TS Pile ou Face : loi des grands nombres avril 2013

23 mars 2013

L'objectif de ce TP est de mettre en scène la ***loi des grands nombres****.*

Pour cela, nous allons utiliser le logiciel de calcul numérique *Scilab* et simuler le lancer d'une pièce non truquée un certain nombre de fois successivement et de manière indépendante.

Méthode On tire un nombre réel au hasard entre 0 et 1, si ce nombre est inférieur à 0,5 on a obtenu « Pile », sinon « Face ».

On va calculer et afficher la fréquence d'apparition du Pile.

1 Premier essai

On lance la pièce 100 fois successivement

Le code :

```
c=0;
for i=1:100
  if random(1) <=0.5 then c=c+1;end
end
f=c/100
```

et l'affichage à la compilation :

```
-->c=0;
-->for i=1:100
-->  if random(1) <=0.5 then c=c+1;end
-->end
-->f=c/100
 f  =

    0.75
```

Observation du résultat affiché

Le résultat nous parait-il cohérent ?

2 Deuxième essai

On lance la pièce 10000 fois successivement

Le code et l'affichage à la compilation :

```
-->c=0;
-->for i=1:10000
-->  if random(1) <=0.5 then c=c+1;end
-->end
-->f=c/10000
 f  =

    0.7046
```

Observation du résultat affiché

C'est peut-être le hasard ?!?

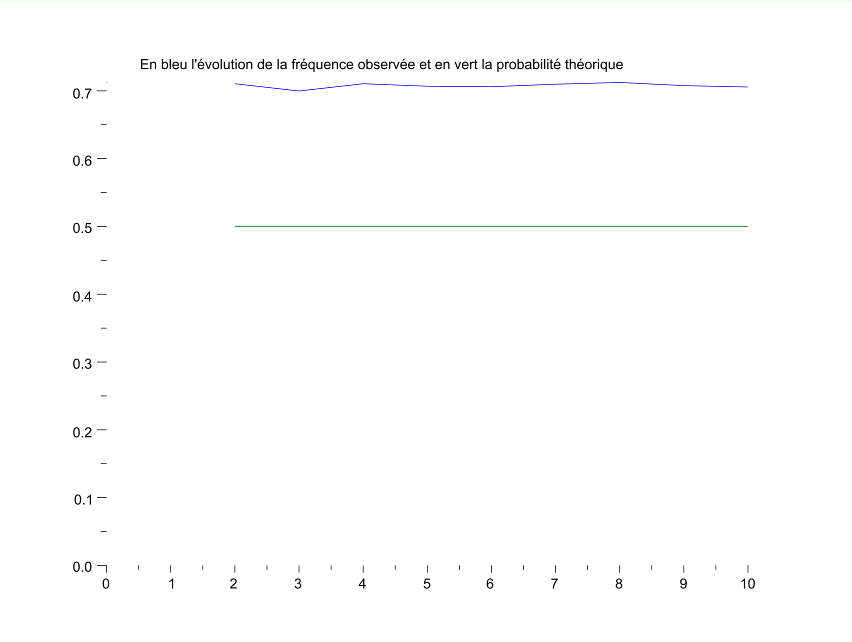
3 Troisième essai

On réalise l'expérience 10 fois et on observe l'évolution de la fréquence

Le code :

```
for j=1:10
  c(j)=0;
for i=1:10000
  if random(1) <=0.5 then c(j)=c(j)+1;end
end
f(j)=c(j)/10000;
z(j)=0.5;
end,
xtitle('En bleu l''évolution de la fréquence observée et en vert la probabilité théorique')
plot([f,z])
```

et l'affichage à la compilation :



