RACINES NEUVIÈMES DE L'UNITÉ

Énoncé

On se propose de démontrer de trois façons différentes que le nombre complexe

$$a = e^{\frac{2i\pi}{9}} + e^{\frac{4i\pi}{9}} + e^{\frac{8i\pi}{9}}$$

est un nombre imaginaire pur.

Première méthode : On pose $u = e^{\frac{2i\pi}{9}}$.

1. Exprimer a en fonction de u. Que vaut u^9 ?
2. Vérifier que $(1+u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6+u^7+u^8)(1-u) = 1-u^9$.
3. En déduire que $1+u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6+u^7+u^8 = 0$.
4. Montrer que $1+u^3+u^6 = 0$.
5. Montrer que les nombres a et $b = u^5+u^7+u^8$ sont conjugués.
6. Conclure.

Deuxième méthode : Le plan est rapporté à un repère orthonormal d'origine O.

1. Représenter sur le cercle trigonométrique de centre O, les points A_0, …, A_8 d'affixes respectifs 1, u, u^2, …, u^8. Ces points sont les sommets d'un nonagone régulier convexe qu'il est inutile de tracer.
   Quelle est la nature du triangle $A_0A_3A_6$? préciser son isobarycentre.
   Évaluer les vecteurs $\overrightarrow{OA_0}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_6}$, $\overrightarrow{OA_0}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_5}+\overrightarrow{OA_7}+\overrightarrow{OA_8}$ et
   $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_5}+\overrightarrow{OA_7}+\overrightarrow{OA_8}$.
2. Comparer les mesures des angles orientés $(\overrightarrow{OA_0},\overrightarrow{OA_1})$ et $(\overrightarrow{OA_0},\overrightarrow{OA_8})$, $(\overrightarrow{OA_0},\overrightarrow{OA_2})$ et $(\overrightarrow{OA_0},\overrightarrow{OA_7})$, $(\overrightarrow{OA_0},\overrightarrow{OA_4})$ et $(\overrightarrow{OA_0},\overrightarrow{OA_5})$. En déduire que, par la réflexion d'axe (OA_0), les points A_1, A_2, A_4 ont respectivement pour images les points A_8, A_7, A_5.
3. Déduire des questions 1. et 2. que $u+u^2+u^4+u^5+u^7+u^8 = 0$ et que $u+u^2+u^4 = \overline{u^5+u^7+u^8}$.
   Conclure.

Troisème méthode : θ et θ' sont deux nombres réels.

1. Montrer que $e^{i\theta}+e^{i\theta'} = 2\cos(\frac{\theta-\theta'}{2})\cdot e^{i(\frac{\theta+\theta'}{2})}$.
   Peut-on affirmer que le module de $e^{i\theta}+e^{i\theta'}$ est $2\cos(\frac{\theta-\theta'}{2})$ et qu'un argument de ce nombre est $\frac{\theta+\theta'}{2}$?
2. Donner le module et un argument de $e^{\frac{2i\pi}{9}}+e^{\frac{4i\pi}{9}}$.
3. Montrer que $a = 2i\sin(\frac{4\pi}{9})$.

Pierre Lapôtre, Lycée S. Berthelot, Calais

IREM Lille AMECMI