Calcul approché d'intégrales : méthode de Hermite.

La détermination de primitives de fonctions continues sur un intervalle peut être difficile voire impossible. Pour calculer la valeur d'une intégrale dans ce cas, on est parfois conduit à se contenter d'une approximation (de bonne qualité pour certaines fonctions comme on le verra plus loin).
L'étude qui suit détaille une méthode faisant intervenir la dérivée de la fonction à intégrer.
Idée : On suppose f dérivable sur $[a;b]$ et on cherche à exprimer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ comme combinaison linéaire des nombres $f(a), f(b), f'(a)$ et $f'(b)$.
1. On considère f, fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
On notera $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont des réels.
a. Montrer qu'il existe une fonction polynôme f de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant :

$$f(0) = -1 \quad f(1) = 1 \quad f'(0) = 5 \quad f'(1) = 0$$

b. *généralisation :* Montrer qu'étant donné quatre nombres y_0, y_1, y_0', y_1' il existe une fonction polynôme f de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant :

$$f(0) = y_0 \quad f(1) = y_1 \quad f'(0) = y_0' \quad f'(1) = y_1'$$

Indication : le système 4 équations, 4 inconnues a, b, c, d traduisant les quatre conditions admet toujours une solution.
On résoudra ce système à la calculatrice bien qu'une solution rapide à la main soit possible.
c. Peut-on exprimer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ comme combinaison linéaire de $f(0), f(1), f'(0)$ et $f'(1)$?
c'est à dire existe-t-il 4 nombres $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ tels que

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(1) + \beta_0 f'(0) + \beta_1 f'(1)? \quad (1)$$

Pour cela on utilise un raisonnement par *analyse et synthèse* :
(i.) *analyse :* si ces quatre nombres existent ils doivent, en particulier, convenir pour les fonctions suivantes :

$$x \longrightarrow 1\,; \quad x \longrightarrow x\,; \quad x \longrightarrow x^2\,; \quad x \longrightarrow x^3$$

Écrire l'égalité (1) pour chacune des quatre fonctions ci-dessus et déterminer les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$.
(ii.) *synthèse :* montrer que les valeurs trouvées précédemment conviennent pour toute fonction polynôme f de degré inférieur ou égal à 3 et établir la formule de Hermite

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right) + \frac{1}{12}\left(f'(0) - f'(1)\right) \quad (2)$$

d. *application :* utiliser la formule de Hermite (2) pour calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ avec la fonction polynôme du **1a.** Vérifier par un calcul direct.
e. Établir la formule de Hermite pour une fonction polynôme f de degré inférieur ou égal à 3 sur un intervalle $[a;b]$ $(a < b)$ en utilisant la méthode du **1.c**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)}{2}\left(f(a) + f(b)\right) + \frac{(b-a)^2}{12}\left(f'(a) - f'(b)\right)$$

2. Étant donné une fonction dérivable quelconque φ sur un intervalle $[a;b]$, on a vu qu'il existe une fonction polynôme f de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant

$$f(a) = \varphi(a) \quad f(b) = \varphi(b) \quad f'(a) = \varphi'(a) \quad f'(b) = \varphi'(b)$$

cela signifie que la courbe de f passe par celle de φ aux points d'abscisses a et b et y a les mêmes tangentes respectivement.
On peut ainsi espérer que la courbe de f n'est pas trop éloignée de celle de φ, ce qui implique que $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ sera un nombre voisin de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ce qui permet d'envisager $\dfrac{(b-a)}{2}\left(\varphi(a)+\varphi(b)\right)+\dfrac{(b-a)^2}{12}\left(\varphi'(a)-\varphi'(b)\right)$ comme une approximation de $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$
applications :
a. Calculer avec la formule de Hermite une approximation de $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x+3}{\sqrt{2x^2+3x+4}}\,\mathrm{d}x$.
b. Calculer cette intégrale en déterminant une primitive de la fonction φ définie par $\varphi(x)=\dfrac{4x+3}{\sqrt{2x^2+3x+4}}$ sur $[0;1]$. Quelle est l'erreur commise en utilisant la formule de Hermite ?
3. Critique de la méthode de Hermite.
Les formules de Hermite ne tiennent compte que des valeurs de la fonction φ intégrée et des valeurs de sa dérivée aux points 0 et 1 (ou a et b suivant le cas). Elle ignore ce que peut faire la fonction φ entre ces valeurs. Par conséquent, on se doute qu'elle peut donner des résultats très mauvais pour certaines fonctions, ce que nous montrons ci-dessous :
a. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x$, puis sa valeur approchée donnée par la formule de Hermite lorsque φ est la fonction $x \longmapsto x^2(1-x)^2$. Quelle est la valeur de l'erreur d'approximation ?
b. En déduire que quel que soit le réel $A>0$, on peut trouver une fonction φ définie, continue et dérivable sur $[0,1]$ telle que l'erreur d'approximation lorsque l'on calcule $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ par la méthode de Hermite soit plus grande que A.
En conclusion, la formule de Hermite n'est intéressante que pour des fonctions vérifiant certaines conditions.
4.(facultatif) Utiliser la dérivée seconde permet-il d'améliorer les formules de Hermite ?
a. Étant donné une fonction polynôme f de degré inférieur ou égal à 5, déterminer six nombres $\alpha_0,\alpha_1,\beta_0,\beta_1,\gamma_0,\gamma_1$ tels que

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\alpha_0 f(0)+\alpha_1 f(1)+\beta_0 f'(0)+\beta_1 f'(1)+\gamma_0 f''(0)+\gamma_1 f''(1) \quad (2)$$

*s'inspirer de la méthode **1.c.** où l'on ajoutera les fonctions $x \longrightarrow x^4$ et $x \longrightarrow x^5$.*
b. Calculer de deux façons $\displaystyle\int_0^1 (x^5-3x^4-7x^3+x^2-2x-1)\,\mathrm{d}x$.
c. Reprendre le calcul approché de $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x+3}{\sqrt{2x^2+3x+4}}\,\mathrm{d}x$. Quelle est l'erreur commise ? comparer avec la méthode de Hermite.
5.(facultatif) Établir, pour une fonction polynôme f de degré inférieur ou égal à 5 sur un intervalle $[a;b]$ $(a<b)$ en utilisant la méthode du **1.c**, l'égalité suivante dont le second membre pourra servir d'approximation dans le calcul d'une intégrale.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{(b-a)}{2}\left(f(a)+f(b)\right)+\frac{(b-a)^2}{10}\left(f'(a)-f'(b)\right)+\frac{(b-a)^3}{120}\left(f''(a)+f''(b)\right).$$

Il existe d'autres méthodes pour calculer des intégrales mais elles ne sont pas au programme de la classe de Terminale.