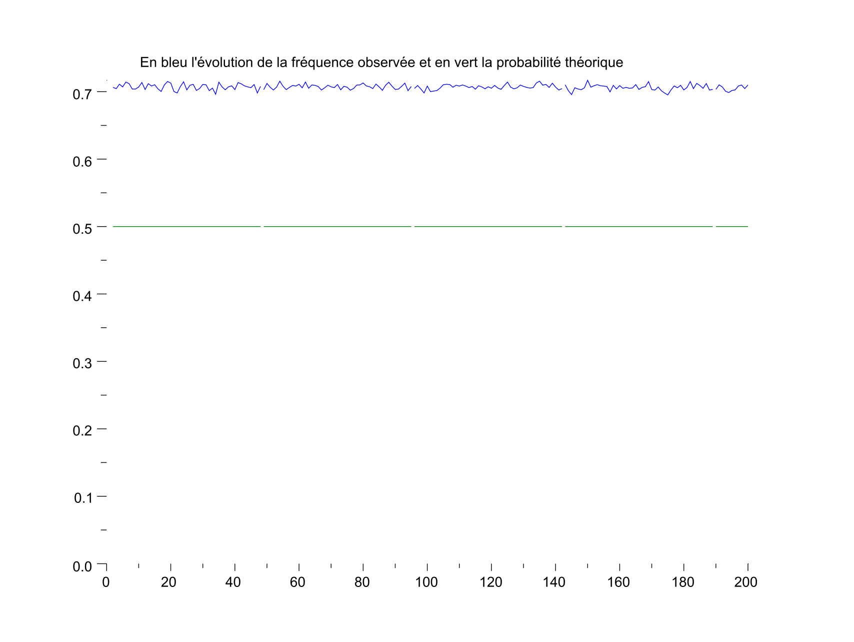
Observation du résultat affiché

Réaliser l'expérience dix fois, est-ce suffisant ?

4 Quatrième essai

On réalise l'expérience 200 fois et on observe l'évolution de la fréquence

L'affichage à la compilation :

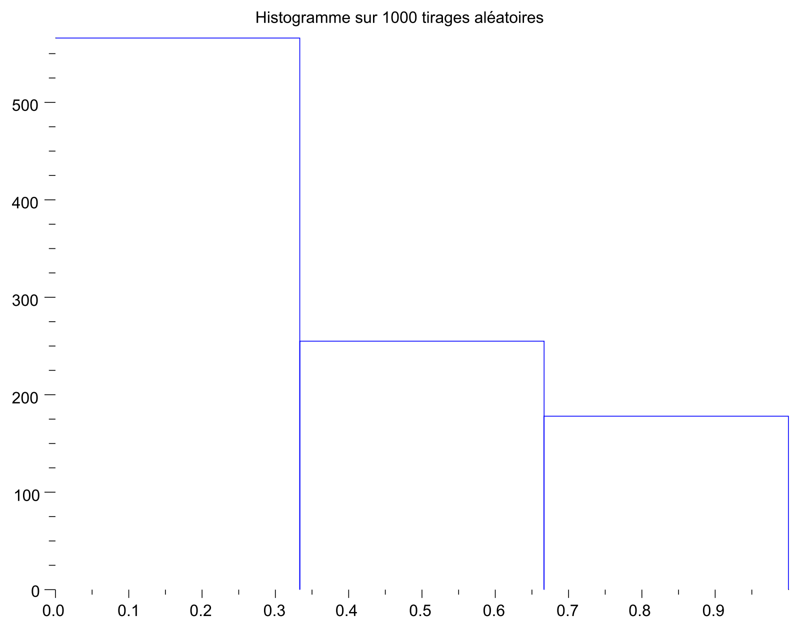


Observation du résultat affiché

On ne comprend rien ! ! ! ! ! !

4.1 Un histogramme

Pour avoir une idée de la façon dont les nombres sont tirés aléatoirement entre 0 et 1, j'ai simulé 1000 nombres et tracé l'histogramme correspondant :



Quelles conclusions peut-on en tirer ? A votre avis ?

5 Explications

Souvenez-vous : en préambule j'explique comment je vais simuler le lancer d'une pièce.
$\boxed{\text{Méthode}}$ On tire un nombre réel au hasard entre 0 et 1, si ce nombre est inférieur ou égal à 0,5 on a obtenu « Pile », sinon « Face ».
Malheureusement, l'expression « *tirer un nombre réel au hasard entre 0 et 1* »n'a aucun sens si on ne précise pas selon quelle loi.

