THALÈS EN QUATRIÈME : VERS UNE APPROCHE DE LA DÉMONSTRATION PAR LES AIRES

GÉRARD DUMONT

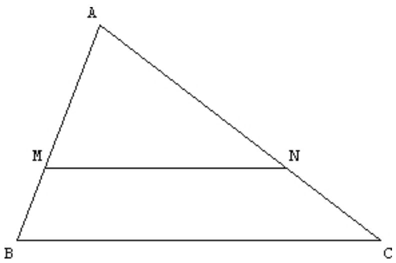
La démonstration de la propriété de Thalès restreinte n'est pas au programme de la classe de quatrième (il est explicitement demandé de l'admettre après avoir constaté sa validité sur quelques exemples, cette activité a été effectuée préalablement et a laissé au professeur un goût de trop peu et d'inabouti). Il est cependant possible de l'établir à l'aide de considérations sur les aires réinvestissant les notions étudiées les années précédentes. L'article suivant expose une démarche possible s'inspirant de la méthode d'Euclide.

Conditions : classe entière, première étape d'une demi-heure en fin d'heure, les deux étapes restantes pendant l'heure suivante.

Matériel :
- Un écran de télévision (70 cm) couplé à un ordinateur propose aux élèves des animations préparées sur Géoplanw et présentées par le professeur ;
- Les élèves disposent d'une double page (voir Annexes 1 et 2) qu'ils complètent au fur et à mesure des conclusions qu'ils tirent au vu des animations.

Prérequis :
- aire du triangle sous différentes formes (couplage base et hauteur) ;
- simplification de quotients : savoir que $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$.

Intentions : établir la proportionnalité des longueurs des côtés de deux triangles dans la situation suivante :



Dans le triangle ABC, M est sur $[AB]$, N est sur $[AC]$, (MN) et (BC) sont parallèles ; l'objectif est :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

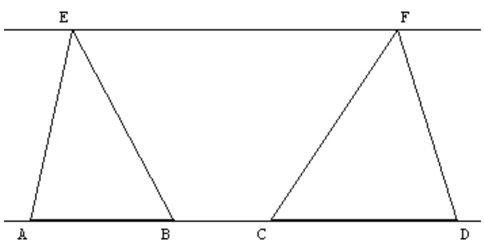
1. Première étape :

Cette préparation à la deuxième séance d'une durée de vingt à trente minutes met en place les outils :

(1) *Des triangles de bases et de hauteurs égales ont la même aire.*

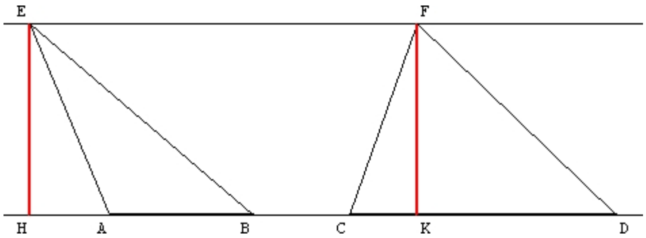
(2) *Les aires de deux triangles de même hauteur sont proportionnelles à leurs bases.*

1.1. **Premier outil :** Le professeur montre à la classe (sous Géoplanw) l'animation ci-dessous (fichier "ThalesAires1.g2w") ; les points E et F sont libres sur une parallèle à (CD). Le point D est libre sur la droite (AB).



