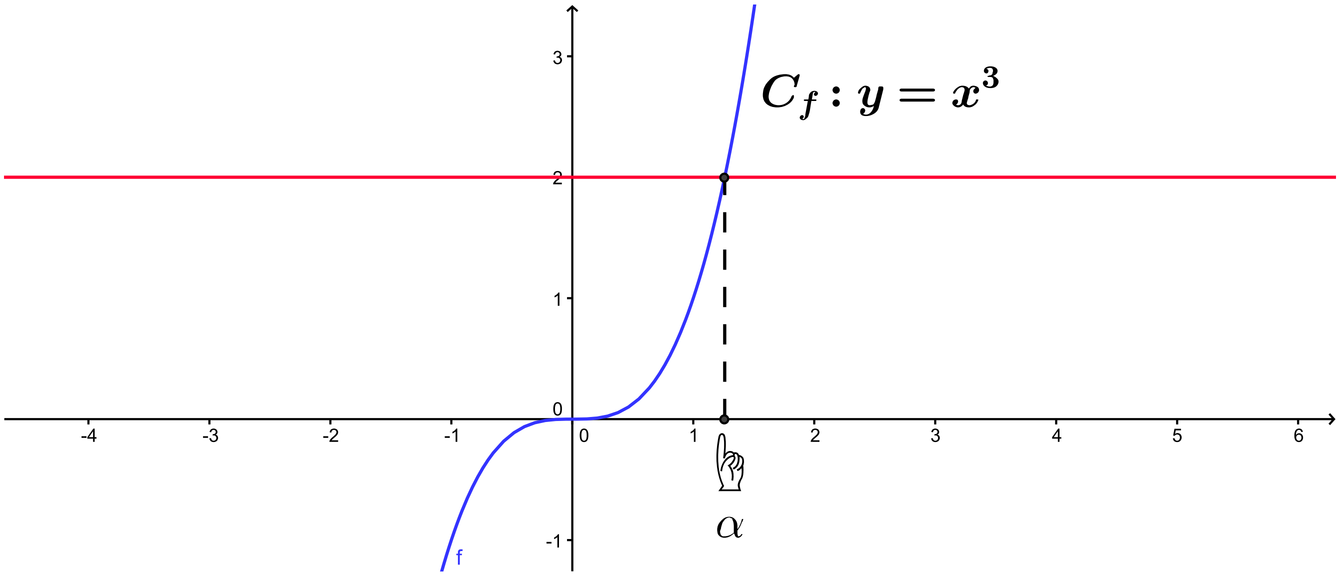


FIGURE 6 – la fonction cube

8.6 Activité 6 : Comment localiser α ?

On se propose d'utiliser la méthode de dichotomie.

1. Interpréter l'algorithme qui suit

Algorithme Algo1

<u>Entrée</u>

Saisir la valeur de *epsilon* { *epsilon est un nombre réel strictement positif* }

Saisir la valeur de a { *a est un nombre réel* }

Saisir la valeur de b { *b est un nombre réel, $a < b$* }

<u>Traitement</u>

Si $(a^3 - 2) \times (b^3 - 2) \geqslant 0$ **Alors**

  Afficher « $\alpha \notin [a; b]$ »

Sinon

  Tant que $b - a \geqslant epsilon$ **Faire**

    c prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$

    Si $(a^3 - 2) \times (c^3 - 2) \leqslant 0$ **Alors**

      b prend la valeur c

    Sinon

      a prend la valeur c

    FinSi

  Fin Tant que

FinSi

<u>Sortie</u>

Afficher « $\alpha \in [a; b]$ »

2. Coder en langage *Scilab* l'algorithme précédent, l'exécuter plusieurs fois en saisissant successivement en entrée $epsilon = 0.1$, $epsilon = 0.01$, puis $epsilon = 0.001$.

3. Déterminer une valeur approchée par défaut de α à 10^{-10} près.

Pour la suite, on notera $\alpha = \sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$.

8.7 Activité 7 : $\sqrt[3]{2}$ est un nombre irrationnel

Démontrer[7] par l'absurde que $\sqrt[3]{2}$ ne peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers naturels premiers entre eux.

8.8 Activité 8 : Étude d'une suite qui converge vers α

8.8.1 Une version algorithmique

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$, où la fonction g est définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{2}{3}.(x + \frac{1}{x^2})$.