5.1 Quelques précisions probabilistes

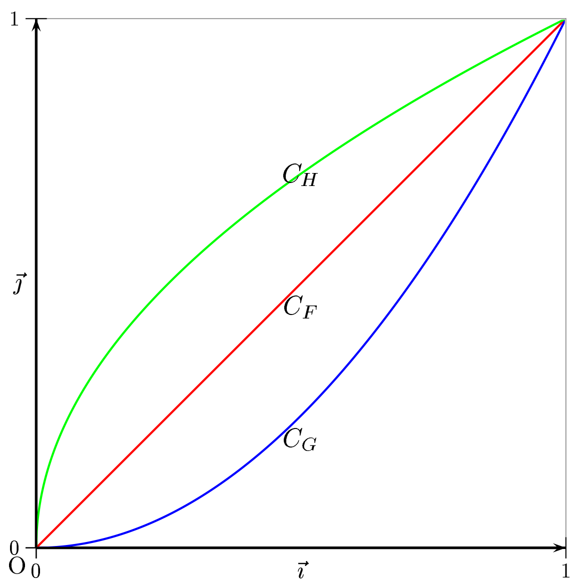
Soit X et X' deux variables aléatoires **indépendantes** suivant une *loi uniforme* sur $[0;1]$.
Il est clair que la fonction de répartition associée à X est la fonction F définie sur $[0;1]$ par $F(t) = t$.
Considérons les deux variables aléatoires Y et Z définies respectivement par $Y = X^2$ et $Z = max(X; X')$.
Si G et H sont les fonctions de répartition associées respectivement à Y et Z, on peut écrire, pour tout réel $t \in [0;1]$,

$$G(t) = P(Y \leq t) = P(X^2 \leq t) = P(X \leq \sqrt{t}) = \sqrt{t}$$

et

$$H(t) = P(Z \leq t) = P((X \leq t) \cap (X' \leq t)) = P(X \leq t) \times P(X' \leq t) = t^2$$

Les représentations graphiques de F, G et H sont alors :



Les trois variables vérifient $X(\Omega) = [0;1]$, $Y(\Omega) = [0;1]$ et $Z(\Omega) = [0;1]$.
Et, pour tous réels a et b appartenant à $[0;1]$,

$$P(a \leq X \leq b) = b - a$$

$$P(a \leq Y \leq b) = \sqrt{b} - \sqrt{a}$$

$$P(a \leq Z \leq b) = b^2 - a^2$$

Autrement dit, $P(Y \leq 0,5) = \sqrt{0,5} \approx 0,707$.

5.2 J'explique la supercherie

Explication probabiliste

Dans mon premier programme source, j'utilise la commande *random(1)* qui renvoie un nombre réel og choisi au hasard entre 0 et 1 », mais pas suivant la loi uniforme.
J'ai, au préalable, défini la commande *random(n)* à l'aide du sous-programme suivant :

```
function y=random(n)
  for i=1:n y(i)=rand(1,1)^2;end
endfunction
```

On comprend mieux maintenant les affichages de fréquences observées aux quatre premiers paragraphes.
On tirait des nombres réels entre 0 et 1 suivant la même loi que celle suivie par la variable aléatoire Y définie dans le paragraphe précédent.

5.3 CONCLUSION

Conclusion

Lorsque l'on tire au hasard un réel entre 0 et 1, il faut préciser selon quelle loi. Les trois exemples précédents nous montrent le caractère ***indispensable*** *de la précision.*

5.4 Alors, finalement, comment fait-on ?

Solution

Il suffit de remplacer dans les différents programmes la commande *random(1)* par la commande *Scilab* >**rand(1,1)** (ou **rand(1)** , ou **rand**)qui renvoie bien un nombre réel tiré suivant la loi uniforme sur $[0;1]$.