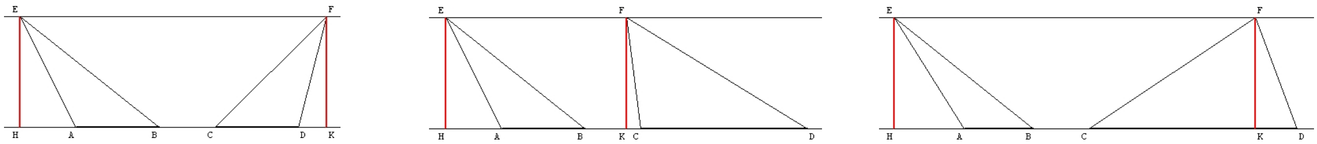
La question *« Pour quelle position du point E l'aire du triangle EAB est elle la plus grande ? »* amène des réponses variées. Les élèves cherchent une position particulière de E qui rend le triangle rectangle ou mieux isocèle, afin d'infirmer ces propositions le professeur demande rapidement aux élèves de dessiner un triangle isocèle, un triangle rectangle répondant aux conditions, de mesurer bases et hauteurs et de calculer leurs aires. L'idée de l'invariance fait son chemin et l'animation suivante, avec les hauteurs matérialisées (fichier "ThalesAires2.g2w" couplé avec "ThalesAires1.g2w"), emporte la conviction et permet d'établir le premier outil :
« Toujours la même base et toujours la même hauteur donc l'aire ne change pas. »

L'animation permet aussi d'asseoir l'idée que la position de la hauteur (intérieure ou extérieure au triangle) n'a pas d'importance.



1.2. **Second outil :** La mise en place est cette fois-ci plus délicate. En s'appuyant sur ce qui a été vu précédemment la réponse à la question : *« Que faire pour que les aires des deux triangles AEB et CFD soient égales ? »* vient assez facilement : *« s'arranger pour que* [AB] *et* [CD] *aient même longueur. ».*

Reste à amplifier le phénomène : *« Que faire pour que l'aire de FCD soit le double de celle de EAB ? »*, *« Que se passe t'il si* [CD] *est trois fois plus grand que* [AB] *? »*, etc. Naît alors l'idée que le rapport des aires est identique au rapport des bases.



L'application de la formule donne l'aire des deux triangles et on peut ensuite calculer leur quotient :

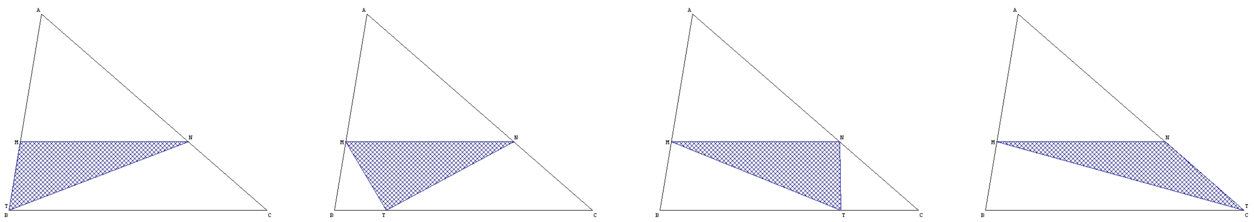
$$\frac{\text{Aire}(EAB)}{\text{Aire}(FCD)} = \frac{0,5 \times EI \times AB}{0,5 \times FJ \times CD} = \frac{AB}{CD}$$

$0,5$ a été choisi plutôt que $\frac{1}{2}$ afin de ne pas introduire de difficulté supplémentaire dans la simplification, celle par $0,5$ vient assez vite. Qu'on puisse aussi simplifier par EI et FJ a demandé d'insister sur l'égalité de ces nombres.

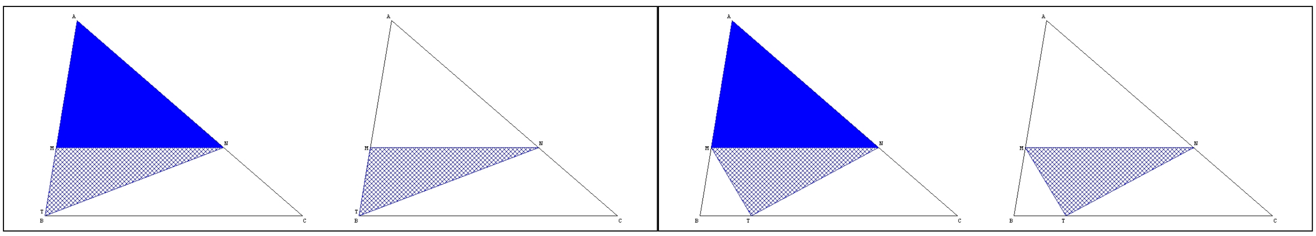
2. Deuxième étape :

