Atelier JA 2013
Calcul formel ou calcul numérique

---

1. Calcul algébrique : Soit $f(x) = (2x+1)^2 - (3-x)^2$.
À l'aide du logiciel Xcas ou du logiciel scilab (sauf 4.) :

1. Développer $f(x)$.
2. Factoriser $f(x)$.
3. Résoudre les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = -8$.
4. Calculer $f(\sqrt{2})$ que l'on mettra sous la forme $a\sqrt{2} + b$ où a et b sont des réels.

2. Arithmétique : Les nombres de Mersenne sont de la forme $2^n - 1$ où $n \in \mathbf{N}$.
Proposition : « $2^n - 1$ est premier si n est premier. »
Avec scilab ou Xcas, créer une boucle pour tester cette proposition pour les vingt premières valeurs de n.

3. Probabilités : La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.
Déterminer l'intervalle de fluctuation de la fréquence au seuil de 95%, c'est-à-dire l'intervalle $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ où
– a est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0.025$
– b est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0.975$
application : $n = 25$ et $p = 0.8$.

4. Arithmétique : Une paysanne indienne va au marché en bicyclette pour vendre ses citrons. Un passant distrait la bouscule, le panier de citrons est renversé. Le fautif entreprend de ramasser les citrons.
Il demande à la paysanne : « combien y en avait-il ? »
Elle lui répond :
« en les rangeant par deux, il en reste un. En les rangeant par trois, il en reste un. En les rangeant par quatre, il en reste un. En les rangeant par cinq, il en reste un. En les rangeant par six, il en reste un. Mais en les rangeant par sept, il n'en reste pas. »
« c'est bon »lui dit le passant, « je les ai tous ramassés. »
• Combien de citrons y avait-il dans le panier de l'indienne ?

5.Géométrie : $\mathscr{C}$ est le cercle de centre Ω et de rayon $R = 1$. On place sur $\mathscr{C}$ les points $M_1, M_2, \ldots, M_p$ régulièrement espacés de façon à obtenir un polygone régulier à p côtés (p entier, $p \geqslant 3$).
Réaliser un programme permettant cette construction.

6. Simulation : Je vous propose le jeu suivant : « vous lancez deux dés cubiques équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6.
Si la différence des points obtenus, en valeur absolue, est supérieure ou égale à 3, vous gagnez 1 € sinon, vous perdez 1€. »
Ce jeu est-il équitable ?
– Simuler 1000 réalisations de ce jeu à l'aide de scilab ou du tableur de Xcas.

7. Formule d'Archimède, arche de parabole : Ouvrir un espace de travail Xcas et exécuter les commandes suivantes :

1. Définir la fonction f telle que $f(x) = a * x^2 + b * x + c$.
   Une mise en garde annonce que a, b, c seront déclarées comme variables globales.
   On supposera que $a < 0$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ en prévoyant d'appeler p et q les solutions lorsqu'elles existent dans $\mathbf{R}$. Ces solutions seront alors considérées comme une liste.
3. On se place dans la suite dans l'hypothèse que $f(x) = 0$ possède deux solutions réelles.
   Vérifier que $p + q = -\dfrac{b}{a}$. (on utilisera la commande "simplify")
4. Vérifier que $p \times q = \dfrac{c}{a}$.
5. Vérifier que $q - p = -\dfrac{\Delta}{a}$
6. Simplifier le calcul de l'intégrale de f entre p et q. (on s'assurera que $p < q$)
7. Simplifier le calcul des deux tiers du produit de $(q - p)$ par $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$

8. La fonction de Thomae : La fonction de Thomae (Carl Johannes) a été définie en 1875. C'est un exemple de fonction continue en tout point d'une partie dense mais également discontinue sur une autre partie dense.
Elle est définie par :

$$\begin{aligned}\Psi :&[0\,;1] \longrightarrow \mathbf{R}\\ \Psi(x) =&0 \text{ si } x \text{ est irrationnel}\\ \Psi(0) =&1\\ \Psi(x) =&\frac{1}{q} \text{ si } x = \frac{p}{q} \text{ avec } p \in \mathbf{Z} - \{0\}, q \in \mathbf{Z} - \{0\} \text{ et } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux.}\end{aligned}$$

Cette fonction est discontinue en tout rationnel, continue en tout irrationnel, de limite nulle en tout point de $[0\,;1]$, non différentiable...
Utiliser scilab pour obtenir une représentation graphique de cette fonction.

9.Théorème de Vinogradov (1937) : Tout entier impair suffisamment grand peut être écrit comme la somme de trois nombres premiers.
Écrire un programme scilab permettant de tester ce résultat.

10. Simulation : On appelle variable aléatoire associée au lancer d'une pièce équilibrée la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si l'événement (pile sort) est réalisé, 0 sinon.
$X_1, X_2, \ldots$ désignent les variables aléatoires associées à des lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée. On leur associe les variables aléatoires notées $U_1, U_2, \ldots$ définies de la façon suivante : U_n est la variable aléatoire qui vaut 1 si l'événement $(X_n \neq X_{n+1})$ est réalisé, 0 sinon.

1. À l'aide de Xcas ou de scilab, simuler 2001 lancers d'une pièce équilibrée.
2. En déduire la suite des valeurs que prennent successivement les variables aléatoires $U_1, U_2, \ldots, U_{2000}$ et faire apparaître le graphe des fréquences d'apparition du 1 dans cette suite.