MODÉLISER, SIMULER EN MATHÉMATIQUES

Gilles Aldon

EDUCMATH, ÉQUIPE EDUCTICE, INRP

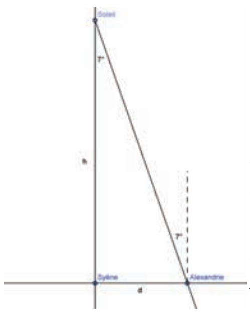
La modélisation fait-elle partie du travail du mathématicien ? Dans le cours de mathématiques, les élèves ont-ils à leur charge la modélisation ? L'utilisation des ordinateurs permet-elle une meilleure compréhension de la modélisation ?

Dans bien des cas, une modélisation implicite est effectuée, comme si tout allait de soi ; deux exemples issus de la géométrie et des probabilités permettront, sinon de répondre à ces questions, du moins de les illustrer.

L'expérience d'Ératosthène

Il est intéressant de se rappeler l'expérience d'Ératosthène de mesure du rayon de la Terre et les deux modélisations issues d'hypothèses différentes[1] :

Dans la ville de Syène, le jour du solstice d'été à midi, le Soleil est au zénith, c'est-à-dire à la verticale de la ville. Au même instant, à Alexandrie, l'expérience montre que le Soleil fait un angle d'environ 7° avec la verticale. L'expérience a également montré[2] que la distance entre Syène et Alexandrie est d'environ 800 km.



Voici deux raisonnements reposant sur deux modèles différents :

Supposons avec Anaxagore[3] que la Terre est plane, alors l'expérience montre que la hauteur du Soleil se calcule comme le rapport de la distance entre les deux villes et la tangente de l'angle, soit :

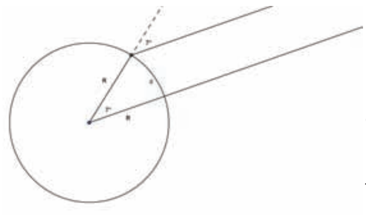
$$h = \frac{d}{\tan(\alpha)} = \frac{800}{\tan(7°)} \approx 6\,515\ km$$

On en déduit alors que le Soleil est situé à 6 515 km de la Terre.

Supposons maintenant avec Ératosthène que la Terre est « ronde ». Dans ces conditions, et sous l'hypothèse que le Soleil est très éloigné pour que ses rayons puissent être considérés comme parallèles, le rayon de la Terre apparaît comme le rapport de la distance entre les deux villes et l'angle calculé en radians :

$$r = \frac{d}{\alpha} = \frac{800}{\frac{7\times\pi}{180}} \approx 6\,548\ km$$

On en déduit que le rayon de la Terre est environ 6 500 km.



La seule expérience réalisée ne permet pas de choisir entre les modèles. Il faudra, par exemple, calculer avec d'autres méthodes la distance de la Terre au Soleil pour montrer que le modèle d'Anaxagore ne correspond pas à la réalité. Les mathématiques fournissent des modèles dans lesquels il est possible de faire des calculs, de déduire des résultats, mais calculer à l'intérieur du modèle ne donne pas d'indications du bon usage de ce modèle. D'autres arguments, liés ici à la physique et à l'astronomie, sont nécessaires pour décider du modèle à utiliser.

Donner ici les deux hypothèses permet certainement de faire prendre aux élèves du recul vis-à-vis des mathématiques et de la physique et ainsi leur rendre leur puissance et leur relativité.

Le « paradoxe de Bertrand »

Le second exemple développé dans le domaine des probabilités montre encore l'importance du choix du modèle et de la réflexion autour de la modélisation qui permet de lever des paradoxes apparents : l'exemple qui suit, fameux dans l'histoire des probabilités, en est une excellente illustration.

Un cercle étant donné, on choisit au hasard une corde du cercle. Quelle est la probabilité que la longueur de la corde soit plus petite que la longueur du côté du triangle équilatéral inscrit ?

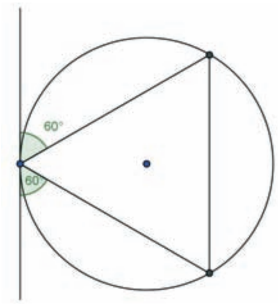
Ce problème, connu sous le nom de « paradoxe de Bertrand », a donné lieu à de nombreuses controverses ; citons en particulier l'étude que Poincaré en a faite dans *Calcul des probabilités*, et celle de Borel, qui écrit dans *Le Hasard*[4] : *« Joseph Bertrand, dans son célèbre ouvrage sur le* Calcul des probabilités, *a critiqué la théorie des probabilités continues… La conclusion de Bertrand paraît être que les problèmes de probabilités*

1. Treiner J., 2000, *L'enseignement des mathématiques en liaison avec les autres sciences : le cas de la physique*, http://eduscol.education.fr/D0030/k0d02x.htm
2. On notera que les deux résultats reposent sur des expériences physiques dont on ne discutera pas la validité.
3. Philosophe et mathématicien grec (500-428 av. J.-C.).
4. Borel E., (1913), *Le Hasard*, Presses universitaires de France.
5. Poincaré, H., 1912, *Calcul des probabilités*, Gauthier-Villars et fils.
6. L'expérience a été faite plusieurs fois en classe mais aussi en formation d'enseignants.

continues sont de purs jeux mathématiques, mais ne correspondent à aucune réalité… Cette attitude sceptique n'est pas en rapport avec les faits. On peut s'en rendre compte aisément en empruntant un exemple même de Bertrand… » Et Borel cite et traite le problème de Bertrand à l'appui de sa thèse.