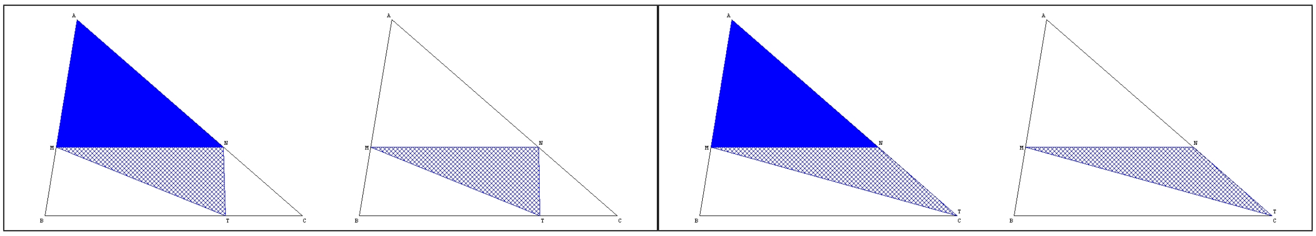
Cette première animation prend environ vingt minutes.

Le professeur fait bouger (toujours sous Géoplanw) le point T sur [BC] (fichier "ThalesAires3.g2w"). Un dialogue s'installe avec la classe qui aboutit rapidement, avec ce qui a été vu précédemment, à la constance de l'aire du triangle MNT donc à l'égalité des aires des triangles MNB et MNC.



En mettant en parallèle l'animation précédente et celle obtenue en ajoutant le triangle MAN (fichier "ThalesAires4.g2w" couplé avec le fichier "ThalesAires3.g2W"), les élèves trouvent aisément que l'aire du quadrilatère $AMTN$ est constante et en particulier les positions extrêmes de T donnent deux triangles d'aires égales : MAC et NAB.





Les élèves peuvent alors remplir les deux premières lignes de leur feuille (Annexe 2) et en tirer un premier résultat : en exprimant de deux façons l'aire de AMN on a

$$0,5 \times NK \times AM = 0,5 \times MH \times AN$$

L'égalité des aires des triangles BNA et CMA donne

$$0,5 \times NK \times AB = 0,5 \times MH \times AC$$

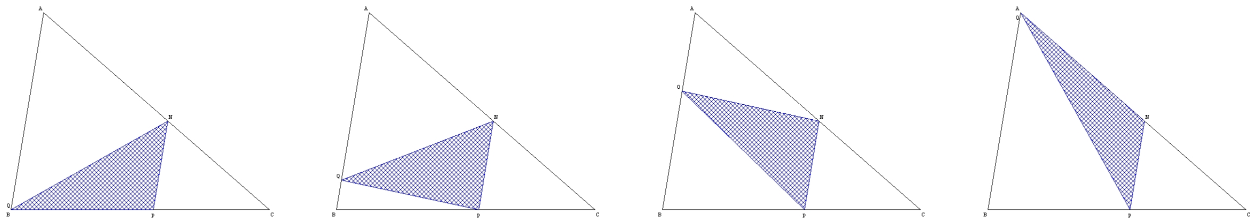
Une division membre à membre permet d'établir que

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

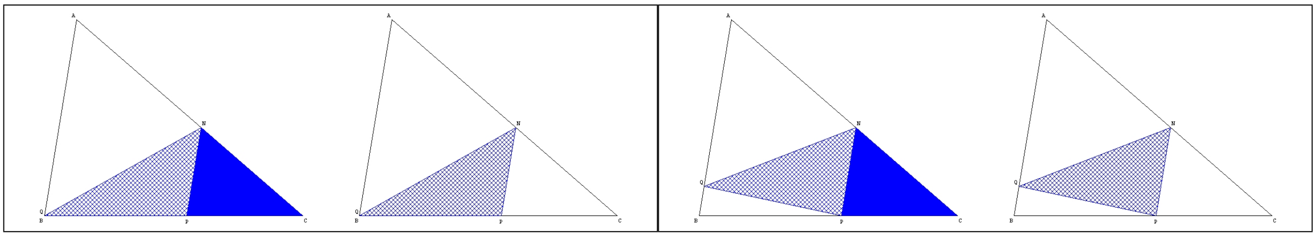
3. Troisième étape :