Le réel α est défini comme l'unique solution de l'équation $x^3 = 2$.

1. **a.** Compléter le graphique de la Figure 7 afin d'afficher sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite u. (on laissera les traits de construction apparents)

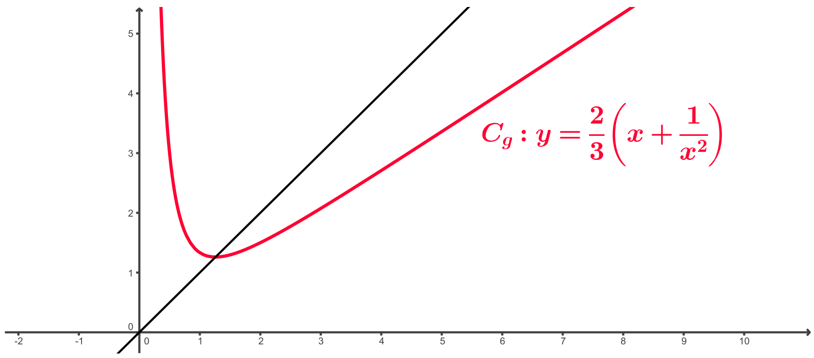


FIGURE 7 – Faire apparaître les premiers termes de la suite u

b. Coder en langage *Scilab* un algorithme, que l'on appellera ALGO2, qui calcule et affiche en sortie les trente premiers termes de la suite u.

c. Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite u ?

2. **a.** Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est à termes strictement positifs.

b. Étudier les variations de g sur $]0; +\infty[$.

c. Tracer la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal.

d. Démontrer que, pour tout x réel strictement positif, $g(x) \geqslant \alpha$.

e. Démontrer que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant \alpha$.

f. Étudier les variations de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = g(x) - x$.

g. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

h. Déduire de ce qui précède que la suite u est convergente.(on notera l sa limite)

i. Démontrer que l est solution de l'équation $g(l) = l$, puis que $l = \alpha$.

j. Compléter l'algorithmeALGO2 de la question 1. b. afin de déterminer une valeur approchée de α à 10^{-10} près.

7. En enseignement de spécialité.

8.8.2 Une version utilisant le calcul formel

Dans ce qui suit, les justifications des résultats affichés demanderont à l'élève une recherche plus approfondie.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}\left(u_n + \frac{1}{u_n^2}\right)$$

Étudier le comportement de la suite (u_n).

Commençons par définir la fonction associée à cette suite, $g : x \mapsto \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{x^2}\right)$

```
(%i1)    g(x):=2/3*(x+1/x^2);assume(x>0);
```

(%o1) $\mathrm{g}(x) := \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{x^2}\right)$

(%o2) $[x > 0]$

L'intervalle $]0, +\infty[$ est *stable* par g, *i.e.* si

$x \in]0, +\infty[$ alors $g(x)$ est défini et $g(x) \in]0, +\infty[$ (facile à établir). Ceci permet de justifier l'*existence* de la suite u :

```
(%i3)   u[n]:=g(u[n-1]);u[0]:2;
```

(%o3) $u_n := \mathrm{g}(u_{n-1})$

(%o4) 2

Calculons les premiers termes de la suite u :

```
(%i5)   premierstermes:makelist(u[i],i,0,5);
```

(%o5) $[2, \frac{3}{2}, \frac{35}{27}, \frac{125116}{99225}, \frac{29354972695765 21}{2329904227757400}, \frac{379433805787807496609077455068696421419046 8761}{301156811229806877804021911305141819555758 20100}]$

La machine renvoie des nombres rationnels, demandons lui d'afficher des *flottants*

```
(%i6)   float(premierstermes);
```

(%o6) $[2.0, 1.5, 1.296296296296296, 1.260932224741749, 1.259921860565926, 1.259921049895395]$

La suite u semble converger. Déterminons un éventuel *point fixe* de la fonction g.

```
(%i7)   pointsfixes:solve(g(x)=x,x);
```

(%o7) $[x = \frac{2^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}\,i - 2^{\frac{1}{3}}}{2}, x = -\frac{2^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}\,i + 2^{\frac{1}{3}}}{2}, x = 2^{\frac{1}{3}}]$

Nous constatons que la fonction g admet un unique point fixe réel (la troisième solution).

