# Le cercle de Monge

Corrigé

TS

Auteurs : Fabrice Eudes, Pierre Lapôtre, Raymond Moché

1. Après la construction d'une figure, il semble que le lieu de $P$ lorsque $x_0$ décrit $]-4;0[$ soit un *arc de cercle*.
2. Le coefficient directeur de la tangente $T_0$ à $\mathscr{F}$ en $M_0$ est la valeur de la dérivée de $f$ en $x_0$

$$m = f'(x_0) = \frac{3}{4} \times \frac{-2x_0}{2\sqrt{16-x_0^2}} = \frac{-3x_0}{4\sqrt{16-x_0^2}}$$

   On constate que $x_0$ et $m$ sont de signes contraires.

3. Dans l'expression précédente, on résout $x_0$ en fonction de $m$ :

$$\begin{aligned}
m\sqrt{16-x_0^2} &= \frac{-3x_0}{4}\\
m^2(16-x_0^2) &= \frac{9x_0^2}{16}\\
x_0^2(9+16m^2) &= (16m)^2\\
x_0 &= -\sqrt{\frac{(16m)^2}{9+16m^2}} && \text{car } x_0 \in ]-4;0[\\
x_0 &= \frac{-16m}{\sqrt{9+16m^2}} && \text{car m>0}
\end{aligned}$$

   L'équation de la tangente $T_0$ à $\mathscr{F}$ en $M_0$ est donnée par l'équation $y = f(x_0) + m(x - x_0)$. On remplace $x_0$ par la valeur obtenue :

$$\begin{aligned}
y &= f(x_0) + m(x - x_0)\\
y &= \frac{3}{4}\sqrt{16 - \left(\frac{-16m}{\sqrt{9+16m^2}}\right)^2} + mx - m\frac{-16m}{\sqrt{9+16m^2}}\\
y &= mx + \frac{3}{\cancel{4}}\sqrt{\frac{\cancel{16} \times 9 + \cancel{16 \times 16m^2} - \cancel{(16m)^2}}{9+16m^2}} + \frac{16m^2}{\sqrt{9+16m^2}}\\
y &= mx + \frac{9+16m^2}{\sqrt{9+16m^2}}\\
y &= mx + \sqrt{16m^2+9} && \text{(T)}
\end{aligned}$$

4. On peut remarquer que toutes les tangentes à $\mathscr{F}$ en un point $M$ d'abscisse $a$, $-4 < a < 4$ ont une équation de la forme (T).

   En effet, les calculs des questions 2 et 3 peuvent être reproduits sans difficulté pour la tangente $T_1$ à $\mathscr{F}$ en $M_1$ d'abscisse $x_1$, $0 < x_1 < 4$.

   De plus $f'(0) = \frac{-3\times 0}{4\sqrt{16-0^2}} = 0$ et $f(0) = \frac{3}{4}\sqrt{16-0^2} = 3$, donc l'équation de la tangente à $\mathscr{F}$ en 0 est $y = 3$ ; soit de la forme $y = mx + \sqrt{16m^2+9}$ avec $m = 0$.

   (a) Soit une droite de coefficient directeur $m$ tangente à $\mathscr{F}$ en un point $M$. D'après la remarque son ordonnée à l'origine est $\sqrt{16m^2+9}$ et son équation est de la forme (T).

   $P(x_2\,;\,y_2)$ appartient à cette droite, ses coordonnées en vérifient l'équation ; on a :

$$\begin{aligned}
y_2 &= mx_2 + \sqrt{16m^2+9}\\
(y_2 - mx_2)^2 &= \left(\sqrt{16m^2+9}\right)^2\\
y_2^2 - 2y_2mx_2 + m^2x_2^2 &= 16m^2+9\\
m^2(x_2^2-16) - 2mx_2y_2 - 9 + y_2^2 &= 0 && \text{(E)}
\end{aligned}$$

(b) On résout l'équation (E) du second degré en m. Elle possède deux solutions réelles distinctes si et seulement si le discriminant réduit $\Delta_r = (x_2y_2)^2 - (x_2^2 - 16)(y_2^2 - 9)$ est strictement positif. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
&(x_2y_2)^2 - (x_2^2 - 16)(y_2^2 - 9) > 0 \\
&9x_2^2 + 16y_2^2 - 144 > 0 \\
&16y_2^2 > 144 - 9x_2^2 \\
&4y_2 > \sqrt{9(16 - x_2^2)} && \text{car } |x_2| < 4 \text{ et } y_2 > f(x_2) > 0 \\
&y_2 > \frac{3}{4}\sqrt{16 - x_2^2} = f(x_2) && \text{vrai par le choix de } P_2
\end{aligned}$$

(c) Le produit des racines est égal au quotient du terme constant par le coefficient de $m^2$ ; on a :

$$\begin{aligned}
\frac{y_2^2 - 9}{x_2^2 - 16} &= -1 \\
y_2^2 - 9 &= 16 - x_2^2 \\
x_2^2 + y_2^2 &= 25
\end{aligned}$$

C'est l'équation du cercle de centre $O$ et de rayon 5.

Le produit des racines, les coefficients directeurs des deux tangentes, est égal à $-1$ si et seulement si ces droites sont perpendiculaires. On a donc montré que le lieu des points $P$ dont on peut mener deux tangentes à $\mathscr{F}$, perpendiculaires entre elles, est l'arc du cercle de centre $O$ et de rayon 5 compris entre les points $(4\,;\,3)$ et $(-4\,;\,3)$.

## Complément

Dans la question 4, on a utilisé le fait qu'une tangente à $\mathscr{F}$ de coefficient directeur $m$ a nécessairement pour équation $y = mx + \sqrt{16m^2 + 9}$. En fait, on peut montrer que cette condition est nécessaire et suffisante.
Soit une droite de coefficient directeur $m$ passant par $P(x_2\,;\,y_2)$ ; son équation s'écrit $y = mx + (y_2 - mx_2)$. Les points d'intersection de cette droite et de la courbe $\mathscr{F}$ sont ceux dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ sont solutions du système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2} \\ y = mx + y_2 - mx_2 \end{cases}$$

On élimine $y$, ce qui revient à étudier la différence des ordonnées du point d'abscisse $x$ sur la droite et du point d'abscisse $x$ sur $\mathscr{F}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&mx + (y_2 - mx_2) = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2} \\
&(mx)^2 + 2mx(y_2 - mx_2) + (y_2 - mx_2)^2 = \frac{9}{16}(16 - x^2) \\
&(16m^2 + 9)x^2 + 2 \times 16m(y_2 - mx_2)x + 16\left((y_2 - mx_2)^2 - 9\right) = 0
\end{aligned}$$

La droite est tangente à $\mathscr{F}$ si et seulement si le couple solution est unique, i.e. lorsque le discriminant réduit de cette équation du second degré en $x$ est nul :

$$\begin{aligned}
&16^2m^2(y_2 - mx_2)^2 - 16(16m^2 + 9)\left((y_2 - mx_2)^2 - 9\right) = 0 \\
&16 \times 16m^2 \times 9 - 16 \times 9(y_2 - mx_2)^2 + 16 \times 9^2 = 0 \\
&16m^2 - (y_2 - mx_2)^2 + 9 = 0 \\
&16m^2 - y_2^2 + 2mx_2y_2 - m^2x_2^2 + 9 = 0 && \text{c'est à dire (E)}
\end{aligned}$$