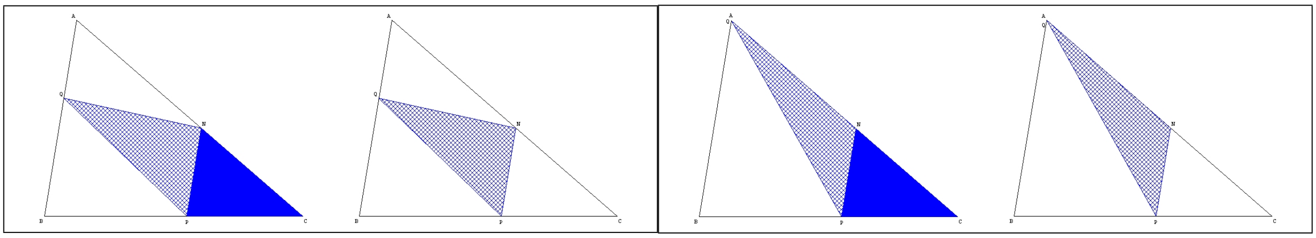
Cette seconde animation prend environ trente minutes.

P est le point de (BC) tel que (NP) et (AB) sont parallèles. Q est mobile sur $[AB]$ (fichier “ThalesAires5.g2w). Les élèves perçoivent très vite que les déplacements de Q se font, pour le triangle QNP, à aire constante et que les triangles BNP et ANP ont des aires égales.



En ajoutant le triangle CPN (fichier “ThalesAires6.g2w” couplé avec le fichier “ThalesAires5.g2w”), il devient évident que le quadrilatère $AQPC$ se déforme également à aire constante et que ses positions extrêmes ont des aires égales.





on établit ainsi l'égalité des aires des triangles APC et BNC et les élèves peuvent continuer à remplir leur feuille, obtenir un second résultat et la première conclusion.

Les aires de APN et de BPN sont égales donc

$$0,5 \times PJ \times AN = 0,5 \times NI \times BP$$

Les aires de APC et de BNC sont égales donc

$$0,5 \times PJ \times AC = 0,5 \times NI \times BC$$

Une division membre à membre permet de conclure

$$\frac{AN}{AC} = \frac{BP}{BC}$$

En rapprochant cette conclusion de la précédente on obtient

$$\frac{AN}{AC} = \frac{BP}{BC} = \frac{AM}{AB}$$

Reste à réinvestir les propriétés du parallélogramme $MNPB$ indiquant que $BP = MN$ pour conclure.

4. Quelques remarques :

Admettre l'égalité des quotients après l'avoir vérifié sur quelques exemples numériques n'est pas une démarche satisfaisante pour le maître (les élèves s'en contenteraient sûrement) d'où l'envie d'élaborer avec eux une démonstration avec évidemment quelques contraintes :

- cette démonstration n'est pas exigible, il ne faut pas y passer trop de temps, le reste du programme attend...
- elle est assez difficile et certes on ne laisserait pas un élève de quatrième la chercher seul, on risquerait de le perdre au milieu des proportions et cette situation extrême lui ferait perdre ses moyens.

Le maître s'est donc donné les moyens d'aboutir rapidement à la conclusion en utilisant d'une part l'ordinateur (celui ci est d'un bout à l'autre géré par lui), les animations ayant pour but d'accélérer la mise en place des outils préalables et de les utiliser ensuite pour établir les égalités d'aires de triangles, et d'autre part d'une fiche à compléter (méthode qui peut sembler passéiste mais qui permet de conclure rapidement).