Déterminons une valeur approchée de ce point fixe :

```
(%i8)  float(pointsfixes[3]);
```

(%o8) $x = 1.259921049894873$

Nous constatons que cette valeur ($\sqrt[3]{2}$....) est assez proche de u_5 tout en restant inférieure. Regardons de plus près la fonction g, en particulier le signe de sa dérivée lorsque $x \geqslant \sqrt[3]{2}$, c'est à dire $x^3 \geqslant 2$.

```
(%i9)  assume(x^3-2>=0);sign(diff(g(x),x));
```

(%o9) $[x^3 >= 2]$
(%o10) pz

La dérivée de g est donc positive sur $I = [\sqrt[3]{2}, +\infty[$, g est croissante sur cet intervalle. De plus, la borne inférieure de I est un point fixe et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, par conséquent, I est stable par g. Autrement dit, tous les termes de la suite (u_n) sont dans I dans la mesure où le premier d'entre eux y est (on peut mettre en place un raisonnement par récurrence).

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant \sqrt[3]{2}$$

Déterminons le signe de $g(x) - x$, toujours pour $x \geqslant \sqrt[3]{2}$:

```
(%i11) sign(g(x)-x);
```

(%o11) nz

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, la suite (u_n) est donc décroissante. Nous pouvons conclure :

(u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente (théorème de convergence monotone), sa limite est la seule valeur possible : $\sqrt[3]{2}$.

8.9 Activité 9 : Étude de deux suites qui convergent vers α

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2}{{u_n}^2}$ où (u_n) est la suite définie dans le paragraphe précédent.

1. Compléter l'algorithme ALGO2 de l'Activité 8 afin d'afficher graphiquement les trente premiers termes des deux suites u et v.
2. Quelles conjectures peut-on émettre quant à la position relative des deux suites et au sens de variation et la convergence de la suite v ?
3. Démontrer que la suite (v_n) est croissante.
4. Montrer que, pour tout n entier naturel,
$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{g^3(u_n) - 2}{g^2(u_n)}$$
5. En déduire que, pour tout n entier naturel :
$$0 \leqslant u_{n+1} - v_{n+1}$$

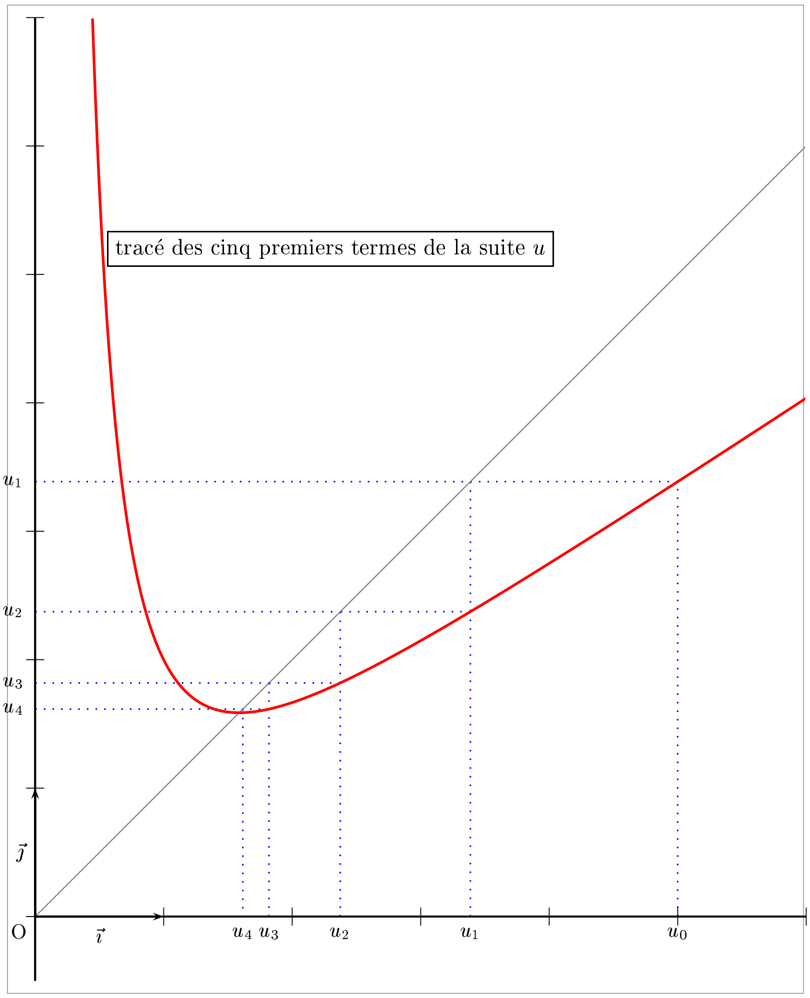


FIGURE 8 – tracé des premiers termes de la suite u

6. Que peut-on dire de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$?

Conclusion : La suite u est décroissante, la suite v est croissante et, pour tout entier naturel n, $u_n \geq u_n$. Deux suites u et v qui vérifient ces trois conditions sont dites ***adjacentes***[8].