Si on veut traiter ce problème, plusieurs hypothèses peuvent être avancées, ne citons ici que celles évoquées par Bertrand.

Premier choix

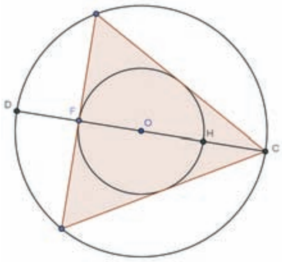


On peut, pour des raisons de symétrie, fixer une des extrémités de la corde en un point *A* du cercle. Toute corde est alors déterminée par la donnée de l'angle qu'elle forme avec la tangente en *A* au cercle.

Dans ces conditions, la corde *AM* est plus petite que le côté du triangle équilatéral inscrit lorsque l'angle α est compris entre 0 et $\pi/3$ ou entre $2\pi/3$ et π.

En considérant une probabilité uniforme sur l'intervalle $[0, \pi]$ (autrement dit, moins rigoureusement, tous les points du segment ont la même chance d'apparaître), la probabilité apparaît comme le rapport de la longueur du segment donnant une issue favorable sur la longueur totale, donc : $p = \frac{2}{3}$.

Deuxième choix

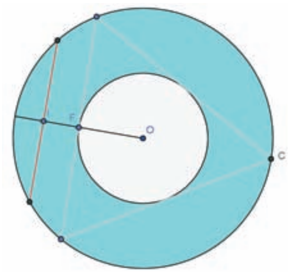


Toujours pour des raisons de symétrie, on peut s'intéresser uniquement aux cordes perpendiculaires à un diamètre donné du cercle. Chaque corde est alors déterminée par la donnée d'un point sur ce diamètre.

La condition est réalisée si le point *I* se trouve sur le segment *[CH]* ou le segment *[FD]*. La probabilité est donc égale au rapport des longueurs *FD* + *HC* et *CD*. Le modèle utilisé repose sur l'hypothèse d'une répartition uniforme du point *I* sur le segment *[CD]*.

Dans ces conditions : $p = \frac{1}{2}$.

Troisième choix



Enfin, dans cette troisième approche, on considère un point du disque comme le milieu de la corde choisie.

La condition est réalisée si la longueur *OI* est supérieure à *OF*, c'est-à-dire à la moitié du rayon, donc si *I* est situé dans la couronne représentée ci-contre. La probabilité cherchée est alors égale au rapport de l'aire de cette couronne à l'aire du disque complet.

Cette solution suppose que la variable « milieu de la corde » a une distribution uniforme sur la surface intérieure du cercle.

Ici, $p = \frac{3}{4}$

Qu'en déduire ? Écoutons Poincaré : « *Le mathématicien n'a plus aucune prise sur le choix de cette hypothèse ; mais il doit, une fois qu'elle est choisie, porter toute son attention à ne pas en faire une autre qui la contredise*[5]. » Autrement dit, le paradoxe n'existe que de façon apparente, le problème posé n'est pas un problème de mathématiques et il est nécessaire de préciser la question, c'est-à-dire de préciser le modèle dans lequel on va travailler. Utiliser dans cette situation une simulation sur ordinateur (ou sur calculatrice) est ici particulièrement intéressant. En effet, demander à des élèves de simuler sur leur calculatrice ou sur ordinateur (un tableur peut faire l'affaire !) va les amener à se poser la question fondamentale : comment choisir une corde au hasard ? ; et il est à parier[6] que les trois modèles décrits ci-dessus apparaîtront dans une classe, ce qui permettra de faire le point sur le « jeu » mathématique et son lien avec la réalité.

Les mathématiques ne sont pas le réel mais donnent des éléments de compréhension et d'appréhension du réel en interrogeant d'autres sciences et les hypothèses qu'elles peuvent émettre ; confronter les conséquences de ces hypothèses avec la réalité qu'il s'agit de décrire ne fait pas partie du travail du mathématicien mais participe au dialogue avec d'autres disciplines en montrant bien à la fois les apports des unes sur les autres mais aussi les différences fondamentales dans les méthodes et les fondements. ●

Références

– Aldon G., Feurly-Reynaud J., 1994, *Modélisation en probabilités au lycée*, IREM de Lyon
– Aldon G., Le Berre M., 2000, *Fragments d'une exposition mathématique*, APMEP-IREM de Lyon
– Borel E., (1913), *Le Hasard*, Presses universitaires de France
– Bertrand, J., 1889, *Calcul des probabilités*, Gauthier-Villars et fils
– Éveilleau T., 2005, *Le paradoxe de Bertrand*, texte en ligne : http://pagesperso-orange.fr/therese.eveilleau/pages/paradoxe/textes/bertrand.htm
– Henry M., 2003, *Des lois de probabilité en terminale scientifique, pour quoi faire ?* Repères IREM, n° 51, pp 5-25
– Harthong J., 1996, *Le paradoxe de Bertrand – tirage au hasard d'une corde dans un cercle, l'Ouvert* n° 83, pp. 1-15, IREM de Strasbourg
– Poincaré, H., 1912, *Calcul des probabilités*, Gauthier-Villars et fils
– Treiner J., 2000, *L'enseignement des mathématiques en liaison avec les autres sciences: le cas de la physique*, http://eduscol.education.fr/D0030/k0d02x.htm
– Thiénard J.-C., 2007, *Introduction aux lois de probabilités continues : problèmes épistémologiques*, *Repères* IREM n° 67, pp. 31-42