Cette fiche, évidemment adaptable à un autre choix de triangles, permettrait, dans la première partie, de montrer que la parallèle (MN) découpe sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ des segments de longueurs proportionnelles (mais peut-on parler des petits bouts $[MB]$ et $[NC]$ en quatrième ?). On retrouve cet aspect projectif du théorème dans l'animation proposée sur le site du Kangourou : http://www.mathkang.org/swf/thales2.html

Cette démarche a été testée dans deux classes de quatrième, l'animation informatique ayant été adaptée après avoir montré ses faiblesses lors de la première séance : la stabilité de l'aire des quadrilatères $ANTM$ et $QNCP$ a été mieux perçue quand les triangles qui les composent sont colorés différemment.

Annexe 1

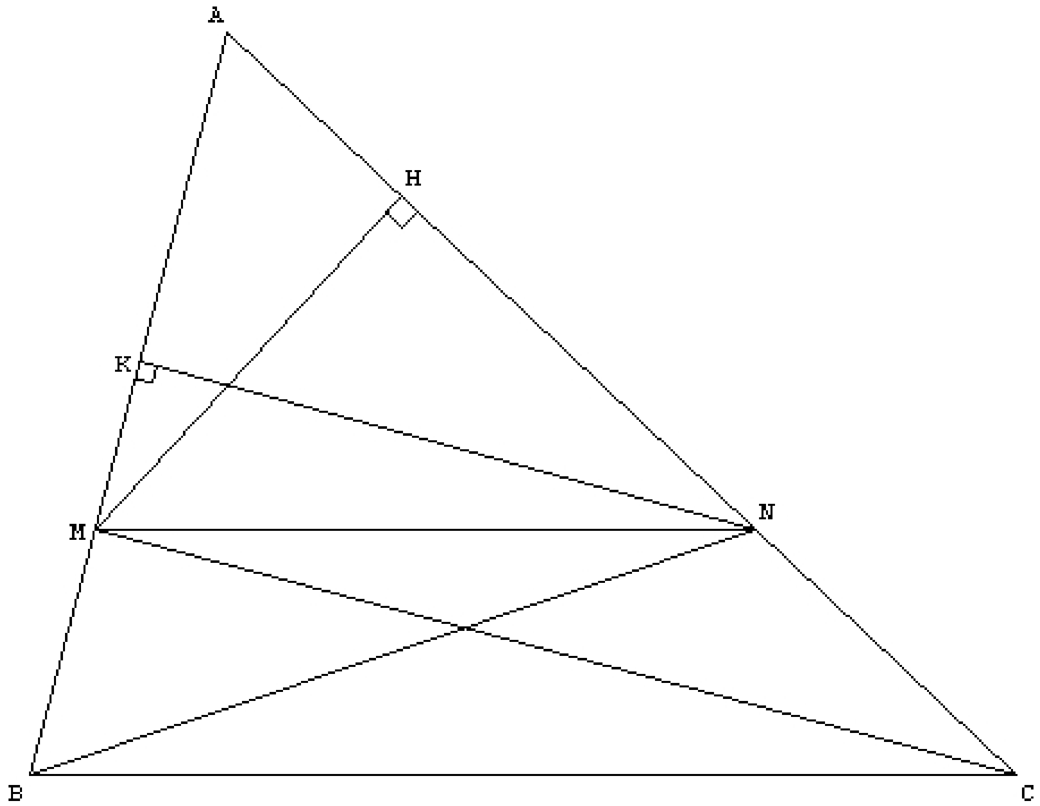


Fig. 1. Triangles *ANB* et *AMC*

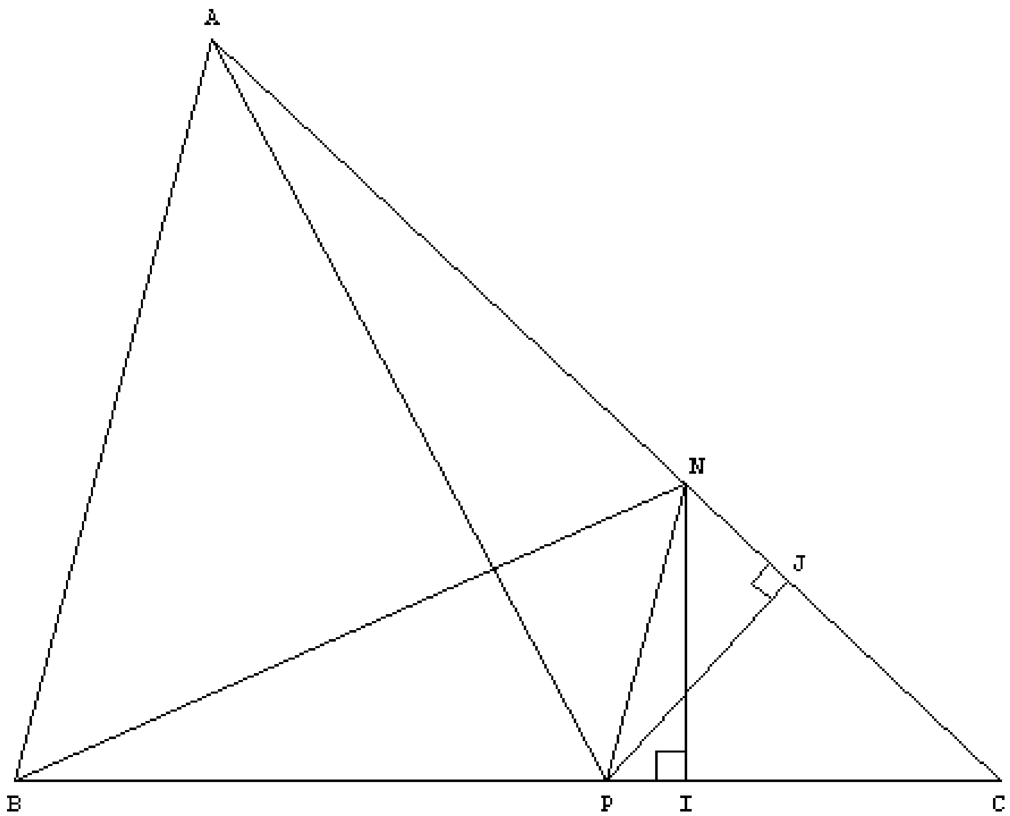


Fig. 2. Triangles *APC* et *BNC*

Annexe 2

Figure 1.

$$\text{Aire}(MAN) = 0,5 \times MH \times \ldots\ldots = 0,5 \times NK \times \ldots\ldots = \text{Aire}(MAN)$$