De plus, les deux suites convergent vers la même limite α.

Remarques :

- *Deux suites **adjacentes** sont convergentes et convergent vers la même limite.*
- *Nous venons de montrer que α est un nombre irrationnel qui est limite de deux suites u et v de rationnels. On peut montrer que tout nombre irrationnel est limite de suites de rationnels. On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

8.10 Activité 10 : Étude de deux suites qui convergent vers α

*Pour cette activité, on fait le choix de l'étude d'un **problème ouvert**. On laisse l'initiative aux élèves quant aux méthodes et aux logiciels à utiliser. Il faudra, pour ce type d'activité, donner aux élèves suffisamment de temps pour qu'ils puissent produire un travail exploitable. Cela peut faire l'objet d'un travail en groupe, avec exposé devant la classe.*

On se pose les questions suivantes :

1. Justifier l'existence de α.

2. Irrationalité de α (pour les élèves qui suivent l'enseignement de spécialité.

8. Les suites adjacentes ne sont pas inscrites au nouveau programme de terminale S.

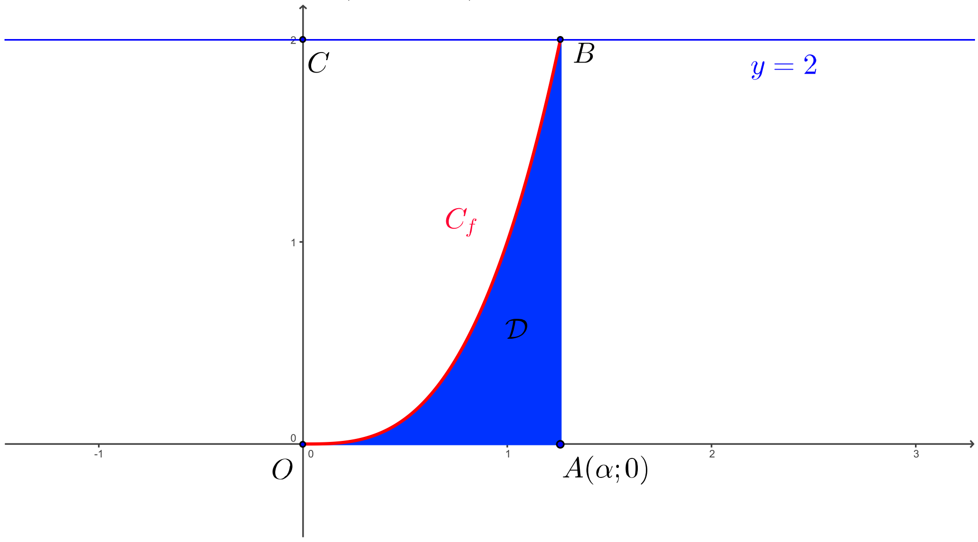
3. Étude de la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$ où $g(x) = \frac{2}{3}\left(x + \frac{2}{x^2}\right)$.

4. Étude de la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{2}{u_n^2}$.

5. Conjecturer les propriétés des deux suites (u_n) et (v_n).

8.11 Activité 11 : Analyse critique d'un document

Soit f la fonction définie sur $[0;\alpha]$ par $f(x) = x^3$. On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$et $\mathcal{D}$ le domaine situé sous la courbe C_f.



L'objectif de l'activité est de déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.
Voici deux démarches :

- On affiche la feuille de calcul suivante :

(%i1) `f(x):=x^3;`
(%o1) $\mathrm{f}(x) := x^3$

(%i2) `a:integrate(f(x),x,0,2^(1/3));float(a);`
(%o2) $\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}$
(%o3) 0.62996052494744

- On écrit :
Nous savons que l'aire du domaine $\mathcal{D}$, exprimée en unité d'aire, est égale à

$$I = \int_0^{\alpha} f(x)dx$$

d'où

$$I = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\alpha}$$

donc

$$I = \frac{\alpha^4}{4} = \frac{\alpha^3\alpha}{4} = \frac{2\alpha}{4}$$

donc

$$I = \frac{2^{1/3}}{2}$$

1. Comparer les résultats des deux méthodes proposées. Justifier la réponse.

2. On propose la copie d'écran suivante :

```
-->exec('F:\DUPLICATION du CUBE JA- IREM-2013\MonteCarlo1.sce

   0.2446

   0.2474

   0.2548

   0.247

   0.2508

   0.2448

   0.25

   0.2356

   0.248

   0.2485
```

*MonteCarlo1.sce

```
for j=1:10
  c=0
  for i=1:10000
    x=2^(1/3)*rand()
    y=2*rand()
      if y<=x^3 then
        c=c+1
      end
  end
  disp(c/10000)
end
```

a. Interpréter l'algorithme codé en langage *Scilab*[9].

b. Interpréter les résultats affichés dans la console[10].

c. Les résultats affichés sont-ils cohérents avec ceux affichés dans les deux démarches précédentes ? Justifier la réponse.

8.12 Activité 12 : comparaison de méthodes d'extraction, vitesse de convergence

Cette activité est l'occasion de rappeler certaines méthodes exposées par ailleurs, d'en proposer d'autres et de comparer les vitesses de convergence vers $\alpha = 2^{1/3}$.

On peut envisager différents scenarii pour traiter le sujet.

- **Méthode 1 dite de *dichotomie*** voir 8.6
- **Méthode 2 dite de *Héron***

  On définit la suite (x_n) ainsi :

$$x_0 \text{ fixé, et, pour tout entier naturel } n,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n^2}\right)$$

- **Méthode 3 dite de *Newton***

  On définit la fonction f sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^3 - 2$.

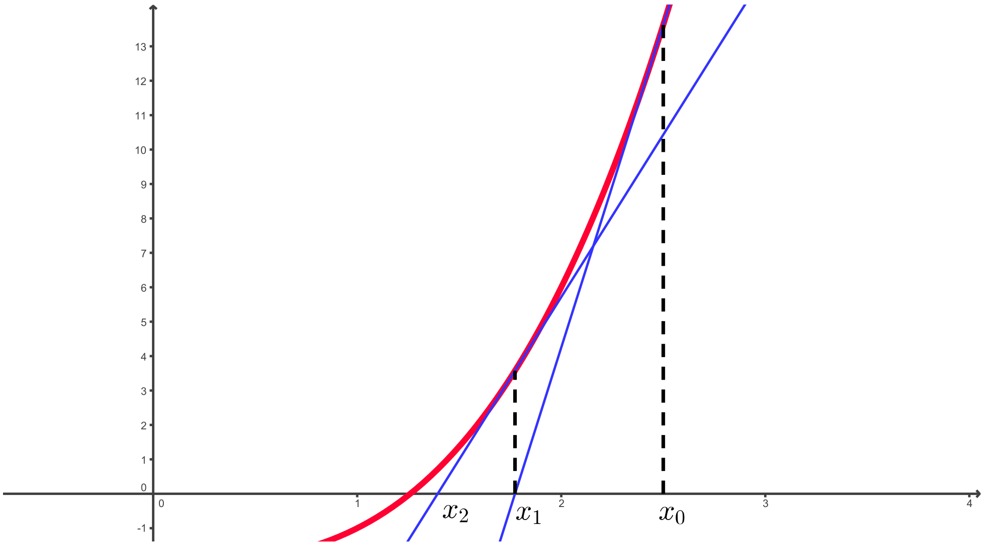
  On définit la suite (x_n) ainsi :

$$x_0 \text{ fixé, et, pour tout entier naturel } n,\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

  Ce qui correspond au schéma suivant :

9. Cet algorithme et celui de la fiche ***Pile ou Face*** permettront d'introduire la loi uniforme sur $[a;b]$, les lois à densité ayant été introduites au préalable.

10. La méthode de Monte-Carlo a été exposée dans le chapitre ***Calcul intégral***.



- **Méthode 4 dite de la *potence*.**
  Peut-être à réserver aux élèves suivant la spécialité mathématique.
  On pourra consulter http://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme_de_la_potence