$$\text{Aire}(MAC) = 0,5 \times MH \times \ldots\ldots = 0,5 \times NK \times \ldots\ldots = \text{Aire}(NAB)$$

$$\frac{\text{Aire}(MAN)}{\text{Aire}(MAC)} = \frac{\text{Aire}(MAN)}{\text{Aire}(NAB)} = \underline{\qquad\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad\qquad} = \underline{\qquad\quad} = \underline{\qquad\quad}$$

Figure 2.

$$\text{Aire}(APN) = 0,5 \times PJ \times \ldots\ldots = 0,5 \times NI \times \ldots\ldots = \text{Aire}(BPN)$$

$$\text{Aire}(APC) = 0,5 \times PJ \times \ldots\ldots = 0,5 \times NI \times \ldots\ldots = \text{Aire}(BNC)$$

$$\frac{\text{Aire}(APN)}{\text{Aire}(APC)} \frac{\text{Aire}(BPN)}{\text{Aire}(BNC)} = \underline{\qquad\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad\qquad} = \underline{\qquad\quad} = \underline{\qquad\quad}$$

Première conclusion

$$\underline{\qquad\quad} = \underline{\qquad\quad} = \underline{\qquad\quad}$$

Que dire du quadrilatère $BMNP$?

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Seconde conclusion

$$\underline{\qquad\quad} = \underline{\qquad\quad} = \underline{\qquad\quad}$$